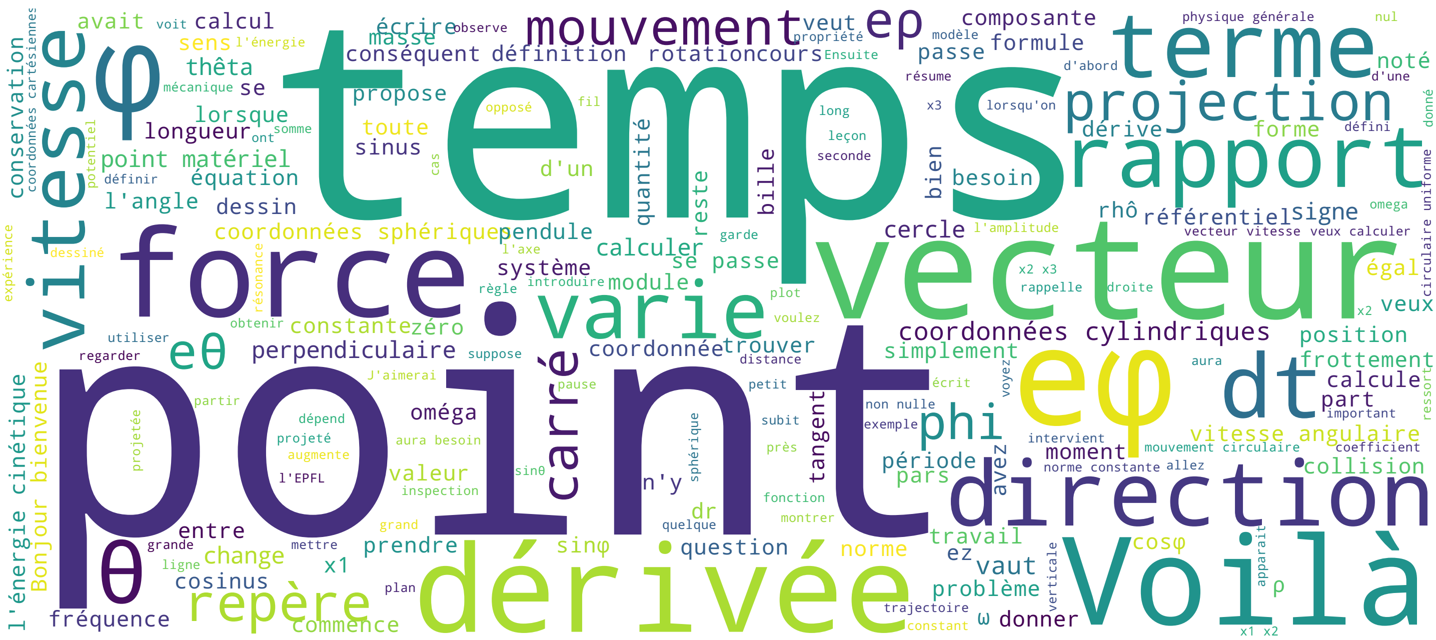
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Vitesse en coord. cylindriques et sphériques

Mécanique, cours 7.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-7



Search MOOC

Video

EPFL

Vitesse en coord. cylindriques et sphériques

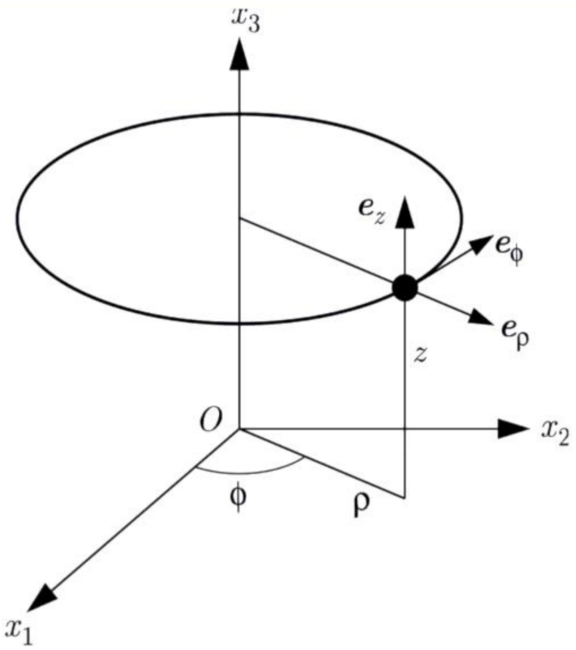
Bonjour! Bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, J'introduis les coordonnées cylindriques et sphériques. Et je veux voir comment on va faire la cinématique du point matériel exprimée en coordonnées cylindriques et sphériques. Alors...la vitesse est une grandeur vectorielle. Et ce que je veux, c'est les projections de la vitesse, exprimées en coordonnées cylindriques ou sphériques. et projetées sur le repère des coordonées ou cylindriques ou sphériques.

