Vitesse en coord. cylindriques et sphériques

Mécanique, cours 7.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-7

EPFL

Vitesse en coord. cylindriques et sphériques

Vitesse vectorielle, projection sur le repère des coordonnées :

- cylindriques
- sphériques

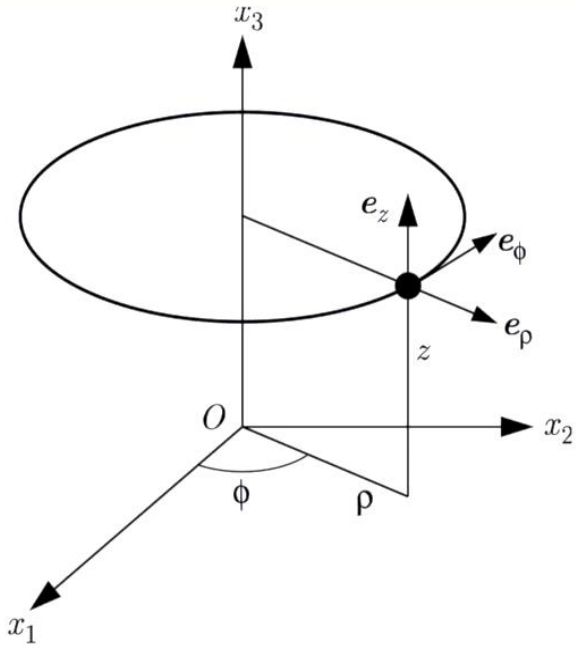
Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion habe ich die sphärischen und zylindrischen Koordinaten eingeführt. Des Weiteren möchte ich sehen, wie man die Cinematik eines Massepunkts in zylindrischen und sphärischen Koordinaten beschreiben kann. Also, die Geschwindigkeit ist eine vektorielle Grösse. Was ich möchte, sind die Projektionen der Geschwindigkeit in zylindrischen sphärischen Koordinaten auszudrücken.

Notes

Summary

0m 04s

Vitesse projetée sur le repère des c. cylindriques



$$x_1 = \rho \cos \phi$$
$$x_2 = \rho \sin \phi$$
$$x_3 = z$$

$$\boldsymbol{r} = \rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \boldsymbol{e}_\phi + \dot{z} \boldsymbol{e}_z$$

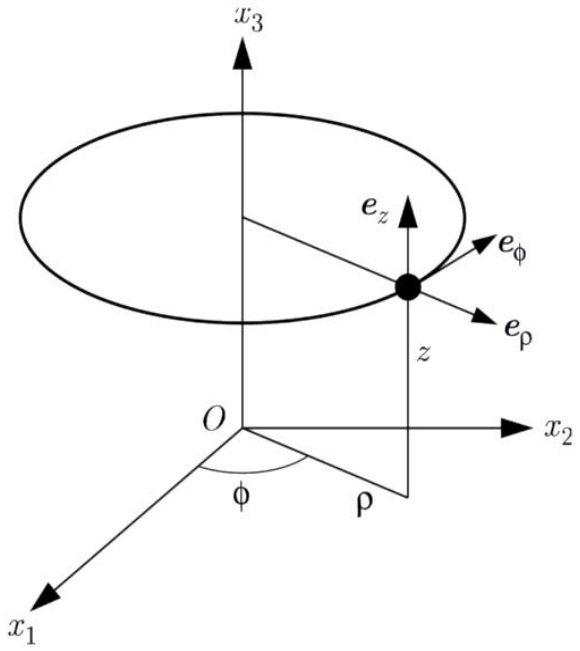
Ich beginne mit den zylindrischen Koordinaten. Hier ist die Zeichnung, welche die Definition der zylindrischen Koordinaten zusammenfasst: *ρ*,*φ*, *z* sind mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystem definiert, welches sich im Bezugssystem befindet. Ich habe die Vektoren des Koordinatensystems: *eρ*, *eφ*, *ez* und ich möchte die Geschwindigkeit berechnen. Wenn ich von den kartesischen Koordinaten des Punktes P ausgehe, welcher sich hier befindet, kann ich die Ableitungen betrachten. Jedoch werde ich die Projektionen auf *x1*, *x2* und *x3* des Geschwindigkeitsvektors erhalten. Dies ist nicht was ich möchte. Ich möchte die Projektionen des Geschwindigkeitsvektors auf *eρ*, *eφ* und *ez*. Ihr werdet sehen, es ist sehr nützlich die Projektionen zu haben. Deswegen schlage ich vor einen anderen Weg einzuschlagen. Betrachten wir zuerst die Projektion von *r* auf *eρ* und *ez*. Nun leite ich nach der Zeit ab. Wohlgemerkt, wir werden die Ableitung von *ρ* nach der Zeit. Wir werden ein *ρ* Punkt und ein *z* Punkt haben. Aber ich zeige euch das Resultat. Es hat einen zusätzlichen Term.

