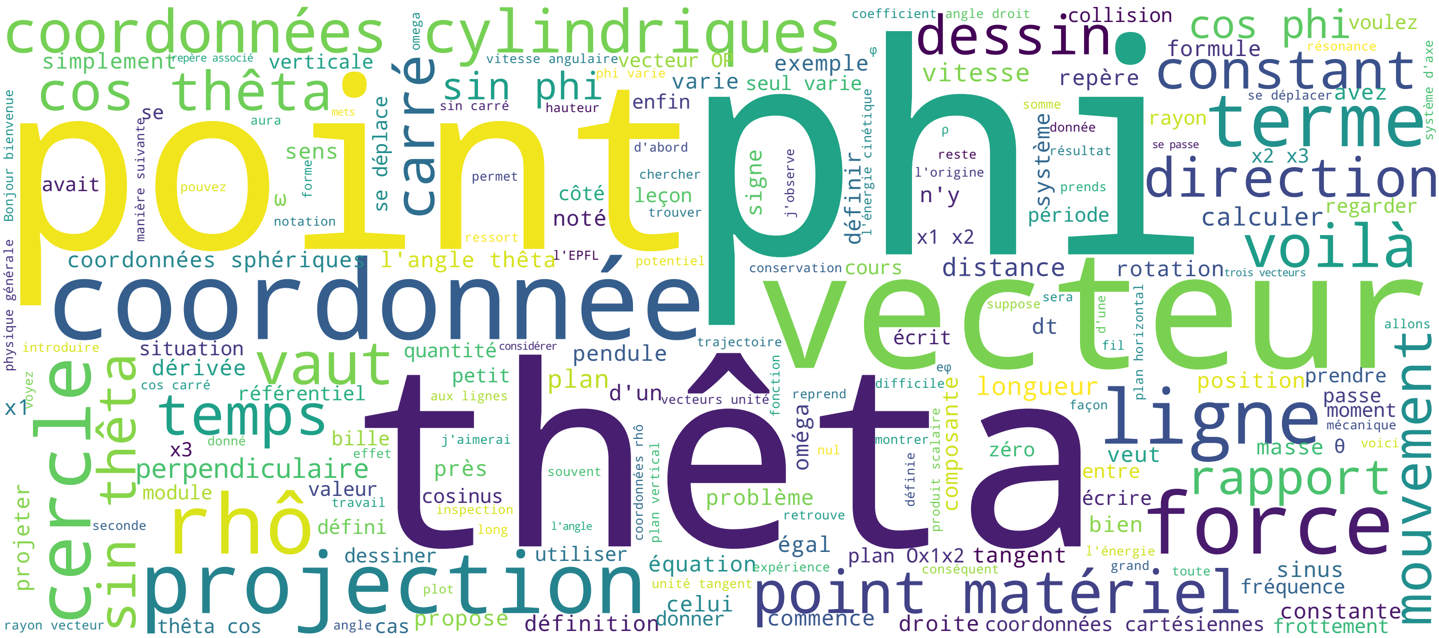
Coordonnées cylindriques et sphériques

Mécanique, cours 7.1

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-7



Search MOOC

Video

EPFL

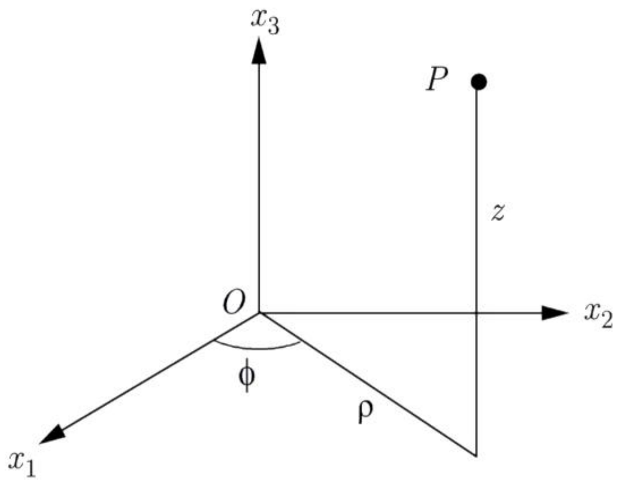
Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, je vais introduire les coordonnées cylindriques et sphériques. Jusqu'à maintenant, nous avons fait des problèmes que nous pouvions traiter convenablement avec des coordonnées cartésiennes, or en mécanique on trouve souvent des situations avec des symétries particulières et il est important d'utiliser un système de coordonnées qui permettent de rendre compte de ces symétries. C'est pour ça que nous allons voir les coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques et pour ces deux systèmes de coordonnées, je vais définir des repères qui leur sont associés.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : coordonnées cylindriques



