Coordonnées cylindriques et sphériques

Mécanique, cours 7.1

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-7

Video

Coordonnées cylindriques et sphériques

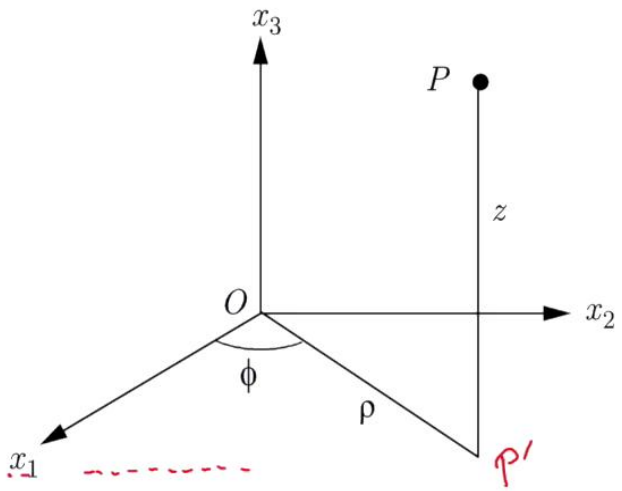
Guten Tag, willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion werde ich die zylindrischen und sphärischen Koordinaten einführen. Bis anhin haben wir nur Probleme betrachtet, welche wir mit kartesischen Koordinaten lösen konnten. Da man in der Mechanik häufig einzelne Symmetrien vorfindet, ist es wichtig, ein zu diesen Symmetrien adäquates Koordinatensystem zu verwenden. Aus diesem Grund werden wir die zylindrischen und sphärischen Koordinaten betrachten. Für diese beiden Koordinatensysteme werde ich ihnen je ein zugehöriges System von Koordinatenachsen definieren.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : coordonnées cylindriques



$$P(\rho, \phi, z)$$

$$x_1 = \rho \cos \phi$$
$$x_2 = \rho \sin \phi$$
$$x_3 = z$$

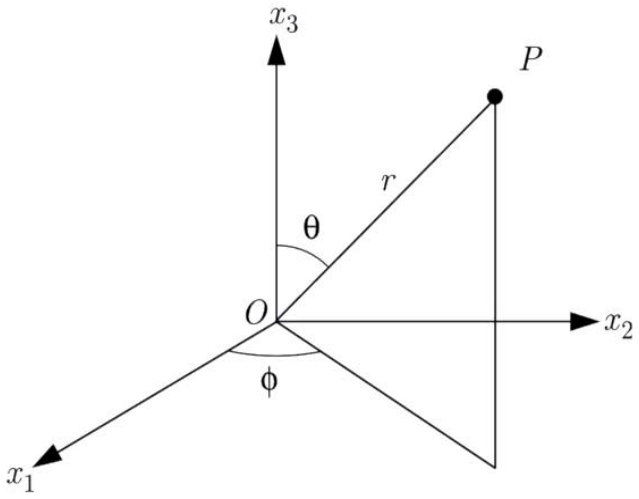
Ich beginne mit den zylindrischen Koordinaten. Ich nehme an, dass mein Bezugssystem durch ein System von kartesischen Achsen O,x1,x2,x3, realisiert ist. Ich möchte die Position meines Massepunkts beschreiben. Bis jetzt haben wir die Position eines Massepunkts durch seine kartesischen Koordinaten beschrieben. Dieses mal schlage ich jedoch vor, die zylindrischen Koordinaten zu verwenden, welche folgendermassen definiert sind: Zuerst werde ich die Projektion P' des Massepunkts P in die Ebene Ox1x2 betrachten. Diese Höhe oberhalb der Ebene werde ich z nennen. z ist äquivalent mit x3, jedoch werde ich die Notation z verwenden, um zu signalisieren, dass wir zylindrische Koordinaten verwenden. Daraufhin werde ich p verwenden, die Distanz P zur Achse Ox3. Also dies ist diese Länge hier. Zuletzt werde ich den Winkel zwischen der Achse Ox1 und der Projektion von P auf die Ebene Ox1x2 verwenden. Jetzt ist also die Position meines Massepunkts durch rho, phi und z definiert. Logischerweise können wir versuchen, die Verbindung zwischen den kartesischen und den zylindrischen Koordinaten zu beschreiben. Also, wenn wir die Zeichnung betrachten, sehen wir, dass die Koordinate x1 durch die Projektion des Punktes P', welche ungefähr hier sein wird, gegeben sein wird.

