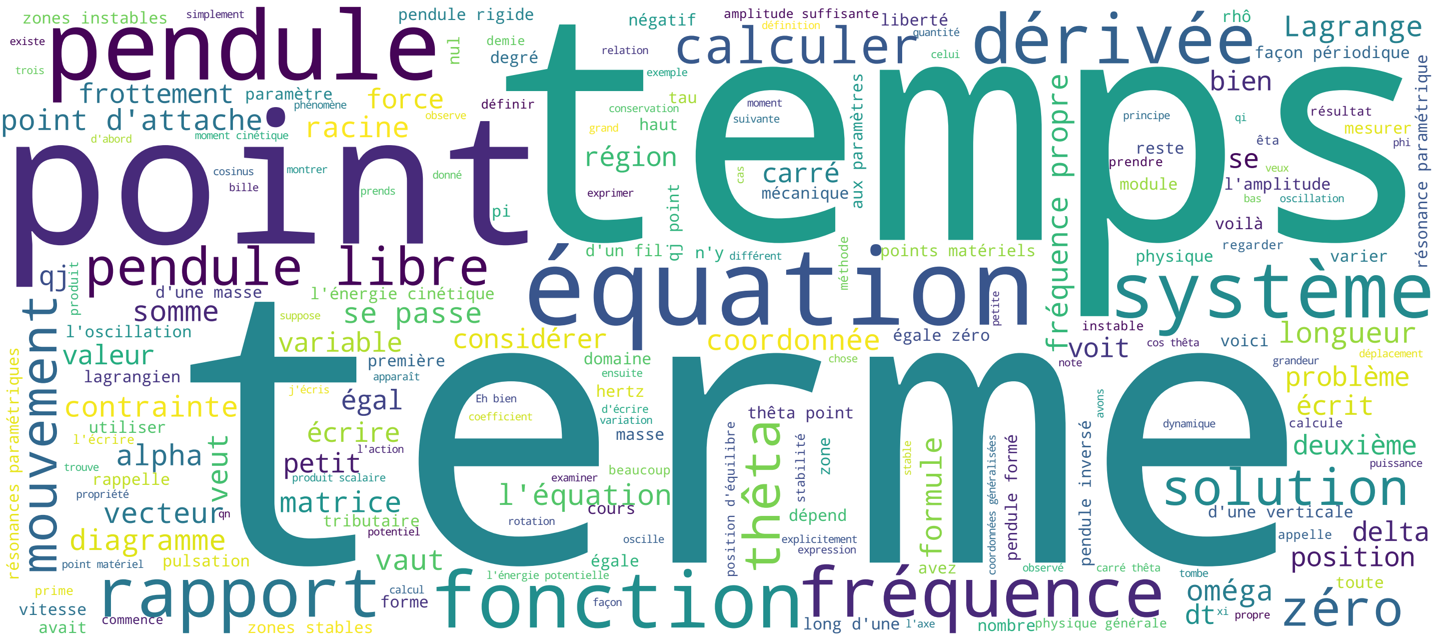
Expériences : résonance paramétrique

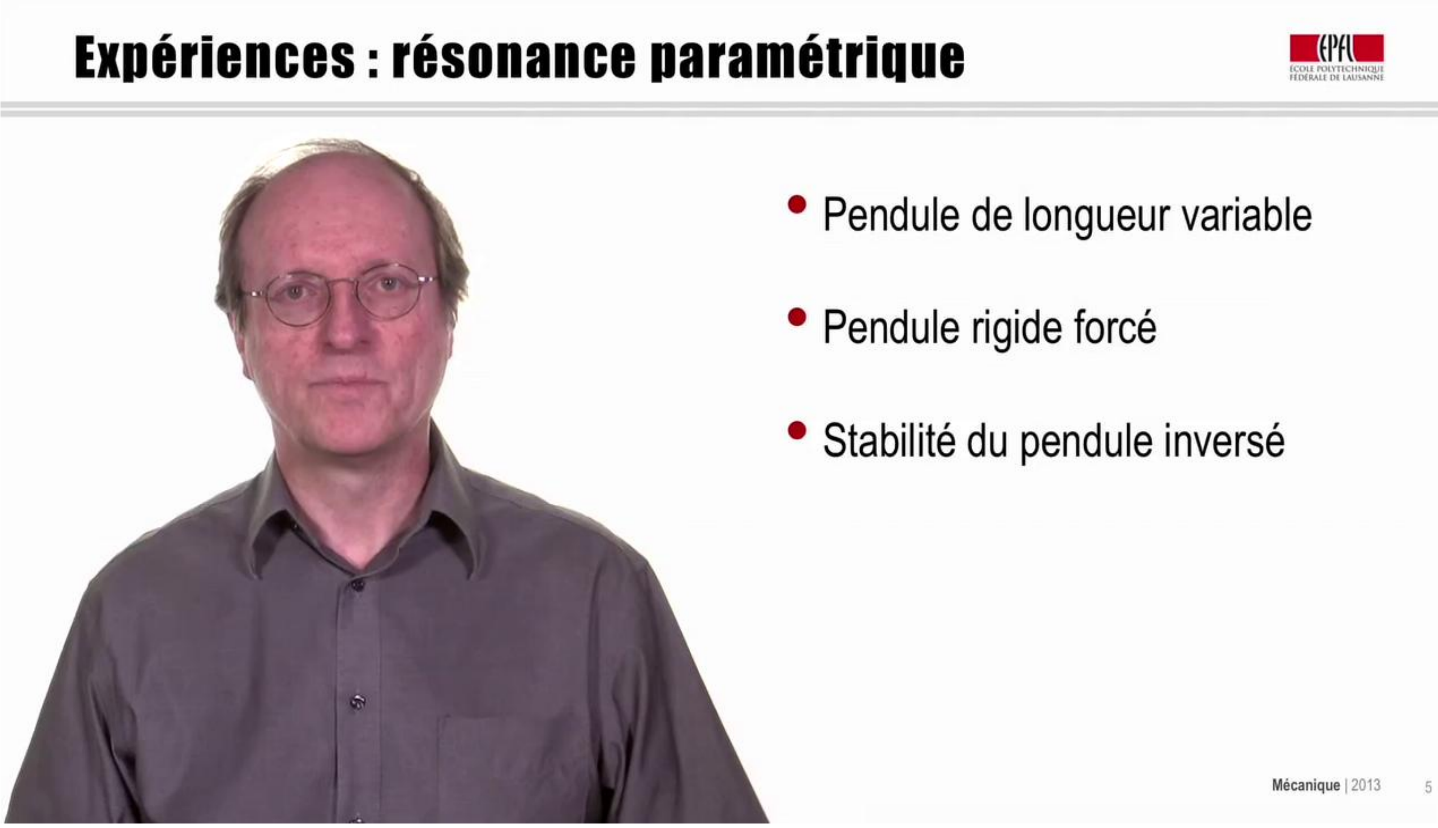
Mécanique, cours 28.exp

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

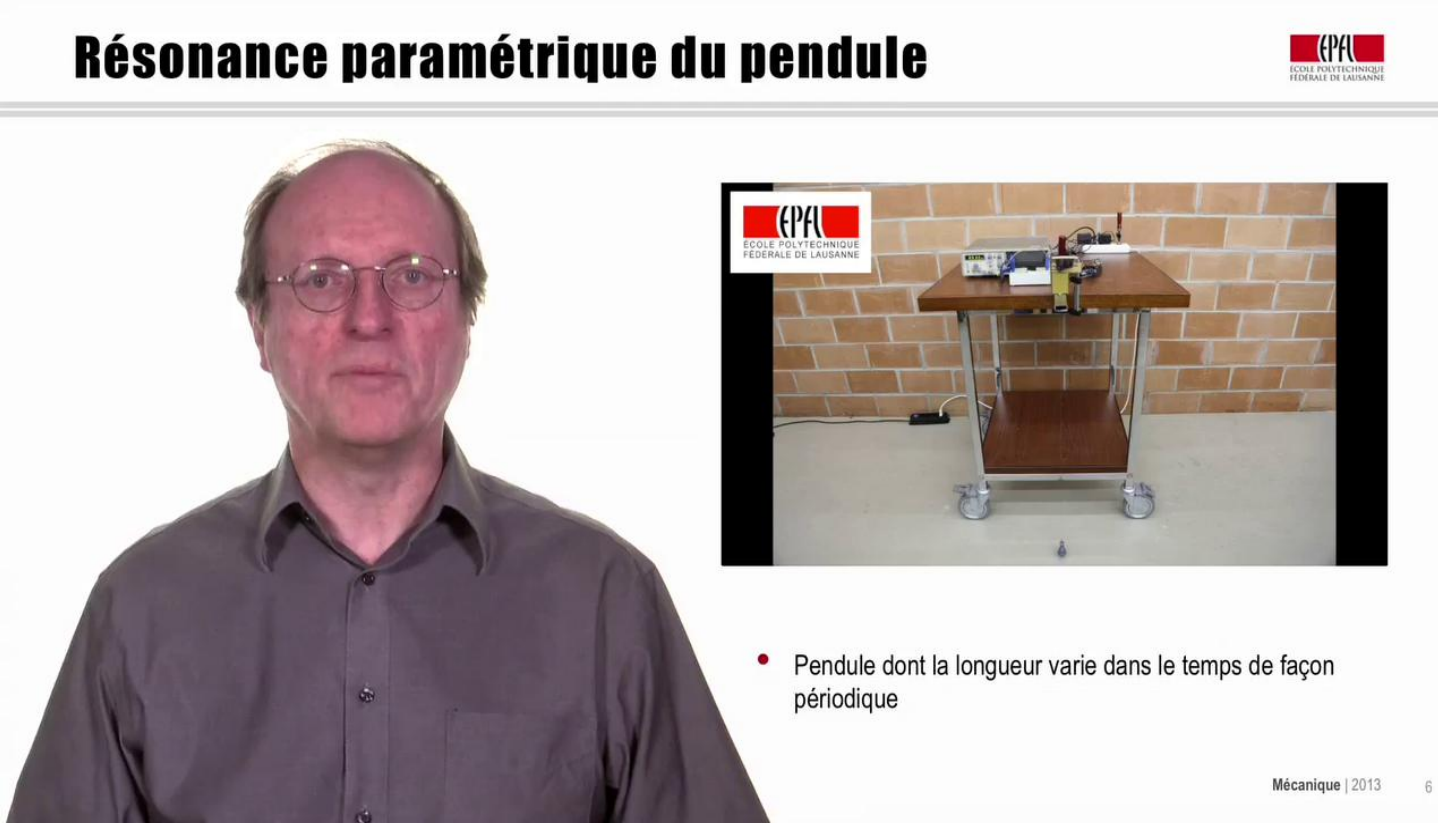


Bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Cette dernière leçon de mécanique a donné une ouverture sur un monde très riche, celui de la physique des systèmes non linéaires. On a pu apprécier la complexité du domaine en cherchant à analyser simplement les résonances paramétriques. Ici, je donne deux illustrations de résonances paramétriques : pour la première, on va considérer un pendule dont on fait varier, de façon périodique dans le temps, la longueur. Dans le deuxième, on a un pendule rigide et cette fois-ci c'est le point d'attache qui oscille de façon périodique le long d'une verticale. On terminera avec un exemple amusant : un pendule inversé stable.

Notes

Summary

0m 04s



Je commence avec un pendule formé simplement d'un fil et d'une masse. Pour exciter la résonance paramétrique, on va faire varier la longueur du fil. Commençons par mesurer la fréquence propre du pendule libre.