$$P\,(\rho, \phi, z)$$

$$x_1 = \rho \cos \phi$$
$$x_2 = \rho \sin \phi$$
$$x_3 = z$$

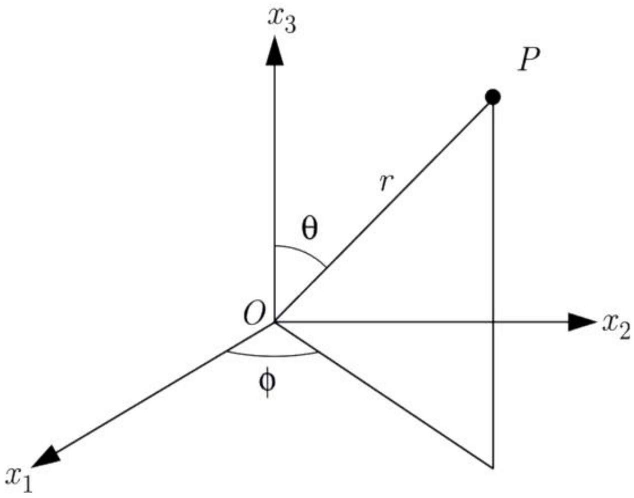
Je commence avec les coordonnées cylindriques. J'imagine que mon référentiel est matérialisé par un système d'axes cartésiens O, x1, x2, x3. Je veux repérer la position de mon point matériel, jusqu'à maintenant, on a défini la position du point matériel avec ses coordonnées cartésiennes, mais maintenant je propose les coordonnées cylindriques qui sont définies de la manière suivante : d'abord, je vais considérer la projection *P'* du point matériel*P* sur le plan *Ox1x2* et cette hauteur au-dessus du plan je vais l'appelerz. zest équivalent à *x3* mais je vais utiliser la notation *z* pour signaler que nous sommes en coordonnées cylindriques. Ensuite, je vais utiliser *p*, la distance de *P* à l'axe *Ox3*, donc c'est cette longueur-là. Et enfin, je vais utiliser l'angle qui marque l'écart angulaire entre l'axe Ox1 et cet axe-là correspondant à la projection de P sur le plan Ox1x2. Donc maintenant, mon point matériel a sa position qui est définie par rhô, phi et z. Bien sûr on peut chercher à écrire la correspondance entre les coordonnées cartésiennes du point et les coordonnées cylindriques.

Notes

Summary

0m 48s

Définition : coordonnées sphériques



$P\,(r, \theta, \phi)$

Mécanique | 2013 17

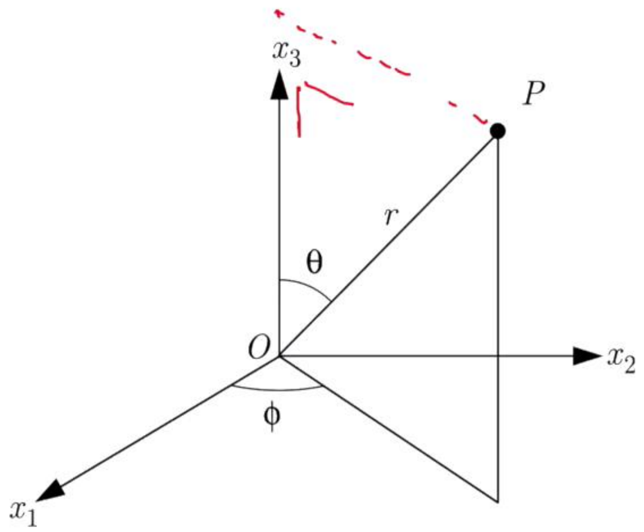
Alors, si on regarde le dessin, la coordonnée x1 va être donnée par la projection de ce point *P'* qui sera à peu près par ici, ici j'ai un angle droit et donc j'ai un triangle rectangle avec l'angle droit ici, cette longueur-là, la coordonnée x1, c'est rhô cos phi. Ce que j'ai écrit comme ceci. La coordonnée x2, c'est cette distance-là, c'est rhô sin phi et z est égal à x3 tout simplement. Je passe maintenant à la définition des coordonnées sphériques. Encore une fois, je me donne un système d'axes cartésiens liés au référentiel et je veux caractériser la position du point matériel P. Maintenant je le fais de la manière suivante : c'est dans la logique des coordonnées sphériques, je me donne la distance de P à l'origine, r, et je me donne l'angle thêta caractérisant l'écart du vecteur OP par rapport à Ox3, thêta c'est l'écart de OP par rapport à l'axe Ox3, et enfin, comme pour les coordonnées cylindriques, je considère la projection de P dans le plan Ox1x2, l'écart angulaire de OP' par rapport à l'axe Ox1 est donné par l'angle phi comme pour les coordonnées cylindriques. Maintenant mon point matériel est caractérisé par les coordonnées r, thêta, phi. r, thêta et phi.