Notes

Summary

0m 48s

Définition : coordonnées sphériques



$$P\,(r, \theta, \phi)$$

$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi$$
$$x_2 = r \sin\theta \sin\phi$$
$$x_3 = r \cos\theta$$

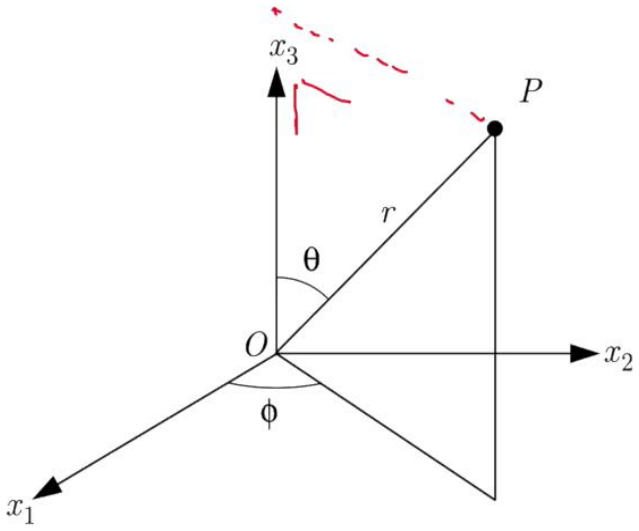
Hier habe ich einen rechten Winkel und dadurch ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel hier. Diese Länge hier, die Koordinate x1, ist rho mal cos von phi. Was ich so geschrieben habe. Die Koordinate x2 ist diese Distanz hier. Dies ist rho mal sin von phi. z ist gleich x3. Ich wechsle nun zu der Definition der sphärischen Koordinaten. Noch einmal, ich betrachte ein an das Bezugssystem gebundenes kartesisches Achsensystem und ich möchte die Position des Massepunkts P charakterisieren. Jetzt mache ich dies folgendermassen: Es ist in der Logik der sphärischen Koordinaten. Ich definiere die Distanz von P zum Ursprung r und ich definiere den Winkel theta, der Winkel zwischen dem Vektor OP und der Achse Ox3. Theta ist der Winkel zwischen OP und der Achse Ox3. Zum Schluss werde ich wie bei den zylindrischen Koordinaten die Projektion von P auf die Ebene Ox1x2 betrachten. Wie für die zylindrischen Koordinaten werde ich phi als den Winkel zwischen OP' und der Achse Ox1 definieren. Nun ist meine Massepunkt durch die Koordinaten r, theta und phi definiert. Wie zuvor suchen wir nun die Verbindung zwischen den kartesischen Koordinaten des Punktes P und den sphärischen Koordinaten des Punkts P.

Notes

Summary

2m 56s

Définition : coordonnées sphériques



$$P\,(r, \theta, \phi)$$

$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi$$
$$x_2 = r \sin\theta \sin\phi$$
$$x_3 = r \cos\theta$$

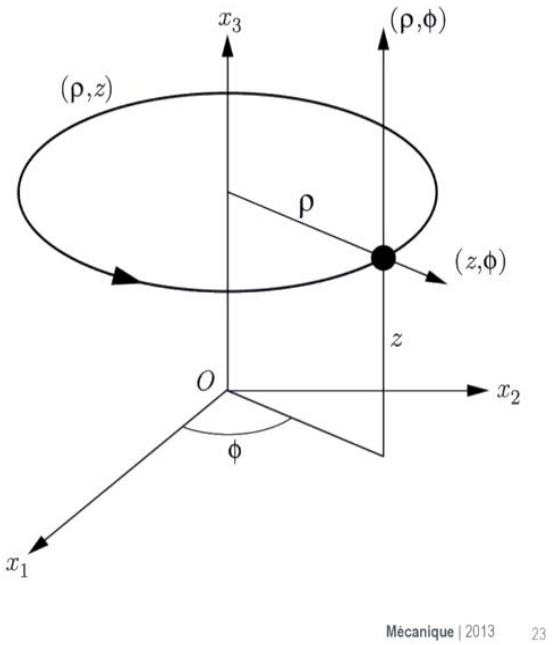
Also, man muss das Folgende sehen: Diese Distanz hier ist Ich kann eine zusätzliche Zeichnung machen. Ich mache die Projektion von P auf die Achse Ox3. Hier habe ich einen rechten Winkel und dadurch kenne ich dieses Distanz, welche r mal cos von theta und x3 entspricht. Dies habe ich hier aufgeschrieben. Dies hier entspricht r mal sin von theta und entspricht dieser Länge hier. Nun müssen wir r mal sin von theta auf die Achsen x1 und x2 projizieren. Für die Projektion auf x1 haben wir also sin von phi und für die Projektion auf x2 haben wir sin von phi, was ich hier notiert habe. Ich habe also mein r mal sin von theta mit der Projektion cos von phi auf x1 und der Projektion sin von phi auf x2.