Notes

Summary

0m 40s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} = -\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

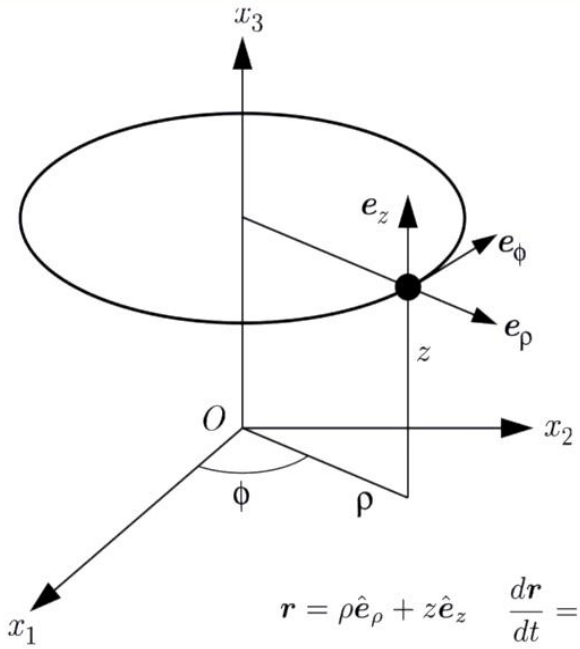
Ich lasse euch eine Pause machen, damit, wenn ihr möchtet, ihr versuchen könnt herauszufinden, woher dieser Term stammt. Dieser zusätzlich Term kommt daher, dass wenn ich die zeitliche Ableitung von *r* berechne, muss ich realisieren, dass *eρ* ebenfalls von der Zeit abhängt. Hier der Vektor *eρ*, wenn φ zeitlich variiert, ändert *eρ* seine Richtung. Wenn er die Richtung wechselt, ist seine Ableitung nicht null. Also müssen wir die zeitliche Ableitung von *eρ* kennen. Ich schlage vor, die Berechnung in der folgenden Art und Weise zu machen. Wir haben die Projektionen von *eρ* auf *x1* und *x2* berechnet, welche sich im Bezugssystem *x1*, *x2* und *x3* befinden. Dieses Bezugssystem ist zeitunabhängig. Also kann ich die Ableitung berechnen. Die Ableitung des *cosinus* ergibt *minus φ* Punkt *sinus*. Der *minus φ* Punkt *sinus* ist alles, was ich zur Zeit benötige. Später jedoch werden wir die Beschleunigung berechnen, wobei wir auch die zeitliche Ableitung von *eφ* benötigen werden. Also berechne ich diese Ableitung jetzt schon. Voilà, *d eφ* durch *dt*. Ich berechne dies.

Notes

Summary

2m 24s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} = -\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$$

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \dot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