Notes

Summary

2m 39s

Définition : coordonnées sphériques



$P\,(r, \theta, \phi)$

$$x_1 = \underline{r \sin\theta} \cos\phi$$
$$x_2 = \underline{r \sin\theta} \sin\phi$$
$$x_3 = r \cos\theta$$

Mécanique | 2013 18

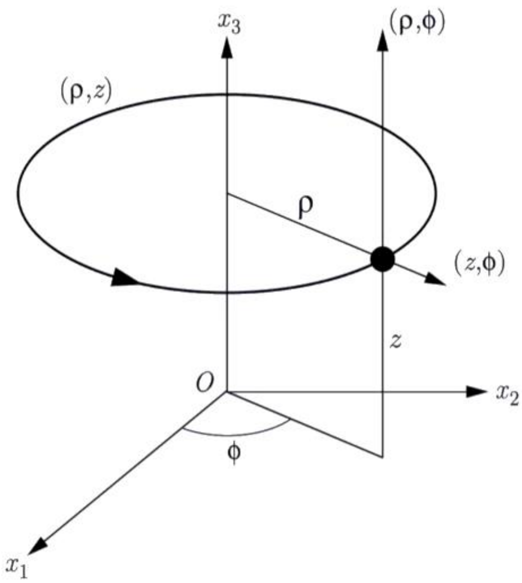
Encore une fois on peut chercher la correspondance entre les coordonnées cartésiennes du point P et les coordonnées sphériques du point P. Alors il faut voir la chose suivante : cette distance-là vaut, je peux faire un dessin auxiliaire comme ça, je fais la projection de P sur l'axe Ox3, ici j'ai un angle droit et donc j'ai cette distance qui vaut r cos thêta dans la direction x3, c'est ce que j'ai noté ici, ceci vaut r sin thêta qui est égal à la longueur de ce segment-là, et maintenant ce r sin thêta il faut le projeter sur x1 et sur x2, on aura donc un cos phi pour la projection sur x1, sin phi pour la projection sur x2, c'est ce que j'ai ici, j'ai donc mon r sin thêta avec la projection cos phi sur x1, sin phi sur x2.

Notes

Summary

4m 48s

Définition : lignes de coordonnées (c. cylindriques)



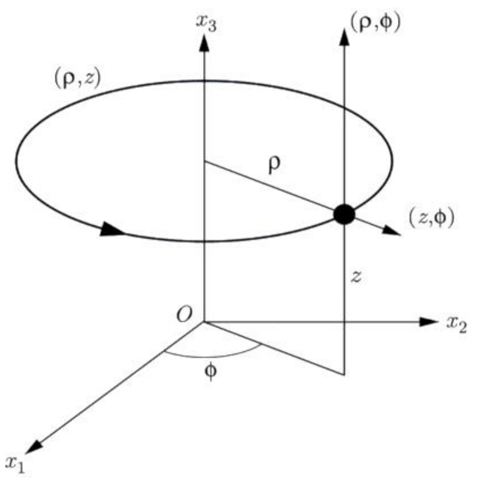
Pour définir les repères associés à ces systèmes de coordonnées je dois définir des lignes de coordonnées. Regardons d'abord le cas des coordonnées cylindriques. Alors sur ce dessin-là on a rhô qui est ici, phi là, z, la troisième coordonnée pour les coordonnées cylindriques. Maintenant si phi varie, mais rhô est constant et z est constant, z constant, on est dans un plan parallèle au plan Ox1x2, appelons ce plan horizontal par commodité de langage, donc on va être dans un plan horizontal à la hauteur z et on est à une distance rhô constante de l'axe x3, donc on est sur le cercle que j'ai dessiné ici, ce cercle-là s'appelle une ligne de coordonnées, c'est la ligne de coordonnées quand seul phi varie, je vais noter rhô, z pour indiquer les deux coordonnées qui demeurent constantes sur cette ligne. Maintenant, si je fais varier rhô, j'ai simplement le point matériel qui se déplace sur cette ligne, donc voilà une autre ligne de coordonnées, la ligne de coordonnées où z et phi sont constants. Finalement, j'ai la ligne de coordonnées où seul z varie et le point matériel se déplace sur cette verticale avec rhô et phi qui restent constants.