Notes

Summary

4m 59s

Définition : lignes de coordonnées (c. cylindriques)



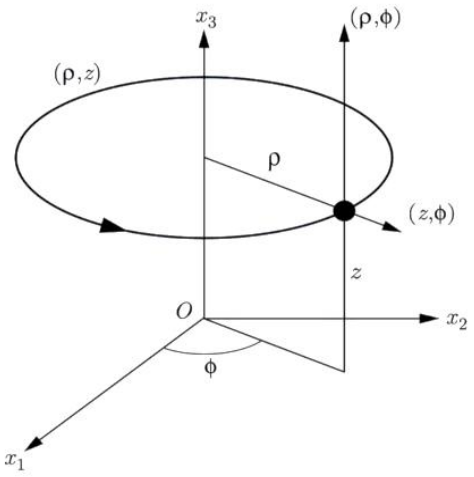
Um die zugehörigen Achsensysteme zu diesen Koordinatensystemen zu definieren, muss ich Koordinatenlinien definieren. Betrachten wir als Erstes den Fall der zylindrischen Koordinaten. Also auf dieser Zeichnung hier haben wir rho, welches hier ist, phi dort und und die dritte Koordinate für die zylindrischen Koordinaten z. Nun, wenn Phi variiert, jedoch rho und z konstant sind, befinden wir uns in einer zur Ebene Ox1x2 parallelen Ebene. Nennen wir diese die horizontale Ebene, wie es im Sprachgebrauch üblich ist. Also befinden wir uns in einer Ebene mit der Höhe z und konstanter Distanz rho zur Achse x3. Also befinden wir uns auf einem Kreis, welcher ich hier gezeichnete habe. Diesen Kreis nennet man Koordinatenlinie. Dies ist die Koordinatenlinie, wenn ausschliesslich phi variiert. Ich werde rho und z hinschreiben, um zu unterstreichen, dass die beiden Koordinaten auf diesem Kreis konstant sind. Nun, wenn ich rho variieren lasse, bewegt sich der Massepunkt auf dieser Linie fort. Also eine andere Koordinatenlinie, auf welcher z und phi konstant sind. Zum Schluss habe ich die Koordinatenlinie, auf welcher ausschliesslich z variiert. Also bewegt sich der Massepunkt auf dieser Vertiakeln, auf welcher rho und phi konstant sind.

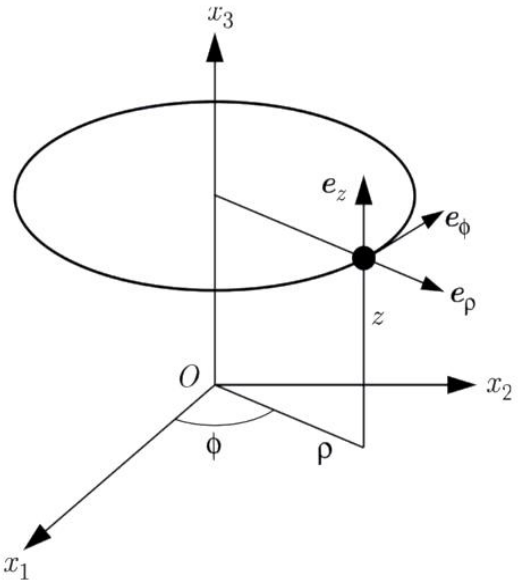
Notes

Summary

5m 58s

Définition : repère associé (c. cylindriques)