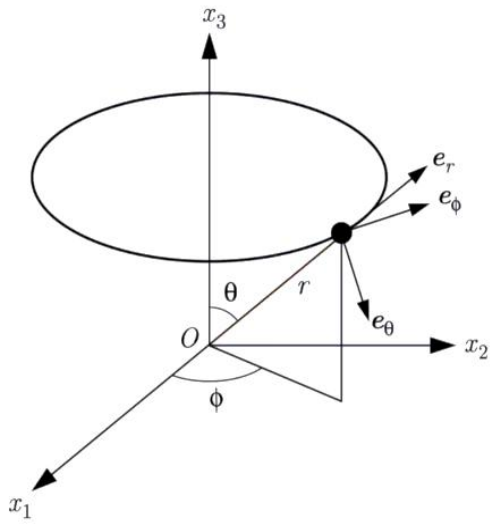
Ich habe ein *minus φ* Punkt *cosφ* minus *φ* Punkt *sinφ*, welches hier auftaucht. Und nun stelle ich fest, dass in *d eρ* durch *dt* habe ich *φ* Punkt mit einem *minus sinφ* und *cosφ*. Wobei *moins sinφ* et *cosφ* die Komponenten von *eφ* darstellen. Ich kann schreiben: *d eρ* durch *dt* gleich *φ* Punkt mal *eφ*. Wenn wir *d eφ* durch *dt* betrachten, haben wir *cosφ* und *sinφ*. Also besitzt *d eφ* durch *dt* ein *minus φ* Punkt. Dieses *minus φ* Punkt, welches auftaucht mal *eρ*. Nun haben wir alle zeitlichen Ableitungen der Vektoren unseres Koordinatensystems. Weil *ez* nicht in der Zeit variiert. *ez* bleibt die ganze Zeit über in vertikaler Ausrichtung. Ich kehre zur Frage zurück, die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in diesem Koordinatensystem zu berechnen. Ich beginne mit *r*, welches auf dieses Koordinatensystem projiziert ist. Ich leite nach der Zeit ab. Ich muss den Term *d eρ* durch *dt* einfügen, welcher hier ist. Also werde ich ein *ρφ* Punkt erhalten, was ich bereits vorausgesagt habe.

Notes

Summary

3m 43s

Vitesse projetée sur le rèpère des c. sphériques



$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi$$
$$x_2 = r\sin\theta\sin\phi$$
$$x_3 = r\cos\theta$$

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

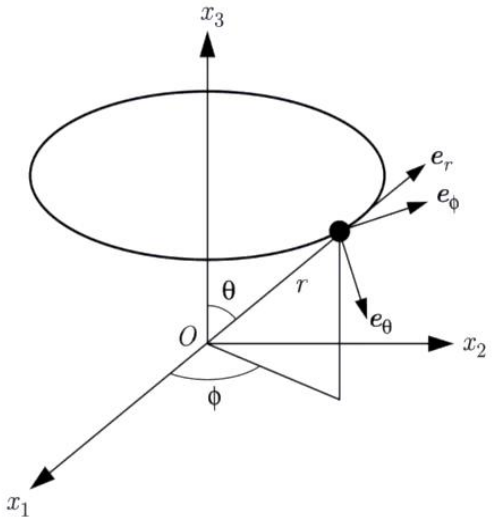
Machen wir die gleiche Übung mit den sphärischen Koordinaten. Hier *O*, *x1*, *x2*, *x3*, was dem Bezugssystem angehörig ist. Die sphärischen Koordinaten *r*, *θ*, *φ* mit den zugehörigen Einheitsvektoren *er*, *eθ*, *eφ*. Nun möchte ich die Geschwindigkeit berechnen. Ich könnte dies machen, indem ich die kartesischen Koordinaten nach der Zeit ableite. Jedoch erhielte ich dadurch die Projektion der Geschwindigkeit auf die Achsen *x1*, *x2*, *x3*, was nicht mein Interesse ist. Ich möchte die Projektion der Geschwindigkeit auf die Vektoren *er*, *eθ*, *eφ*. Deswegen schlage ich vor, bei der Projektion des Vektors *r* zu beginnen. Dies ist also dieser Vektor hier. Dies ist der Vektor, welchen ich *r* genannt habe. Ich starte mit der Projektion von *r* auf dieses Koordinatensystem. Dies ist schlicht und einfach dieser Term hier. Diesen Term werde ich nach der Zeit ableiten. Die Ableitung von *r* wird mir ein *r* Punkt geben. Aber *er*, welches hier ist, ändert seine Richtung, wenn *φ* oder *θ* variiert. *er* ändert seine Ausrictung, wenn *θ* variiert und ebenfalls wenn *φ* variiert. Also habe ich zusätzliche Terme. Ich gebe diese hier.