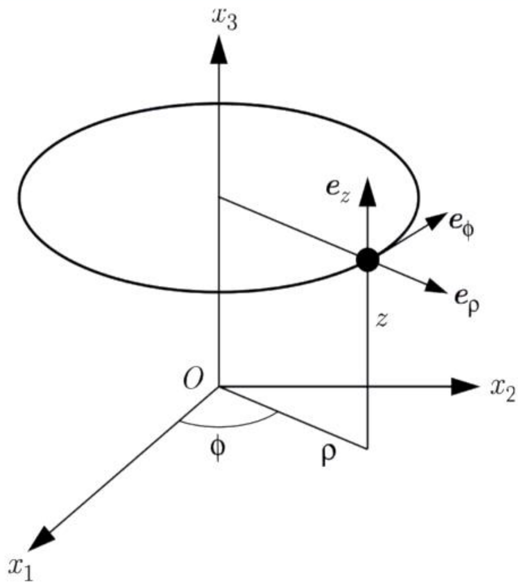
Notes

Summary

5m 58s

Définition : repère associé (c. cylindriques)





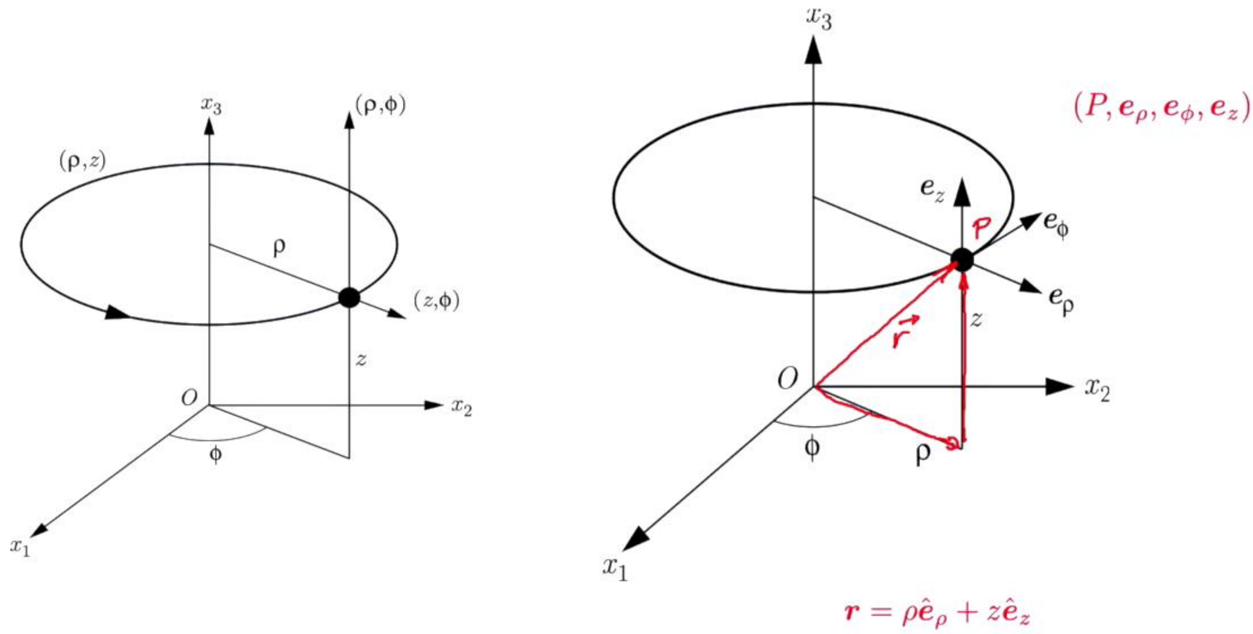
Maintenant je peux définir le repère associé aux coordonnées cylindriques. Je reprends mon dessin, ce dessin résume bien la situation, un référentiel matérialisé par Ox1x2x3, les coordonnées rhô, phi, z, voilà les lignes de coordonnées et maintenant je me propose de définir des vecteurs de longueur un, des vecteurs unité tangents aux lignes de coordonnées. Alors une ligne de coordonnées, la ligne de coordonnées rhô varie, tout simplement j'aurais un vecteur dans ce sens-là, que je vais appeler e rhô, le vecteur tangent à la ligne de coordonnées rhô seul varie, on a évidemment un vecteur e z quand seul z varie, et si phi varie, on veut un vecteur unité tangent à la ligne de coordonnées, donc il sera dans ce sens-là et je vais toujours convenir de prendre mes vecteurs dans la direction correspondante à la coordonnée croissante, rhô croissant dans ce sens, z croissant dans ce sens, phi croît dans ce sens, donc je définis un e phi comme ceci. Je fais un dessin au propre. Le voici avec e rhô, e phi, e z, j'ai convenu que les vecteurs avaient une longueur un, j'observe que e z est vertical, e rhô et e phi sont horizontaux, donc ils ont orthogonaux, e phi est tangent au cercle, donc e phi est perpendiculaire à ce rayon et par conséquent, e phi est perpendiculaire à e rhô.