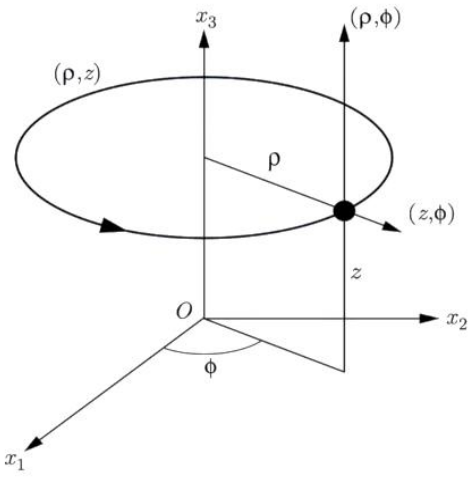
Nun kann ich mein zu den zylindrischen Koordinaten zugehöriges Achsensystem definieren. Ich betrachte noch einmal meine Zeichnung, welche die Situation gut zusammenfasst. Ein Bezugssystem realisiert durch Ox1x2x3 und die Koordinaten rho, phi und z. Hier die Koordinatenlinien und nun schlage ich vor Vektoren mit der Länge eins zu definieren, respektive zu den Koordinatenlinien tangente Einheitsvektoren. Also betrachten wir die Koordinatenlinie, auf welcher rho variiert. Ich erhalte einen Vektor in diese Richtung, welchen ich e rho nenne werde, der zu der Koordinatenlinie, auf welcher nur rho variiert, tangente Vektor. Logischerweise haben wir einen Vektor e z, wenn nur z variiert. Wenn phi variiert, möchten wir einen zu der Koordinatenlinie tangentialen Einheitsvektor. Also ist dieser in dieser Richtung hier. Per Definition werde ich meine Vektoren immer in der anwachsenden Richtung der Koordinate wählen; rho anwachsend in dieser Richtung, z anwachsend in dieser Richtung und phi wächst in dieser Richtung an. Also definiere ich so ein e phi. Ich mache eine bessere Zeichnung. Hier e rho, e phi und e z. Ich habe definiert, dass alle Vektoren der Länge eins sind.

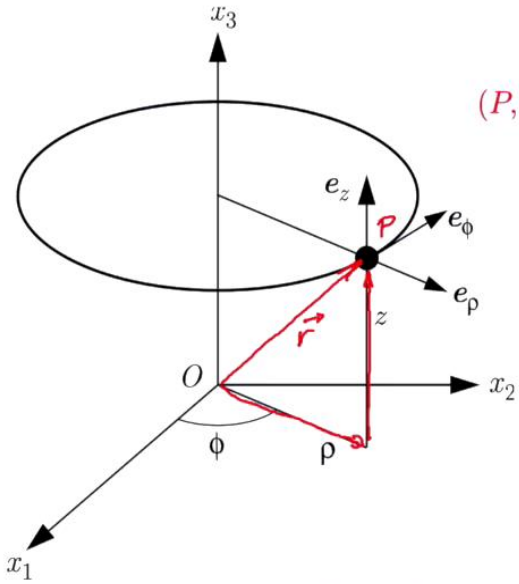
Notes

Summary

7m 39s

Définition : repère associé (c. cylindriques)





$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Mécanique | 2013 28

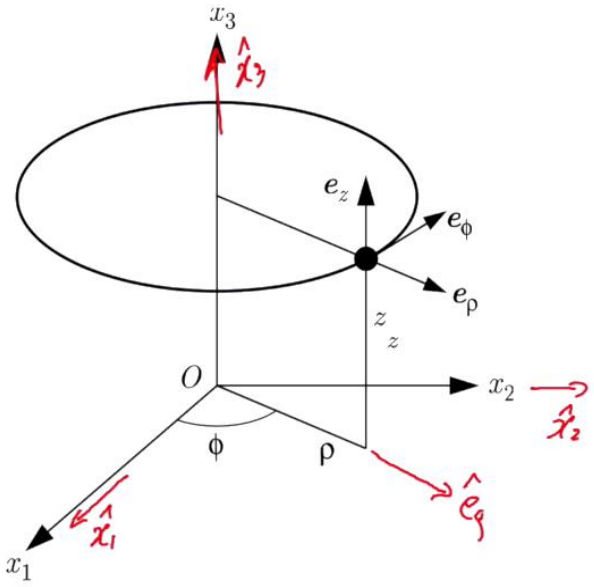
Ich erkenne, dass e z vertikal und e rho und e phi horizontal sind. Also sind sie orthogonal. e phi ist tangential zum Kreis. Also ist ephi senkrecht zu diesem Radius und dadurch ist e phi senkrecht zu e rho. Also haben wir drei orthogonale und normierte Vektoren. Des Weiteren, wenn ich nun das Koordinatensystems für den Punkt P in der Reihenfolge e rho, e phi und e z benenne, ist das Kreuzprodukt von e rho und e phi durch die Rechte-Hand-Regel in der Richtung e z. Wir haben also ein orthonormiertes direktes Koordinatensystem. Nun werde ich den Vektor OP beschreiben. Dies ist unser Punkt P. Hier der Vektor OP, welchen ich r nenne. Ich möchte r auf mein Achsensystem e rho, e phi und e z projizieren. Ich stelle fast, dass ich den Vektor r als eine Summe von zwei Vektoren darstellen. Dieser hier und dieser Vektor hier. Dieser Vektor hier ist rho in der Richtung e rho und dieser hier entspricht z in der Richtung e z, was ich hier notiert habe. Der Vektor r besitzt zwei Komponenten: Eine Komponente e rho und eine Komponente e z.