Notes

Summary

5m 15s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

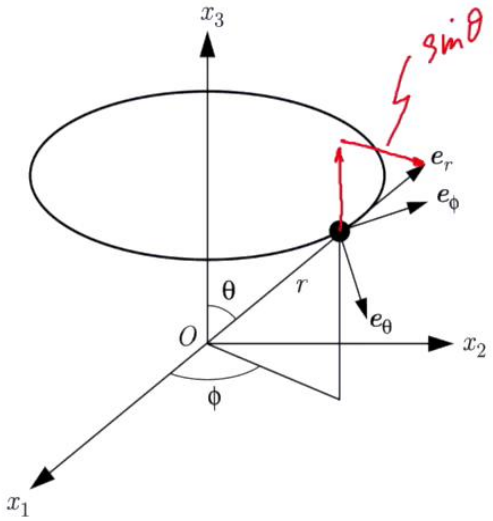
Hier die Terme welche wir finden müssen. Wir haben sie noch nicht gefunden. Wir müssen *dr* durch *dt* berechnen. Betrachten wir diese Frage noch einmal. Hier ist unsere Zeichnung für die sphärischen Koordinaten. Um *dr* durch *dt* zu berechnen, werde ich das Folgende machen: Ich werde nicht wie bei den zylindrischen Koordinaten umgehen. Ich werde einfach dies hier schreiben. Durch das Betrachten der Figur nehme ich an, dass ich dies hier schreiben kann. Ich schlage euch vor, eine Pause zu machen und zu schauen, ob ihr das Argument selbständig finden könnt. Dies ist aus dem folgenden Grund korrekt: *er*, dieser Vektor hier, ändert seine Richtung, wenn θ variiert. Dies will heissen, dass die Norm von *er* konstant bleibt, jedoch der Vektor einer Rotation unterliegt, welche durch den Winkel *θ* definiert ist. Wir haben dies gesehen, als wir die gleichförmige Kreisbewegung studieren. Wir haben diese Eigenschaft eines Vektors gesehen, wessen Norm konstant ist, jedoch dessen zeitliche Ableitung senkrecht zu ihm ist. Also müssen wir ein zu *er* senkrecht stehenden Vektor haben. Wir sehen, dass, wenn *θ* variiert, sich *er* in diese Richtung bewegt.

Notes

Summary

6m 49s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Mécanique | 2013 22

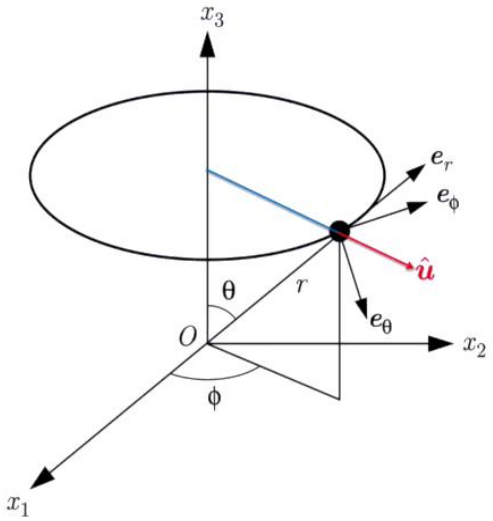
Wir sind also in der Richtung von *eθ*. Dies ist, was ich hier aufgeschrieben habe. In denselben Betrachtungen haben wir gesehen, dass das Modul des Vektors der Winkel- geschwindigkeit entspricht. Also hier habe ich mit *θ* assoziiert ein *θ* Punkt. Wir müssen uns noch des Vorzeichens vergewissern, jedoch hier glaube ich, dass wir das Vorzeichen richtig gesetzt haben. Wenn sich *er* in diese Richtung bewegt, bewegen wir uns in die positive Richtung von *eθ*. *er* kann jedoch auch in der Zeit variieren. Seine Ableitung ist nicht null. Denn, wenn φ variiert, ändert *er* seine Richtung. Hier müssen wir eine zusätzliche Konstruktion machen. Man muss sehen, dass man *er* als Summe zweier Vektoren schreiben kann; ein vertikaler und ein horizontaler Vektor, wie hier. Diese horizontale Komponente unterliegt einer Rotation, welche durch *φ* definiert ist. Die vertikale Komponente ist nicht beeinflusst. Was ist die Länge, was ist die Norm dieses Vektors? Da wir hier *eins* haben und hier den Winkel *θ*, entspricht die Länge *sinusθ*. Also verwende ich meine Regel, welche wir durch das Betrachten der gleichförmigen Kreisbewegung induzierten.