Notes

Summary

0m 04s

Vitesse projetée sur le repère des c. cylindriques



$$x_1 = \rho \cos \phi$$
$$x_2 = \rho \sin \phi$$
$$x_3 = z$$

$$\boldsymbol{r} = \rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \boldsymbol{e}_\phi + \dot{z} \boldsymbol{e}_z$$

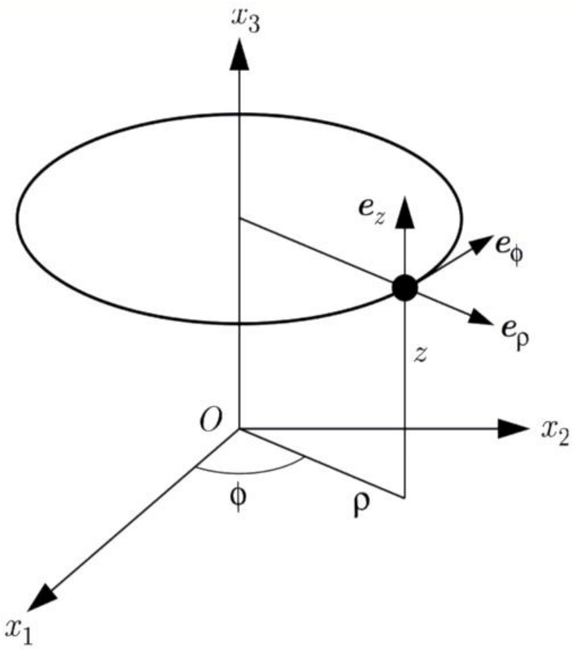
Je commence avec les coordonnées cylindriques. Voici le dessin qui résume notre définition des coordonnées cylindriques: ρ,φ, z, définis par rapport à un système de coordonnées cartésien présumé appartenant au référentiel. J'ai les vecteurs du repère $e\rho$, $e\varphi$, ez, et je veux calculer la vitesse. Si je pars des coordonnées cartésiennes du point materiel P, qui se trouve ici. Je peux faire les dérivées mais ce que je vais obtenir, ce sont les projections sur $x1$, $x2$, $x3$, du vecteur vitesse. Or ce n'est pas ce que je veux. J'aimerais les projections du vecteur vitesse sur $e\rho$, $e\varphi$, ez. Vous allez voir que c'est très commode d'avoir ces projections. Par conséquent, je propose de prendre une autre démarche, celle qui consiste à d'abord considérer la projection de r sur $e\rho$ et sur ez. Et maintenant je dérive par rapport au temps. Bien entendu, on va avoir une dérivée de ρ, par rapport au temps. On aura un ρ point et puis on va avoir un z point. Mais je vous montre la réponse finale. Il y a un terme de plus. Je vous laisse faire une pause si vous voulez, pour essayer de voir d'où vient ce terme.

Notes

Summary

0m 42s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} = -\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