Notes

Summary

9m 21s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{e}_\rho = \cos\phi\,\hat{x}_1 + \sin\phi\,\hat{x}_2$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{x}_1 + \cos\phi\,\hat{x}_2$$

$$\hat{e}_z = \hat{x}_3$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = 0$$
$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = 0$$
$$\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z = 0$$

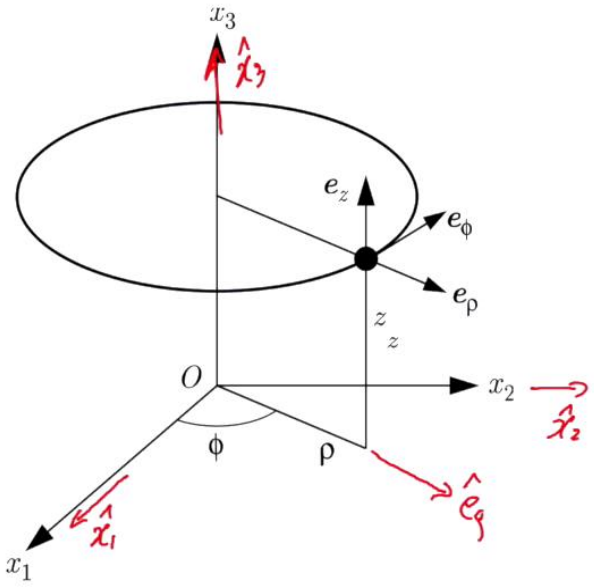
Wir werden nun die Projektionen von e rho, e phi und e z auf die kartesischen Achsen x1, x2 und x3 berechnen, welche wir später noch benötigen werden. Ich nehme an, dass ich bereits die Vektotren x1-Dach, x2-Dach und x3-Dach definiert habe, welche ich hier wiederfinde. Ich schlage nun vor, die Projektion von e rho zu berechnen. Ich kann e rho noch einmal zeichnen. Dadurch sieht man wie sich der Vektor e rho aus den verschiedenen Projektionen zusammensetzt. Wir haben einen cos phi in der Richtung x1 und einen sin phi in der Richtung x2. Dies habe ich hier notiert, cos phi, sin phi. Ich gebe zu, dass die Projektionen von e phi anhand der Zeichnung schwierig zu erkennen sind. Wir erinnern uns jedoch, dass die beiden Einheitsvektoren e phi und e rho senkrecht zueinander sind. Deswegen muss das Skalarprodukt, diese Komponente mal diese plus diese Komponente mal diese hier, null sein. Deswegen müssen wir den Sinus und Kosinus austauschen und gleichzeitig ein negatives Vorzeichen einführen. Wir stellen fest, dass phi in die entgegen- gesetzte Richtung von x1 zeigt. Also setzte ich den minus Sinus. Ich achte immer darauf, die Winkel auf der Zeichnung ausreichend gross darzustellen, damit ich die Vorzeichen korrekt bestimmen kann.

Notes

Summary

11m 03s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$$

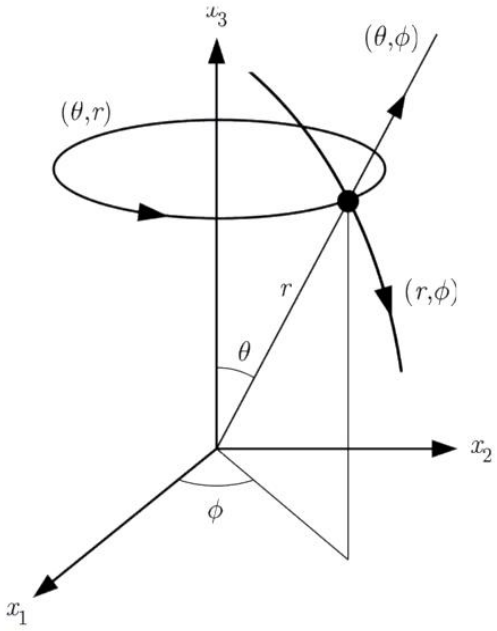
e z ist logischerweise gleichwertig wie x3. Nun stelle ich fest, dass e z senkrecht zu den beiden anderen Vektoren ist und dass e rho und e phi per Konstruktion orthogonal sind. Also habe ich all diese Resultate hier.