Notes

Summary

7m 39s

Définition : repère associé (c. cylindriques)



Mécanique | 2013 28

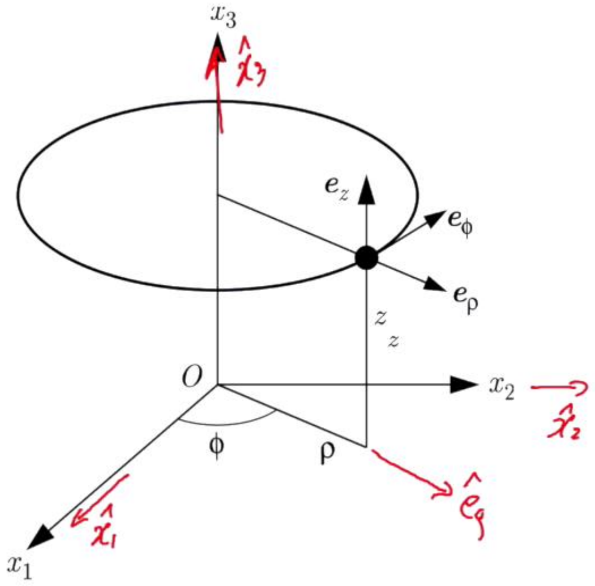
Donc on a trois vecteurs orthogonaux, normés, de plus, si maintenant je conviens d'appeler le repère associé au point P e rhô, e phi, e z, dans cet ordre, on a e rhô cos e phi, règle de la main droite, e rhô crosse e phi est dans la direction de e z, on a donc un repère orthonormé direct. Maintenant je vais noter le vecteur OP, ça c'est notre point P, voilà le vecteur OP que j'appelle vecteur r, je veux projeter le vecteur r sur mon repère e rhô, e phi, e z. J'observe que le vecteur r je peux le dessiner comme une somme de deux vecteurs, ce vecteur-là et ce vecteur-là, celui-ci vaut rhô dans la direction e rhô et celui-là vaut z dans la direction e z, c'est ce que j'ai écrit ici, le vecteur r a deux composantes, une composante selon e rhô, une composante selon e z.

Notes

Summary

9m 40s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$

Mécanique | 2013 29

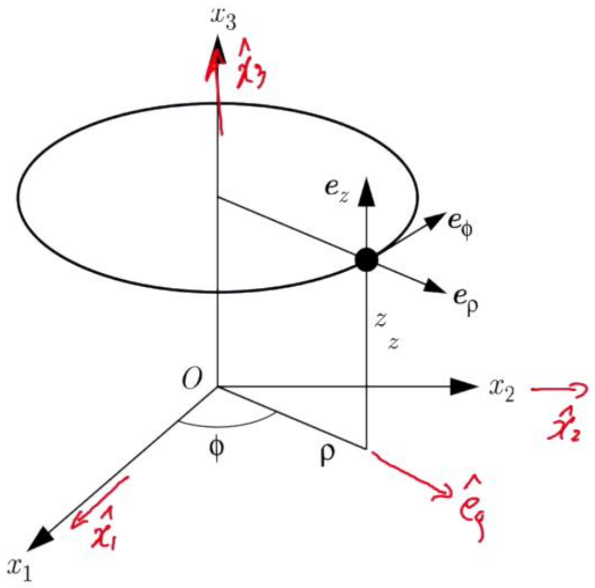
On peut maintenant s'intéresser à calculer on en aura besoin plus tard, on va calculer les projections de e rhô, e phi, e z sur les axes cartésiens x1, x2, x3, donc je suis entrain de présumer que j'ai défini des vecteurs x1 chapeau, x2 chapeau, un x3 chapeau que je retrouve ici, et maintenant je me propose de calculer la projection par exemple de e rhô. Je peux le dessiner encore une fois ici, e rhô, à ce moment-là on voit bien comment vont se construire les projections de e rhô, on aura un cos phi dans la direction x1 et un sin phi dans la direction x2, c'est ce que j'ai noté ici, cos phi, sin phi. e phi par inspection du dessin je vous le concède, c'est un petit peu difficile de voir quels sont les projections mais on se souvient que e phi doit être perpendiculaire à e rhô, le produit scalaire, donc cette composante fois celle-ci, plus celui-ci fois celle-là doit être nul. Donc on doit bien croiser les sinus et les cosinus et on doit introduire un signe moins. On observe que e phi pointe du côté opposé à x1, e phi est opposé à x1, donc je mets le moins sinus, je m'arrange toujours pour faire des dessins avec des angles aigus, ce qui me permet de voir les signes correctement par inspection des dessins.