Mécanique | 2013 12

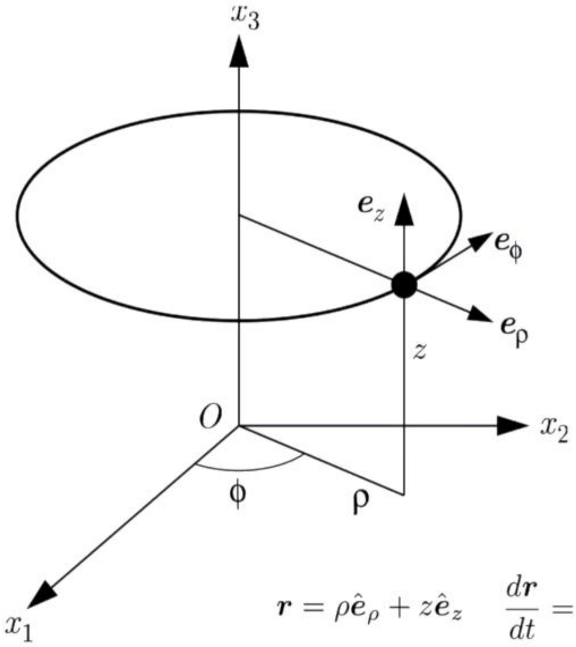
Ce terme supplémentaire vient du fait que lorsque je calcule la dérivée de *r*, par rapport au temps, je dois tenir compte du fait que *eρ* dépend du temps...en général. En effet, voilà le vecteur *eρ* lorsque φ varie dans le temps, *eρ* change de direction. S'il change de direction, sa dérivée est non nulle. Donc on a besoin de connaitre la dérivée de *eρ* par rapport au temps. Je propose de faire le calcul de la manière suivante: Nous avions calculé les projections de *eρ* sur *x1*, *x2*, qui eux appartiennent au référentiel *x1*, *x2* et *x3*, sont indépendents du temps. Alors, je peux calculer la dérivée. La dérivée du *cosinus* fera *moins φ* point *sinus* Le *sinus φ* point *cosinus*. C'est tout ce qu'il me faut pour le moment mais plus tard on va calculer l'accéleration et on aura besoin de la dérivée de *eφ* par rapport au temps, donc je le fais, dans la lancée. Voila *d eφ* sur *dt*. Je le calcule. J'ai un *moins φ* point *cosφ* moins *φ* point *sinφ* qui apparait ici. Et maintenant j'observe que dans *d eρ* sur *dt*, j'ai le *φ* point avec un *moins sinφ*, et *cosφ*.

Notes

Summary

2m 30s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} = -\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$$

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \dot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Mécanique | 2013 16

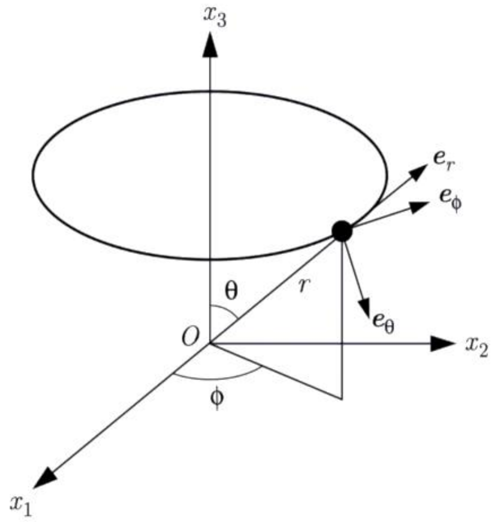
Or *moins sinφ* et *cosφ*, ce sont les composantes de *eφ*. Je peux écrire *d eρ* sur *dt* égal *φ* point fois *eφ*. Si on regarde *d eφ* sur *dt*, on a *cosφ* et *sinφ*, comme ici on a *cosφ* et *sinφ*. Donc *d eφ* sur *dt* a un *moins φ* point. Ce *moins φ* point, qui apparait, fois *eρ*. Voilà, maintenant on a toutes les dérivées temporelles des vecteurs de notre repère. Parce que *ez*, lui, ne change pas dans le temps. Il garde toujours cette direction verticale. Alors je reviens à la question de calculer les composantes, sur ce repère, du vecteur vitesse. Je pars de *r* projeté sur ce repère. Je derive par rapport au temps. Je dois introduire ce terme là: *d eρ* sur *dt*, qui est ici. Donc je vais avoir un *ρφ* point. C'est ce que j'ai annoncé... et voilà le terme.