Notes

Summary

12m 52s

Définition : repère associé (c. sphériques)



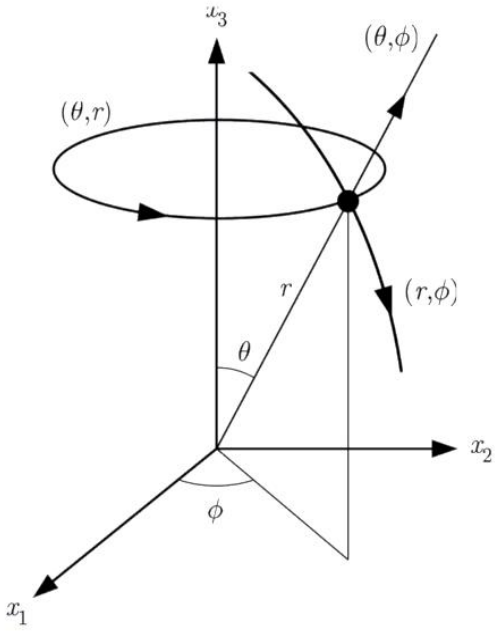
Ich wechsle nun zu den Koordinatenlinien der sphärischen Koordinaten. Hier ist eine Zeichnung, welche die Definition der sphärischen Koordinaten, r, theta, phi, zusammenfasst. Wenn ausschliesslich r variiert, bewegt sich der Massepunkt auf dieser Geraden. Ich habe also die Koordinatenlinie, auf welcher phi und theta konstant sind. Wir sehen, wie die beiden Winkel theta und phi eine Richtung im Raum definieren. Wenn theta konstant ist bewegt sich der der Massepunkt auf einem Kegel. Wenn zusätzlich die Distanz r fixiert wird, befinden wir uns auf einem Kreis. Wir sind auf diesem Kreis. Dies ist der Kreis, auf welchem r und theta konstant sind. Ausschliesslich phi kann variieren. Zum Schluss muss ich die Koordinatenlinie zeichnen, wenn r und phi konstant sind, jedoch theta variieren kann. Phi konstant will heissen, dass wir in der Ebene sind, welche diese Gerade, diese hier diese hier und diese da enthält. Wir sind in dieser Ebene. Wenn nun die Distanz r zum Ursprung fixiert wird, befinden wir uns auf einem Kreis. Dieser Kreis hat ungefähr diese Form hier. Voilà der Kreis, auf welchem nur theta variiert. Ich nehme noch einmal diese Zeichnung und werde die zu den Koordinatenlinien tangentialen Einheitsvektoren zeichnen.

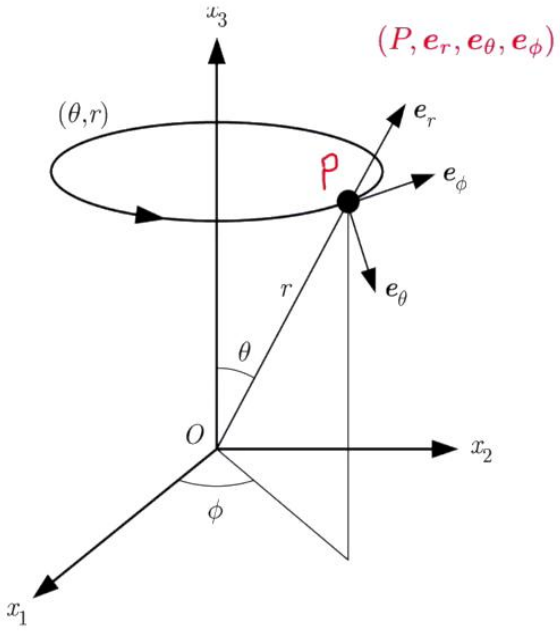
Notes

Summary

13m 08s

Définition : repère associé (c. sphériques)