Notes

Summary

11m 03s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$

Mécanique | 2013 29

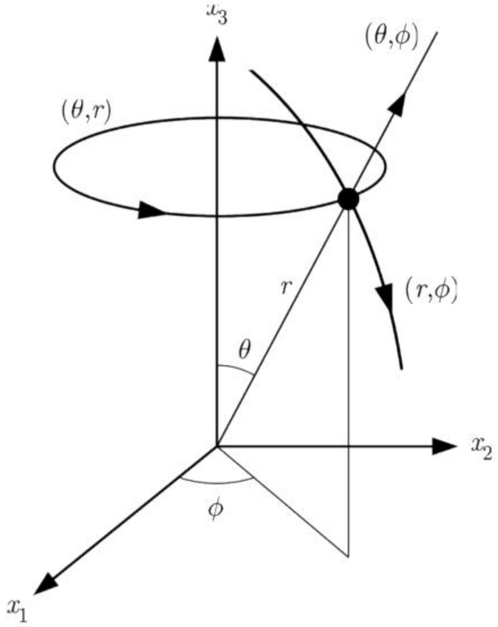
e z est simplement identique à x3. Maintenant je constate que e z est perpendiculaire aux deux autres vecteurs et que e rhô et e phi, donc par construction, sont perpendiculaires, donc j'ai tous ces résultats-là.

Notes

Summary

12m 52s

Définition : repère associé (c. sphériques)



Mécanique | 2013 35

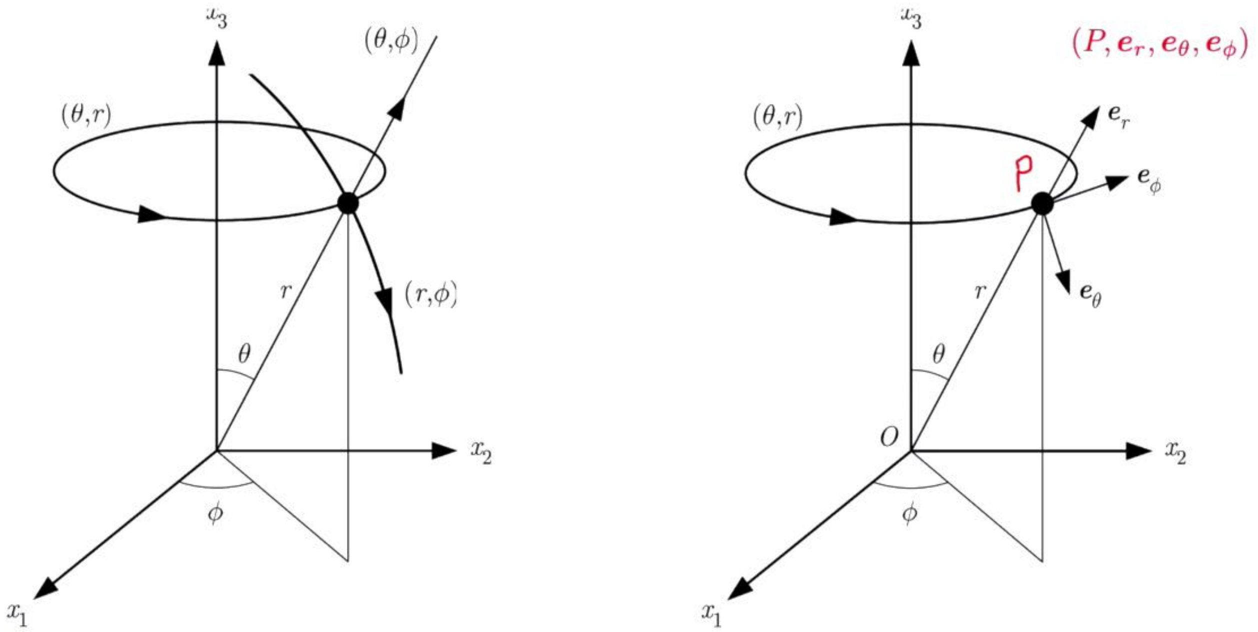
Je passe maintenant aux lignes de coordonnées pour les coordonnées sphériques. Voici un dessin qui résume la définition des coordonnées sphériques. r, thêta, phi. Si r seul varie, le point matériel se déplace sur cette droite, j'ai donc la ligne de coordonnées où thêta et phi sont constants. On voit d'ailleurs comment les deux angles thêta et phi définissent une direction de l'espace. Si thêta est constant et r est constant, thêta constant, le point matériel doit se déplacer sur un cône, à une distance fixe de r, on est sur un cercle, on est sur ce cercle. Voilà le cercle où thêta est constant et r est constant, il n'y a que phi qui varie. Enfin, je dois dessiner la ligne de coordonnées quand r est constant, phi est constant, mais thêta varie. Phi constant veut dire qu'on est dans le plan qui contient cette droite, celle-ci, celle-là et celle-là, on est dans ce plan, à une distance r constante de l'origine on décrit donc un cercle et ce cercle a à peu près cette allure-là, voilà le cercle de thêta seul varie. Je reprends ce dessin et maintenant je vais dessiner les vecteurs unité tangents aux lignes de coordonnées.

