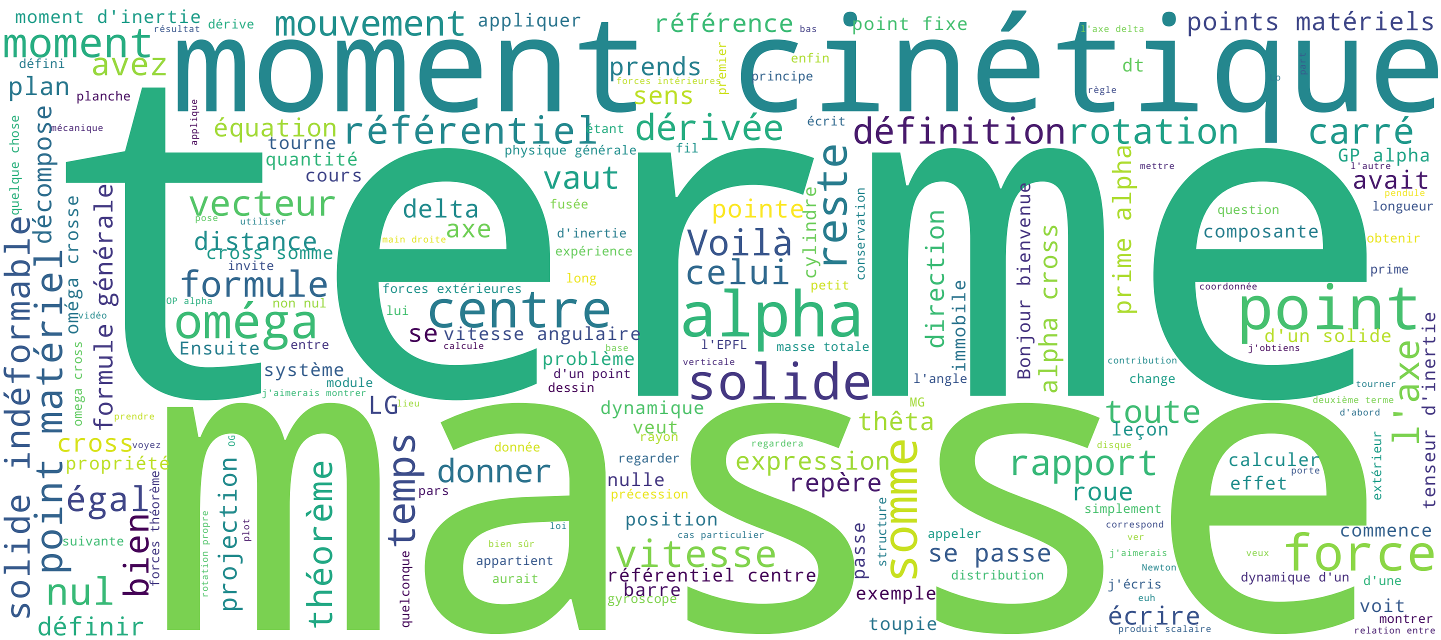
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-19

Point de référence du moment cinétique

Mécanique, cours 19.2

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, je pose les bases de la dynamique du solide indéformable. On a vu qu'une des lois invoquait le moment cinétique et qu'on pouvait travailler avec le moment cinétique défini en o, où o appartient au référentiel, ou en g, avec g le centre de masse. Maintenant, j'aimerais montrer plus précisément qu'est-ce qu'il se passe quand on change le point de référence pour le moment cinétique. Dans un premier temps, je vais rappeler la formule qu'on a obtenue pour le moment cinétique en g en fonction du moment cinétique en o. Ensuite, on va regarder qu'est-ce qu'il se passe si on prend un point a quelconque comme point de référence pour le moment cinétique. On va obtenir une expression du théorème du moment cinétique avec a comme point de référence et enfin on regardera comment traîter la dynamique d'un solide indéformable avec un point fixe, que je vais appeler c. Je commence avec la relation entre, du moment cinétique en o et en g.