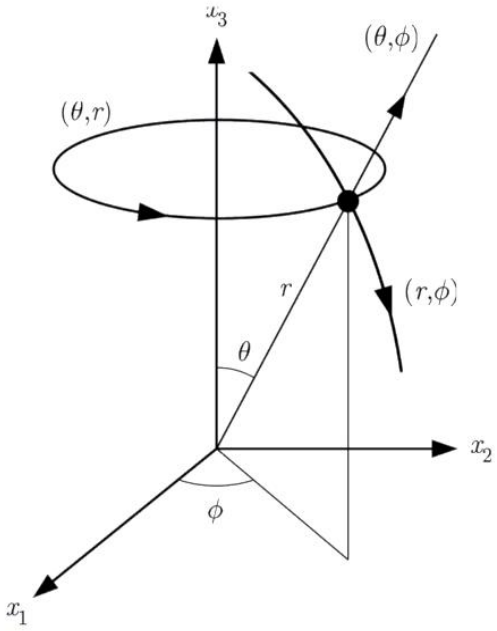
Der Vektor e r ist hier, e theta ist tangential zum Kreis. Voilà mein e theta. e phi ist tangential zum anderen Kreis. Es ist schwieriger zu sehen, wie sich dieser orientiert. Ungefähr so. Voilà e phi. Ich nehme Vektoren mit der Norm eins. Dadurch wird die Zeichnung sauberer. Hier sind e r, e theta und e phi. Um die Zeichnung nicht zu überfüllen, habe ich diesen Bogen weggenommen. Jedoch muss man sich daran erinnern, dass e theta tangential zu einem Kreis ist, welcher x3, den Radiusvektor und diese Gerade enthält. Ich kann mein im Punkt P fixiertes Koordinaten- system definieren. Es ist immer dieser Punkt hier. Dies ist der Punkt P. Das Koordinatensystem folgt dem Punkt P. Im Punkt P habe ich die Vektoren e r, e theta und e phi. Diese sind in jener Reihenfolge, damit das Kreuzprodukt von e r und e theta e phi ergibt. Durch die Rechte-Hand-Regel ist das Kreuzprodukt von e r und e theta in der Richtung von e phi. Ich habe also ein direktes Koordinatensystem. Wir müssen uns noch der Orthogonalität der Vektoren vergewissern. Der Vektor e theta ist tangetial zu diesem Kreis und ist orthogonal zu diesem Radius. Also ist e theta senkrecht zu e r.

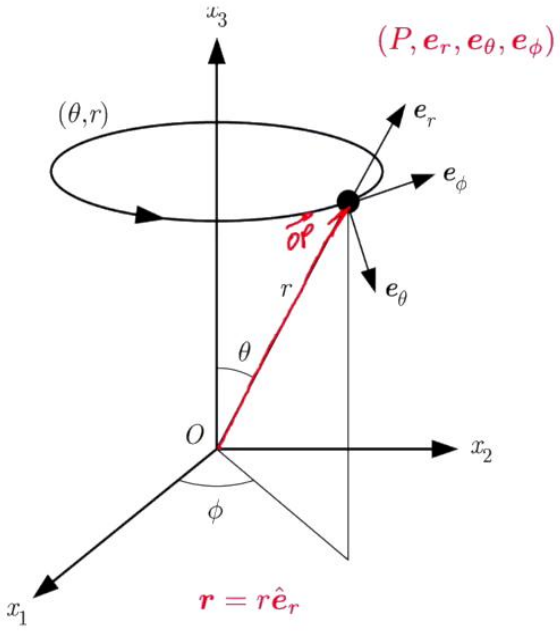
Notes

Summary

14m 47s

Définition : repère associé (c. sphériques)





Mécanique | 2013 39

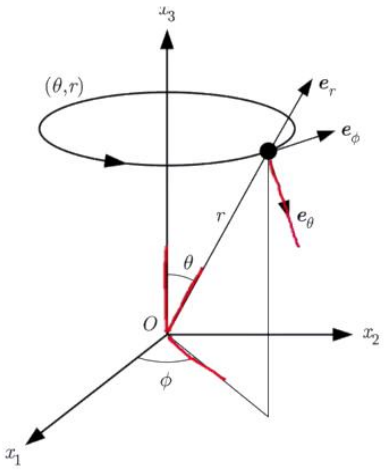
Nun e phi ist tangential zu einem Kreis. Nennen wir diese Ebene Ox1x2 noch einmal die Horizontale. Diese Ellipse ist horizontal. e phi ist horizontal. Jedoch e theta und e r sind in der Ebene, welche x3 x3, OP und diese Vertikale beinhaltet. Also sind e r und e theta in einer vertikalen Ebene, wobei e phi in einer horizontalen Ebene ist. Also sind diese Vektoren orthogonal. Voilà, wir haben die Orthogonalität der drei Vektoren. Ich werde die Projektion des Vektors r benötigen. Es handelt sich also um den Vektor OP. Wie normalerweise mein Vektor, welcher ich OP nennen könnte aber, um zu vereinfachen, r nenne. r werde ich auf mein Koordinatensystem projizieren. Ich habe nur eine Komponente in der Richtung e r. Hier ergeben sich häufig Schwierigkeiten. Die Studenten besitzen die Tendenz noch andere Terme hinzuzufügen. Es existiert nur dieser Term hier. Die Projektion von r ist in der Richtung von e r. Also haben wir schlicht diese Formel.