Notes

Summary

8m 08s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

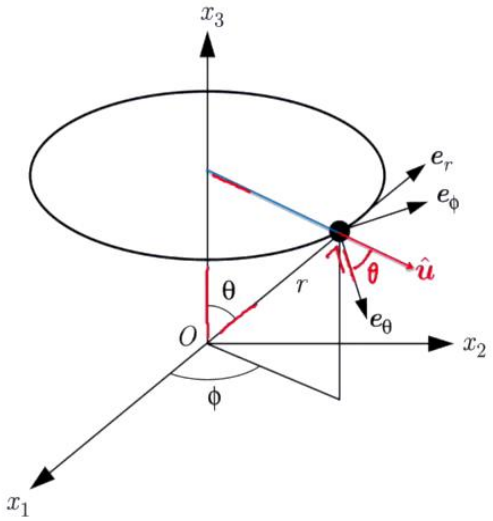
Ich muss einen Vektor erhalten, wessen Norm der Winkelgeschwindigkeit *φ* Punkt entspricht. Die Norm des Vektors ist *sinθ*. In welche Richtung zeigt der Vektor? Also, wenn *φ* variiert, folgt *er* dem Kreis entlang und ist dementsprechend tangential zum Kreis, respektive in der Richtung von *eφ*. Dies habe ich hier ausgedrückt. Durch ein geometrisches Argument konnten wir also begründen, weshalb *dr* durch *dt* diese Form besitzt. Dies ist der einzige Moment in diesem Kurs, in welchem wir diese Technik verwenden. Ich verlange nicht von euch, diese Technik auswendig zu lernen. Es ist jedoch wichtig für mich, dass ihr wisst, woher diese Formeln stammen. Des Weiteren habe ich die Methode verwendet, welche am wenigsten Algebra benötigt. Ich wechsle nun zum Term *d eφ* durch *dt*. Wir brauchen diesen Term nicht, um die Geschwindigkeit zu berechnen. Jedoch bald werden wir die Beschleunigung in vektorieller Form bestimmen, wobei die Kenntnis dieses Terms notwendig ist. Ich mache also diese Berechnungen jetzt. *d eφ* durch *dt*. Hier ist *eφ*. *eφ* ist einfacher. *eφ* ändert nicht seine Richtung, wenn *r* variiert oder wenn *θ* variiert.

Notes

Summary

9m 37s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

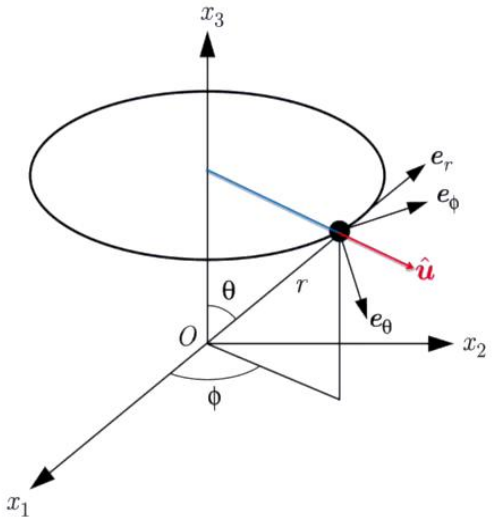
eφ ändert nur seine Richtung, wenn *φ* variiert. Die zeitliche Ableitung von *eφ* muss senkrecht zum Vektor *eφ* sein und sich gleichzeitig in der horizontalen Ebene befinden, also in der Richtung des Vektors *u*, welchen ich hier gezeichnet habe. Ich muss sagen, dass die Ableitung von *d eφ* durch *dt* sich in der Richtung von *u* befindet. Ich muss die Winkelgeschwindigkeit, die Norm des Vektor, welches eins ist, und das Vorzeichen durch das Betrachten der Graphik bestimmen. Ich sehe, dass, wenn sich *φ* vergrössert, sich *eφ* in diese Richtung, respektive entgegengesetzt von *u* bewegt. Aus diesem Grund habe ich das negative Vorzeichen hier gesetzt. Nun müssen wir *u* noch auf *er* und *eθ* projizieren. Also wir stellen fest, dass diese Gerade hier, welche den Winkel θ definiert, senkrecht zu dieser ist und diese Gerade senkrecht zu jener ist. Ich erinnere euch daran, dass *eθ* tangential zum Kreis ist. Die Koordinate *θ* variiert. Also haben wir einen rechten Winkel hier. Wenn ich meine zuvor getätigten Aussagen mit ein beziehe, folgt daraus, dass sich der Winkel *θ* hier wieder findet.