Notes

Summary

0m 04s

Propriété : moment cinétique en O ou en G

$$\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$$

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha \{m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge (\boldsymbol{V}_G + (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha))\}$$

$$\boldsymbol{L}_O = M\boldsymbol{OG} \wedge \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G$$

Mécanique | 2013 9

Voilà la définition du moment cinétique en g et celle en o. Et vous vous souvenez que si j'écris que o, p, alpha, c'est o, g plus g, p, alpha. J'ai des termes qui interviennent, qui se trouvent être nuls quand je prends ce terme-là avec celui-là, j'ai un 0. Quand je prends ce terme-là avec celui-là, j'ai 0. Ce qu'il me reste, c'est masse totale fois o, g cross v, g. Et puis l'autre terme, qui contient g, p, alpha cross omega cross g, p, alpha, c'est justement l, g. Je résume, voilà la formule qui lie le moment cinétique en o et le moment cinétique en g. Il y a quelque chose d'intéressant dans cette formule, c'est que si on met toute la masse du solide en son centre de masse, le moment cinétique aura ce terme-là. Et on voit que cette distribution de masse donne lieu à un terme supplémentaire, qui correspond à la rotation du solide autour de son centre de masse. Donc il y a une contribution, ici, qui est due à la distribution de masse.

Notes

Summary

1m 15s

Propriété : moment cinétique en A

Soit A un point quelconque :

$$\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{GP}_\alpha = 0 \qquad \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha = 0$$

$$\boldsymbol{L}_A = \sum_\alpha \{\boldsymbol{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha\} \qquad \boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$$

$$= \sum_\alpha \{(\boldsymbol{AG} + \boldsymbol{GP}_\alpha) \wedge m_\alpha (\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{v}'_\alpha)\}$$

$$= \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha\} = \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G$$

Qu'est-ce qu'il advient si on essaie d'exprimer le théorème du moment cinétique en prenant comme point de référence un point a, qui n'est ni un point du référentiel, ni le centre de masse? Regardons ce qu'il se passe. Si vous prenez a quelconque, vous appliquez, alors, on décompose le solide en points matériels, on applique la définition du moment cinétique d'un point matériel et on somme sur les points matériels. Et le a, p, alpha, je décompose en a, g et g, p, alpha, le v de alpha, je le décompose en deux termes aussi : la vitesse du centre de masse et la vitesse mesurée dans le référentiel centre de masse. Il y a plusieurs termes et encore une fois il y a des termes qui s'annulent parce qu'on a ces propriétés-là du référentiel centre de masse. En effet, quand on prend a, g avec ce terme-là, on a somme des m, alpha, v prime alpha, c'est nul. Et quand on prend ce terme avec celui-là, on a aussi 0. Les seuls termes non-nuls sont ceux-ci : le a, g cross m, v, g, ici et le g, p, alpha cross m, alpha, v prime alpha, c'est ce terme-là. Vu que pour le solide indéformable, ça, c'est v prime alpha. Et bien, on a simplement cette expression-là pour la l, a. On a le l, g, qui vient d'ici, et ce terme a, g cross m, v, g, qui est donc le moment cinétique qu'on aurait si on avait un point matériel en g avec toute la masse dessus.

Notes

Summary

2m 35s

Propriété : moment cinétique en A

Soit A un point quelconque : $\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{GP}_\alpha = 0 \qquad \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha = 0$

$$\boldsymbol{L}_A = \sum_\alpha \{\boldsymbol{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha\} \qquad \boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$$

$$= \sum_\alpha \{(\boldsymbol{AG} + \boldsymbol{GP}_\alpha) \wedge m_\alpha (\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{v}'_\alpha)\}$$

$$= \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha\} = \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_A}{dt} = (\boldsymbol{V}_G - \boldsymbol{V}_A) \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{AG} \wedge M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} + \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = -\boldsymbol{V}_A \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{M}_A^{ext}$$

$$\boldsymbol{AG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} + \sum_\alpha \boldsymbol{GP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} = \sum_\alpha \boldsymbol{AP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_A}{dt} = -\boldsymbol{V}_A \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{M}_A^{ext}$$