Notes

Summary

13m 08s

Définition : repère associé (c. sphériques)



Mécanique | 2013 38

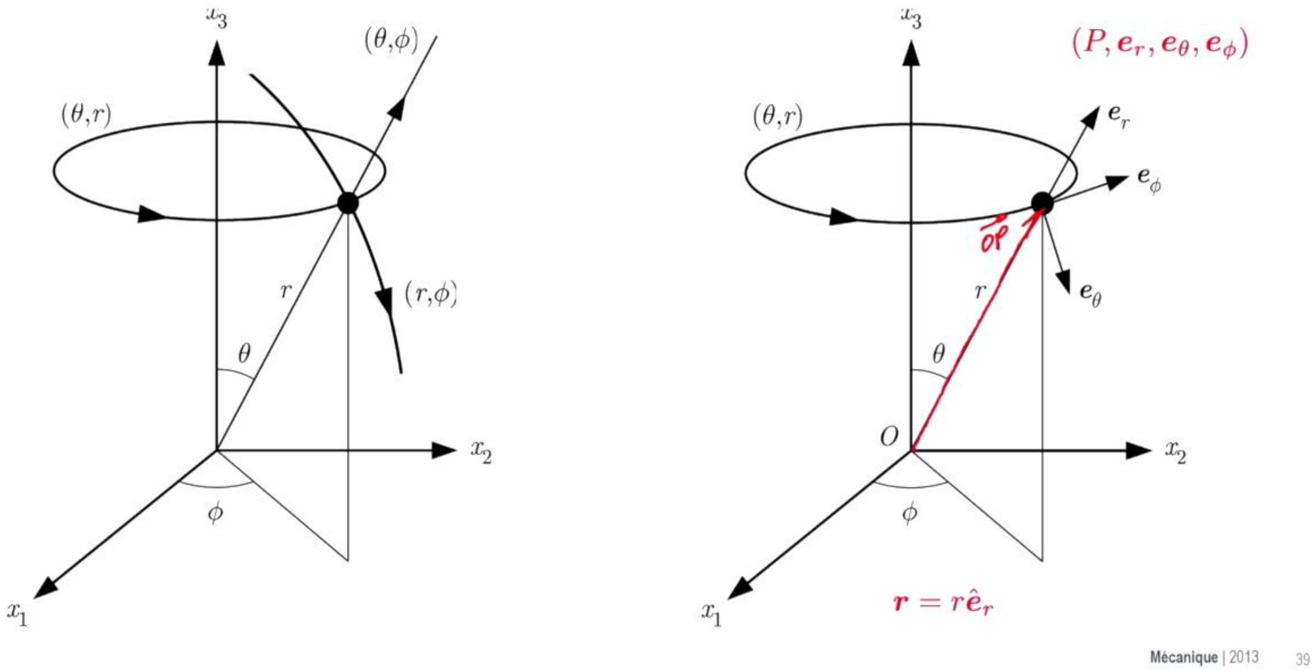
Le e r simplement est là, e thêta est tangent au cercle, voilà mon e thêta, et le e phi est tangent à l'autre cercle, plus difficile à voir comment il s'oriente, à peu près comme ça, voilà e phi. Je prends des vecteurs de norme un, voyons le dessin plus proprement, voilà e r, e thêta, e phi, j'ai, pour ne pas charger la figure, j'ai enlevé cet arc de cercle mais il faut se souvenir que le e thêta est tangent à un cercle dans le plan qui contient x3, le rayon vecteur et cette droite. Je peux définir mon repère lié au point P, c'est toujours ce point-là c'est le point P, le repère suit le point P, en P j'ai les vecteurs e r, e thêta, e phi pris dans cet ordre pour que e r crosse e thêta donne e phi, j'ai donc par la règle de la main droite, e r crosse e thêta va dans la direction de e phi, j'ai donc ici un repère direct, il faut encore être sûr de l'orthogonalité de tous les vecteurs. Alors, le vecteur e thêta étant tangent à ce cercle, il est orthogonal à ce rayon, donc e thêta est perpendiculaire à e r.