Notes

Summary

11m 01s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

V

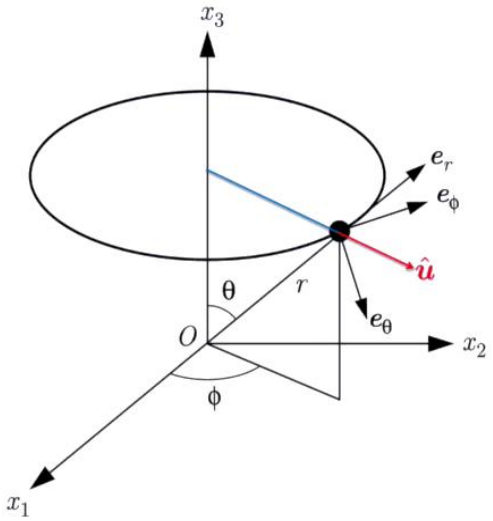
Also entspricht die Projektion von *u* auf *eθ cosθ*. Dies habe ich hier notiert. Des Weiteren haben wir ein *sinθ* mit positiven Vorzeichen in der dazu senkrechten Richtung, also in der Richtung von *er*. Damit haben wir die Berechnung von *d eφ* durch *dt* abgeschlossen. Es bleibt *d eθ* durch *dt* zu berechnen. Wir werden dieselbe Argumentation verwenden wie für *d er* durch *dt*. *eθ* ist hier. Wenn *θ* variiert, ändert *eθ* seine Richtung. Also müssen wir *θ* Punkt schreiben. Wir setzen ein negatives Vorzeichen, weil, wenn *θ* anwächst, rotiert *eθ* in diese Richtung hier, also entgegengesetzt zu *er*. Es ist in der Richtung von *er*. All dies geschieht in der vertikalen Ebene, welche x3, OP, diese Vertikale und dieses Segment hier enthält. Also ist diese Ebene senkrecht zu *eφ*. Es keine Komponente in der Richtung *eφ*, nur in der Richtung *er*. *eθ* variiert ebenfalls, wenn *φ* variiert. *eθ* beginnt sich, wie ein Massepunkt auf einem Kreis zu drehen. Deswegen haben wir auch eine Ableitung in der Richtung von *eφ*. Dies habe ich hier aufgeschrieben.

Notes

Summary

12m 24s

Dérivée temporelle des vecteurs unité



$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Es hat nur eine horizontale Komponente, diese hier, welche die Situation beeinflusst. Dies haben wir bereits gesehen. Erinnert ihr euch? Wir machten das Argument, dass sich hier der Winkel *θ* befindet. Also ist es ein *cosθ*, welcher auftaucht. Die Winkelgeschwindigkeit ist *φ* Punkt. Als haben wir die drei Ableitungen der drei Einheitsvektoren des sphärischen Koordinatensystems berechnet. Ich kann nun zur Frage der Berechnung der Geschwindigkeit wechseln. *r* ist schlicht und einfach *r* in der Richtung von *er*. Wenn ich dies ableite, habe ich diesen Term hier. Des Weiteren habe ich die zeitliche Ableitung von *er*, welche hier ist. Also haben wir ein i>rθ Punkt in der Richtung von *eθ* und ein *r φ* Punkt *sinθ* in der Richtung von *eφ*. Dies ist, was ich bereits vorausgesagt habe. Hier zeige ich die Formel noch einmal.

Notes

Summary

13m 58s

Vitesse projetée sur les rèpères associés

Coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

Ich fasse zusammen. Für die zylindrischen Koordinaten, voilà der Vektor *r*, respektive die Projektion des Positionsvektor auf das den sphärischen Koordinaten zugehörige Koordinatensystem. Hier die Geschwindigkeit in den Koordinaten *ρ*, *φ*, *z* ausgedrückt und auf das Koordinatensystem der zylindrischen Koordinaten projiziert. Dasselbe für die sphärischen Koordinaten. Hier die Projektion des Positionsvektors auf das Koordinatensystem der sphärischen Koordinaten. Und zuletzt die Geschwindigkeit, welche wir zuvor bestimmt haben, auf das Koordinatensystem der sphärischen Koordinaten projiziert.

Notes

Summary

14m 59s