Mécanique | 2013 21

Si on dérive par rapport au temps, la dérivée par rapport au temps de a, g va nous donner deux termes. je peux écrire a, g comme a, o plus o, g. La dérivée de o, g va donner v, g, la dérivée de a, o va nous donner moins v de a. Si je porte, fais porter la dérivée sur le deuxième terme, j'ai ce terme-là. Et là j'ai encore d de l, g sur d, t. Ce terme, v, g cross v, g donne 0, donc il me reste ces deux termes-là, oh, il me reste ce terme-là, celui-là et maintenant, je prétends que tout ça, c'est égal à ça. Comment je le fais? Ben, ce terme-là, je l'écris comme a, g cross somme des forces, théorème du centre de masse, ce terme-là vaut la somme des forces. Théorème du moment cinétique, d de l, g sur d, t, c'est la somme des moments en g. Donc somme des g, p, alpha cross f alpha. J'ai a, g cross somme des forces. Là j'ai g, p, alpha cross somme des forces. Quand je les mets ensemble, j'ai un a, p, alpha, c'est ceci, et ça, c'est m, a extérieur. Donc j'arrive à une expression pour l'évolution du moment cinétique en a qui est comme ceci. Il a d de l, a sur d, t, un terme en m, a mais il y a ce terme en plus.

Notes

Summary

4m 25s

Propriété : moment cinétique en A

Soit A un point quelconque : $\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{GP}_\alpha = 0 \qquad \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha = 0$

$$\boldsymbol{L}_A = \sum_\alpha \{\boldsymbol{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha\} \qquad \boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$$

$$= \sum_\alpha \{(\boldsymbol{AG} + \boldsymbol{GP}_\alpha) \wedge m_\alpha (\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{v}'_\alpha)\}$$

$$= \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha\} = \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_A}{dt} = (\boldsymbol{V}_G - \boldsymbol{V}_A) \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{AG} \wedge M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} + \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = -\boldsymbol{V}_A \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{M}_A^{ext}$$

$$\boldsymbol{AG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} + \sum_\alpha \boldsymbol{GP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} = \sum_\alpha \boldsymbol{AP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_A}{dt} = -\boldsymbol{V}_A \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{M}_A^{ext}$$

Mécanique | 2013 21

Ce que j'obtiens ici est cohérent avec ce qu'on avait vu jusqu'à maintenant parce que si le point a est un point o du référentiel, v de a est nul, il nous reste d de l, o sur d, t égal m, o. Si le point a est le centre de masse, ici on a v, g cross v, g, ça fait 0 et il nous reste d de l, g sur d, t égal m, g. Donc cette formule générale est cohérente avec les deux cas particuliers qu'on a utilisés jusqu'à maintenant.

Notes

Summary

6m 01s

Propriété : point C du solide fixe

$$\frac{d\boldsymbol{L}_A}{dt} = -\boldsymbol{V}_A \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{M}_A^{ext}$$

C, un point du solide, fixe : $\dfrac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C^{ext}$

$$\boldsymbol{L}_C = \sum_\alpha \{\boldsymbol{CP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{CP}_\alpha)\} = I_C\,\boldsymbol{\omega}$$

$$I_{Cij} = \sum_\alpha m_\alpha\left[\boldsymbol{CP}_\alpha^2\,\delta_{ij} - CP_{\alpha,j}CP_{\alpha,i}\right]$$

Mécanique | 2013 26

Et si maintenant, on a un point fixe, imaginez un solide avec un point fixe, par exemple une toupie avec un, une pointe et qui tourne sur sa pointe. Dans une première approximation on va devoir supposer que la pointe est immobile. Alors, je pars de la formule générale. Et maintenant, je particularise un point a qui est c immobile. Alors, si c est immobile, ce v de c est nul, il nous reste ceci. Et si maintenant, je veux calculer l, c, je dois appliquer la formule générale, mais dans la formule générale, normalement, ici, j'ai pour v de p, alpha, je devrais écrire v de c plus omega cross c, p, alpha. Et ça, c'est nul. Donc il ne me reste que ce terme-là. Maintenant je reconnais, dans cette équation-là, la structure qu'on a eue quand on a défini le tenseur d'inertie. Donc, je peux définir un tenseur d'inertie en c et écrire l, c vaut i, c, omega avec les composantes i, j de i, c qui sont données comme ceci. C'est la même structure, simplement, c remplace g dans la définition du tenseur d'intertie.

Notes

Summary

6m 35s