Notes

Summary

16m 36s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$

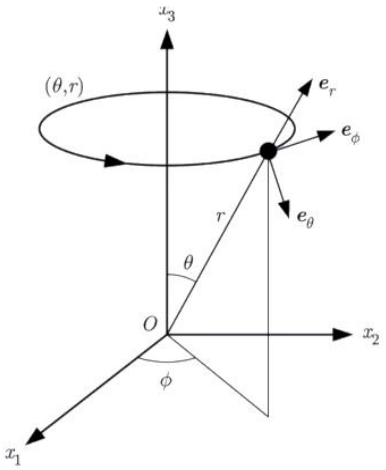
Als Übung können wir uns mit dem Projizieren von e r, e theta und e phi auf die kartesischen Achsen x1, x2 und x3 amüsieren. Also probieren wir dies. Ich beginne mit e r. Ich zeichne eine zusätzliche vertikale Linie hier parallel zu x3 und eine horizontale Linie, wie hier. Die Komponente e r in der Vertikalen ist dieser Term, welcher cos theta entspricht, da der Winkel theta sich hier befindet. Der Winkel Thete ist hier. Also habe ich einen cos theta in der vertikalen Richtung, was ich hier notiert habe. In der Horizontalen habe ich diese Distanz, welche sin theta entspricht. Der sin theta könnt ihr auch, wenn ihr möchtet, hier in der Verlängerung zeichnen. Diesen müsst ihr auf die Achsen x1 und x2 projizieren, was euch einen cos phi und einen sin phi geben wird, was ich hier aufgeschrieben habe. Ihr habt den cos phi und den sin phi für den Term sin theta. Ich werde nun die Projektion von e theta betrachten. Also für e theta müssen wir die Projektionen wiederfinden. Eine Art und Weise, dies zu machen, ist es zu realisieren, was den Winkel theta definiert. Dies ist der Winkel hier. Diese Seite hier ist senkrecht zu dieser. Diese Seite des Winkel theta ist senkrecht zu dieser hier.

Notes

Summary

18m 00s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$

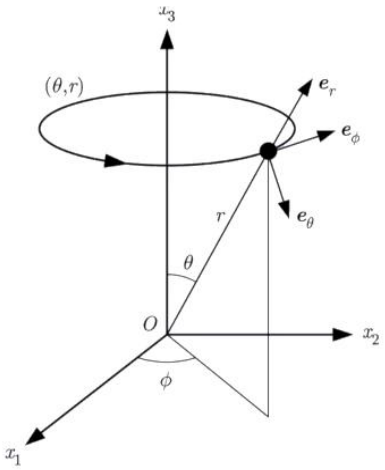
Ich erinnere euch daran, dass theta tangential zum Kreis, auf welchem nur theta variiert, ist. Also ist e theta senkrecht zum Radiusvektor mit einem rechten Winkel hier. Ich verlängere diese Gerade hier und wenn sich hier theta befindet, habe ich hier ebenfalls den Winkel theta. Also haben wir ein cos theta in dieser Richtung. Wenn ihr möchtet, kann ich hier die Projektion markieren. Diese Distanz hier entspricht cos theta. Diesen cos theta muss ich auf x1 und x2 projizieren, was mir einen cos phi und einen sin phi geben wird. Seht, ich habe einen cos theta, welcher auftaucht und ich habe einen cos phi und sin phi, wie vorgesehen. In der vertikalen Richtung besitzt e theta eine Projektion, welche ein Kosinus mit dem Komplementär- winkel von theta sein wird, respektive eins sinus theta. Es hat ein Minuszeichen, weil theta in die entgegengesetzte Richtung von x3 gerichtet ist. Es bleibt e phi übrig. Für e phi gibt es nicht Neues im Vergleich zur Projektion von e phi, welche wir bereits für die zylindrischen Koordinaten bestimmt haben. Also haben wir ein minus sin phi und cos phi. Wir haben jetzt alle Komponenten x1, x2 und x3 von er, e theta und e phi bestimmt.

Notes

Summary

19m 48s

Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère



$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$$

Nun müssen wir noch die Orthogonalität dieser Vektoren verifizieren. Nehmen wir zum Beispiel e r und e theta. Ich habe hier ein cos theta sin theta mit einem negativen Vorzeichen. Hier habe ich ein sin theta cos theta mit einem Sinus im Quadrat. Hier habe ich sin theta cos theta mit einem Kosinus im Quadrat. Nun, Kosinus im Quadrat plus Sinus im Quadrat ergibt eins. Es bleibt nur noch sin theta cos theta übrig. Hier habe ich ein minus sin theta cos theta. Also habe ich meine ersehnte null. Ihr könnt auch die zwei anderen Skalarprodukte verifizieren. Ihr werdet ebenfalls null erhalten.

Notes

Summary

21m 39s