Notes

Summary

4m 00s

Vitesse projetée sur le rèpère des c. sphériques



$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi$$
$$x_2 = r \sin\theta \sin\phi$$
$$x_3 = r \cos\theta$$

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

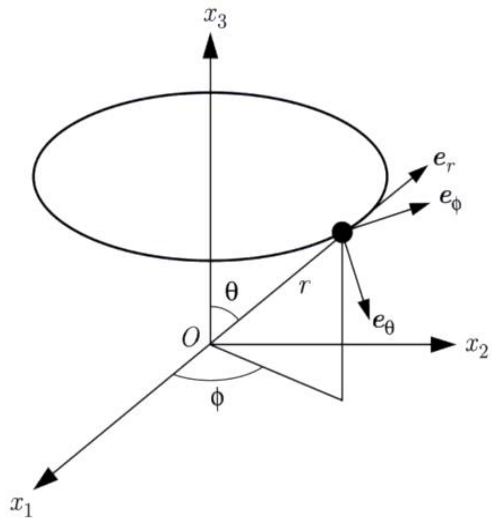
Faisons le même exercice avec les coordonnées sphériques. Voici *O*, *x1*, *x2*, *x3*, appartenant au référentiel. Les coordonnées sphériques *r*, *θ*, *φ*; les vecteurs unités associés *er*, *eθ*, *eφ*. Et maintenant, je veux calculer la vitesse. Je pourrais le faire en dérivant les coordonnées cartésiennes par rapport au temps, mais j'obtiendrais encore une fois les projections de la vitesse sur *x1*, *x2*, *x3*. Mais ce n'est pas ce que je veux. Je veux les projections de la vitesse sur *er*, *eθ*, *eφ*. Par conséquent, je propose de partir de la projection du vecteur *r*, C'est donc ce vecteur là. Ca c'est le vecteur que j'ai appelé *r*. Je pars de la projection de *r* sur le repère. C'est tout simplement ce terme là, et je vais dériver ce terme par rapport au temps. La dérivée de *r* va me donner un *r* point mais *er*, qui est ici, change de direction quand *φ* varie et quand *θ* varie. *er* change de direction quand *θ* varie, et aussi quand *φ* varie. Donc j'ai des termes supplémentaires. Je les donne ici. Voilà les termes qu'on doit trouver. On les a pas encore. On doit calculer *dr* sur *dt*.

Notes

Summary

5m 15s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

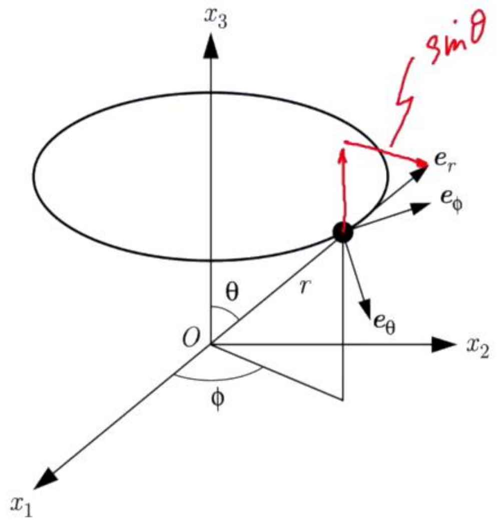
Alors re-examinons cette question là. Voilà notre dessin pour les coordonnées sphèriques: Et maintenant, je vais faire la chose suivante: pour calculer *dr* sur *dt*. J'vais pas faire comme pour les coordonées cylindriques, je vais simplement écrire ceci: par inspection de la figure, je prétends que je peux écrire ceci. Je vous propose de faire une pause et de voir si vous arrivez à trouver l'argument par vous même. Ceci est vrai pour la raison suivante: *er*, ce vecteur là, change d'orientation quand θ varie. Ca veut dire: *er* garde une norme constante mais subit une rotation définie par l'angle *θ*. On a vu, lorsqu'on a étudié le mouvement circulaire uniforme, On a vu cette propriété des vecteurs qui ont une norme constante leur dérivée par rapport au temps est perpendiculaire au vecteur considéré. Donc on doit avoir un vecteur perpendiculaire à *er*. On voit bien quand *θ* varie, *er* part dans ce sens là Donc on est dans le sens de *eθ*. Alors, c'est ce que j'ai noté ici. Et dans les même considérations, on avait vu que le module du vecteur valait la vitesse angulaire. Donc ici, associé à *θ*, j'ai un *θ* point.