Notes

Summary

14m 47s

Définition : repère associé (c. sphériques)



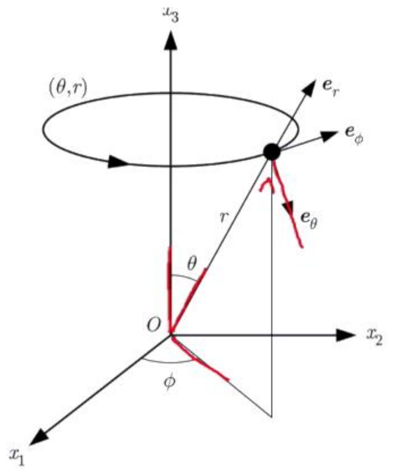
Maintenant e phi est tangent à un cercle, appelons encore une fois ce plan Ox1x2 l'horizontale, cette ellipse est horizontale, e phi est horizontal, mais e thêta et e r sont dans le plan qui contient x3, OP et cette verticale, c'est un plan vertical donc e r et e thêta sont dans un plan vertical, alors que e phi est dans un plan horizontal, ils sont donc orthogonaux. Voilà, on a l'orthogonalité de nos trois vecteurs. Je vais avoir besoin de la projection du vecteur r, donc il s'agit du vecteur OP comme d'habitude voilà mon vecteur que je pourrais appeler OP, que j'appelle pour simplifier r, r je vais le projeter sur mon repère et j'ai simplement une composante le long de e r. Donc là, il y a souvent des difficultés, les étudiants ont tendance à vouloir introduire d'autres termes, il n'y a que ce terme-là, la projection de r, r est en fait le long de e r donc on a simplement cette formule.

Notes

Summary

16m 36s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$

Mécanique | 2013 40

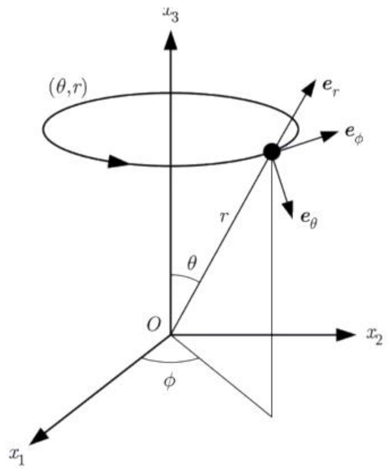
On peut s'amuser comme exercice à projeter e r, e thêta, e phi sur les axes cartésiens x1, x2, x3, alors allons-y, essayons de le faire. Je commence avec e r. Je dessine une ligne auxiliaire ici verticale parallèle à x3 et puis une ligne horizontale comme ceci. La composante de e r dans la verticale c'est ce terme-là qui vaut cos thêta parce que l'angle thêta je le retrouve ici, l'angle thêta il est là, donc j'ai un cos thêta dans la direction verticale, c'est ce que j'ai noté ici, dans l'horizontale j'ai cette longueur qui vaut sin thêta, ce sin thêta si vous voulez vous pouvez le dessinez ici dans le prolongement et vous devez le projeter sur x1 et sur x2, ce qui va vous donner un cos phi et un sin phi, c'est ce que j'ai noté ici, vous avez le cos phi et le sin phi pour le terme en sin thêta. Je vais maintenant regarder la projection de e thêta. Alors, pour e thêta, il faut essayer de s'y retrouver. Une façon de le faire c'est de réaliser que ce qui définit thêta c'est cet angle-là, or ce côté-là est perpendiculaire à celui-ci et ce côté de l'angle thêta est perpendiculaire à celui-là. Je vous rappelle que e thêta est tangent au cercle de coordonnées thêta seul varie et donc e thêta est perpendiculaire au rayon vecteur à un angle droit ici.

Notes

Summary

18m 00s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$

Je prolonge cette droite et donc, si ici j'ai thêta, là j'ai à nouveau l'angle thêta. Par conséquent, j'ai un cos thêta dans cette direction-là, si vous voulez je peux marquer la projection ici, cette longueur-là vaudra cos thêta et ce cos thêta je dois le projeter sur x1 et sur x2, ce qui va me donner un cos phi et un sin phi. Allons voir, j'ai en effet le cos thêta qui apparaît et j'ai cos phi et sin phi comme prévu. Dans la direction verticale, le e thêta a une projection qui va être en cosinus de l'angle complémentaire à thêta, donc sinus de thêta. Il y a un signe moins parce qu'on voit bien que thêta est dirigé dans le sens opposé de x3. Reste e phi. Pour e phi, il n'y a rien de nouveau par rapport à la projection du vecteur e phi qu'on avait calculé pour les coordonnées cylindriques, donc on a moins sin phi et cos phi. Ayant écrit les composantes de e r, e thêta et e phi sur x1, x2, x3, on a encore tout le loisir de vérifier ces orthogonalités, prenons par exemple e r et e thêta, j'ai ici un cos thêta sin thêta avec un signe moins, ici j'ai sin thêta cos thêta avec sin carré, ici j'ai sin thêta cos thêta avec cos carré, cos carré plus sin carré fait un, il me reste plus sin thêta cos thêta, ici j'ai moins sin thêta cos thêta, donc j'ai mon zéro. Vous pouvez aussi vérifier les deux autres produits scalaires, vous allez obtenir encore une fois le zéro.

Notes

Summary

20m 02s