Notes

Summary

6m 55s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



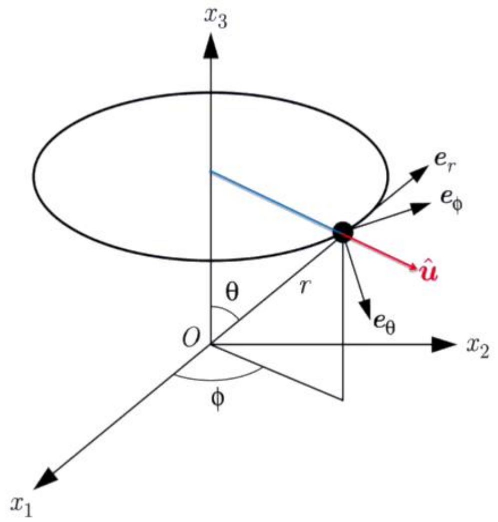
$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Et il faut encore s'assurer du signe, mais là je crois qu'on a le signe dans le bon sens...oui. Quand *er* part dans ce sens là, on part dans l'sens des *eθ* positifs. Mais *er* peut aussi évoluer dans le temps. Sa dérivée est non-nulle parce que quand φ varie, *er* change d'orientation. Là, il faut faire une petite construction auxiliaire. Il faut voir que je peux écrire *er* comme la somme de deux vecteurs, un vecteur vertical, et un autre horizontal, comme ceci. Et c'est cette composante horizontale qui subit la rotation définie par *φ*. La partie verticale, elle, n'est pas affectée. Quelle est la longueur, quelle est la norme de ce vecteur? Et bien, puisqu'on a ici, *un*. L'angle *θ*, on le retrouve ici. On a donc ici *sinusθ*. Alors j'applique ma règle, qu'on avait induite, en considérant le mouvement circulaire uniforme. Je dois avoir un vecteur qui vaut en norme *φ* point, la vitesse angulaire, *φ* point; la norme du vecteur *sinθ*. Et dans quelle direction? Alors si *φ* varie, *er* suit le long du cercle, donc on est tangent au cercle, on est dans la direction de *eφ*. C'est ce que j'ai indiqué ici.

Notes

Summary

8m 25s



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

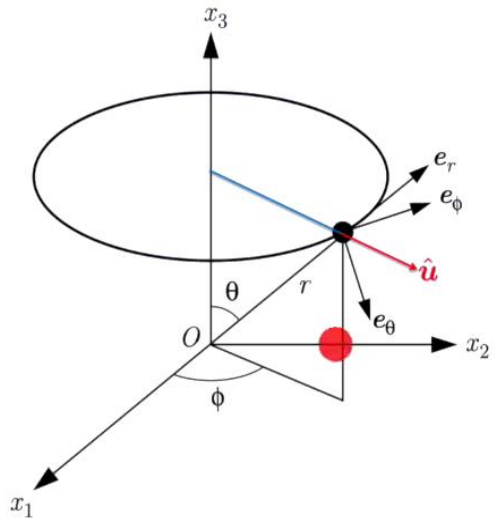
Donc voilà un argument géométrique pour dire pourquoi *dr* sur *dt* a cette forme là. C'est le seul moment dans le cours, où on a besoin de se prêter à cet exercice là. Ce n'est pas une technique que je demande d'apprendre, mais il est important pour moi, que vous voyiez d'où viennent ces formules. Et j'ai choisi la méthode qui nécessitait un minimum d'algèbre. Je passe maintenant à *d eφ* sur *dt*. On n'en a pas besoin pour calculer la vitesse. Mais tout à l'heure, on va devoir calculer l'accélération vectorielle. On aura besoin de ce terme. Donc je fais ce calcul maintenant. *d eφ* sur *dt*. Voilà *eφ*. Alors *eφ*, c'est plus simple. *eφ* ne change pas de direction quand *r* varie. Et *eφ* ne change pas de direction lorsque *θ* varie. *eφ* change de direction seulement quand *φ* varie. La dérivée de *eφ* par rapport au temps, doit être perpendiculaire à *eφ*, dans le plan horizontal. Donc dans la direction de ce vecteur *u* que j'ai dessiné ici. Donc voilà. Je dois dire que ma dérivée *d eφ* sur *dt* est dans la direction *u*. Je dois mettre la vitesse angulaire, la norme du vecteur, qui vaut *un*, et le signe, par inspection du graphique.

Notes

Summary

10m 03s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Mécanique | 2013 25

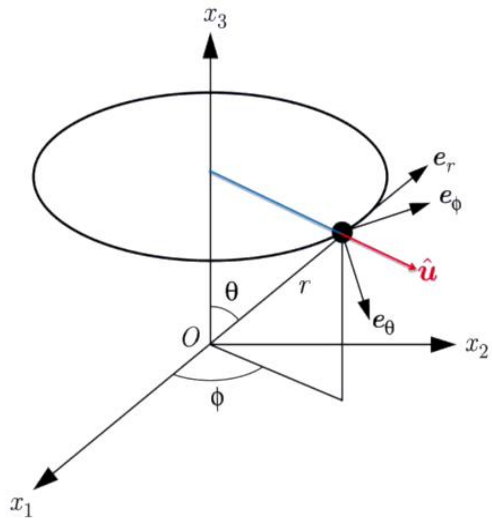
Je vois que lorsque *φ* augmente *eφ* part dans ce sens là, donc opposé à *u*. C'est pour ça que j'ai mis ce signe *moins* ici. Maintenant, *u*, il faut encore projeter *u* sur *er* et *eθ*. Alors, on constate que si cette droite là, qui définie l'angle θ, est perpendiculaire à celle-là... et cette droite est perpendiculaire à celle-là. Je vous rappelle que *eθ* est tangent au cercle. De coordonnées *θ* varie, donc on a un angle droit, ici, et avec ce que j'viens de dire, on a donc l'angle *θ* qui se retrouve là. Donc *u* a une projection ...*u* a une projection *cosθ* sur *eθ*. C'est c'que j'ai noté ici. Et on a un *sinθ* avec le signe *plus*, dans la direction perpendiculaire, donc la direction de *er*. Voilà, avec ça on en a fini de *d eφ* sur *dt*. Il nous reste *d eθ* sur *dt*. Alors on va utiliser le même argument que pour *d er* sur *dt*. *eθ* est ici. Quand *θ* varie, *eθ* fait une rotation entièrement. Donc, on doit écrire: *θ* point. On met un signe *moins* parce qu'on observe que lorsque *θ* augmente *eθ* tourne dans ce sens là.

Notes

Summary

11m 30s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Mécanique | 2013 27

Donc opposé à *er*. Et c'est bien dans la direction de *er*. Tout se passe dans le plan vertical qui contient *x3, OP, cette verticale, et ce segment là. Donc on est perpendiculaire à *eφ*. Y'a aucune composante selon *eφ*, seulement selon *er*. *eθ* varie aussi quand *φ* varie. *eθ* se met à tourner, comme le point matériel sur le cercle. Et par conséquent, on a une dérivée dans la direction de *eφ*. C'est ce que j'ai noté ici Il n'y a que la composante horizontale, donc... celle-là, qui intervient. Et ça on avait vu que, vous vous souvenez, On avait fait l'argument, comme quoi, là y'avait l'angle *θ*. Donc c'est un *cosθ* qui intervient. Et la vitesse angulaire c'est *φ* point. Voilà! J'ai obtenu les trois dérivées des trois vecteurs du repère des coordonées sphériques. Je peux maintenant passer à la question du calcul de la vitesse. *r*, c'est simplement *r* dans la direction *er*. Quand je dérive, j'ai ce terme là. Et puis, j'ai la dérivée de *er*, par rapport au temps. Qui est ici. Donc, on aura un *rθ* point, dans la direction *eθ*. *r φ* point *sinθ*, dans la direction *eφ*. C'est ce que j'avais annoncé. Voici, je répète, la formule.

Notes

Summary

13m 17s

Vitesse projetée sur les rèpères associés

Coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Mécanique | 2013 32

Je résume. Pour les coordonées cylindriques, voilà le vecteur *r*, donc le vecteur de *position* projeté sur le repère associé aux coordonnées cylindriques. Voilà la vitesse, exprimée avec les coordonnées *ρ*, *φ*, *z*. Et projetée sur le repère des coordonnées cylindriques. De même pour les coordonnées sphériques. Voilà le vecteur *position*, projeté sur le repère des coordonnées sphériques. Et voilà la vitesse que nous venons d'obtenir, projetée sur le repère des coordonnées sphériques.

Notes

Summary

14m 59s