Notes

Summary

0m 59s

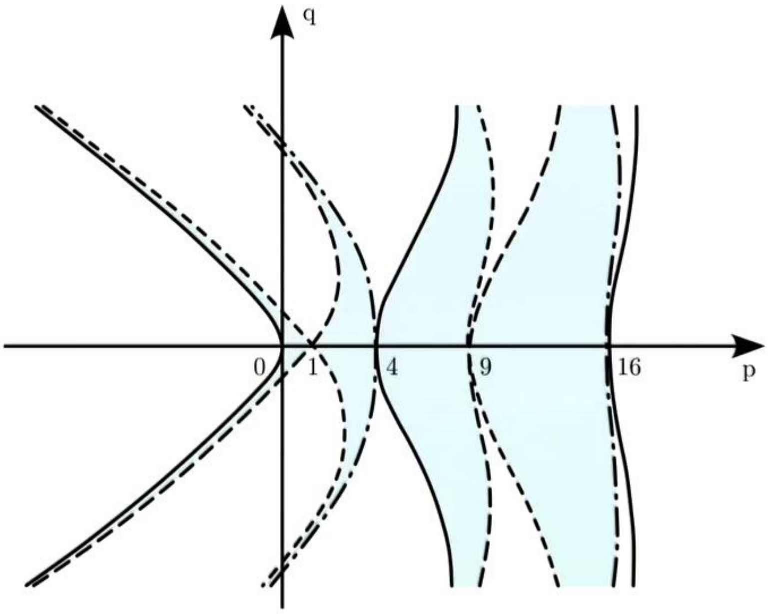
On se souviendra que cette fréquence est d'à peu près 0,5 hertz.

Notes

Summary

1m 29s

Relation de dispersion p(q) des fonctions propres



$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\, y = 0$$

$$q = \frac{-2d_0}{L}$$

$$p = \frac{g}{L\Omega^2}$$

Mécanique | 2013 8

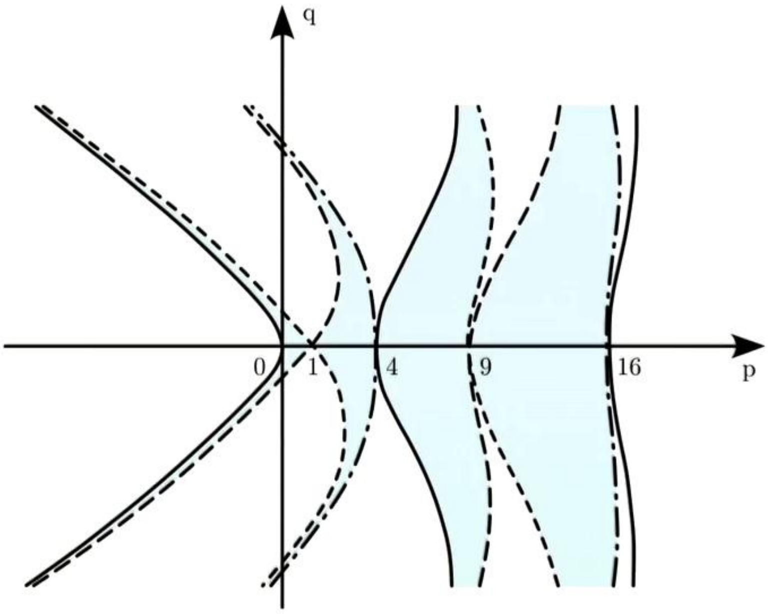
Dans l'exemple traité théoriquement, on est arrivé à dessiner le diagramme des zones stables et instables, comme rappelé ici. Les grandeurs *p* et *q* correspondent aux paramètres de l'oscillateur. On voit que le point *p* égal 1, sur l'axe, et est très proche des zones instables. Je rappelle que les zones marquées bleues sont les zones stables, les zones blanches sont les zones instables. Donc, le point *p* égal 1 a une propriété particulière : il suffit d'un tout petit déplacement *q* pour qu'on tombe dans la zone instable. On note que *p* égal 1 veut dire qu'oméga vaut racine de *g* sur L, c'est la pulsation du pendule libre. Mais il faut se souvenir qu'on a convenu que le paramètre oscille à deux oméga, donc il faut aller à deux fois la fréquence du pendule libre pour observer cet effet ici.

Notes

Summary

1m 35s

Relation de dispersion p(q) des fonctions propres



$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\,y = 0$$

$$q = \frac{-2d_0}{L}$$

$$p = \frac{g}{L\Omega^2}$$

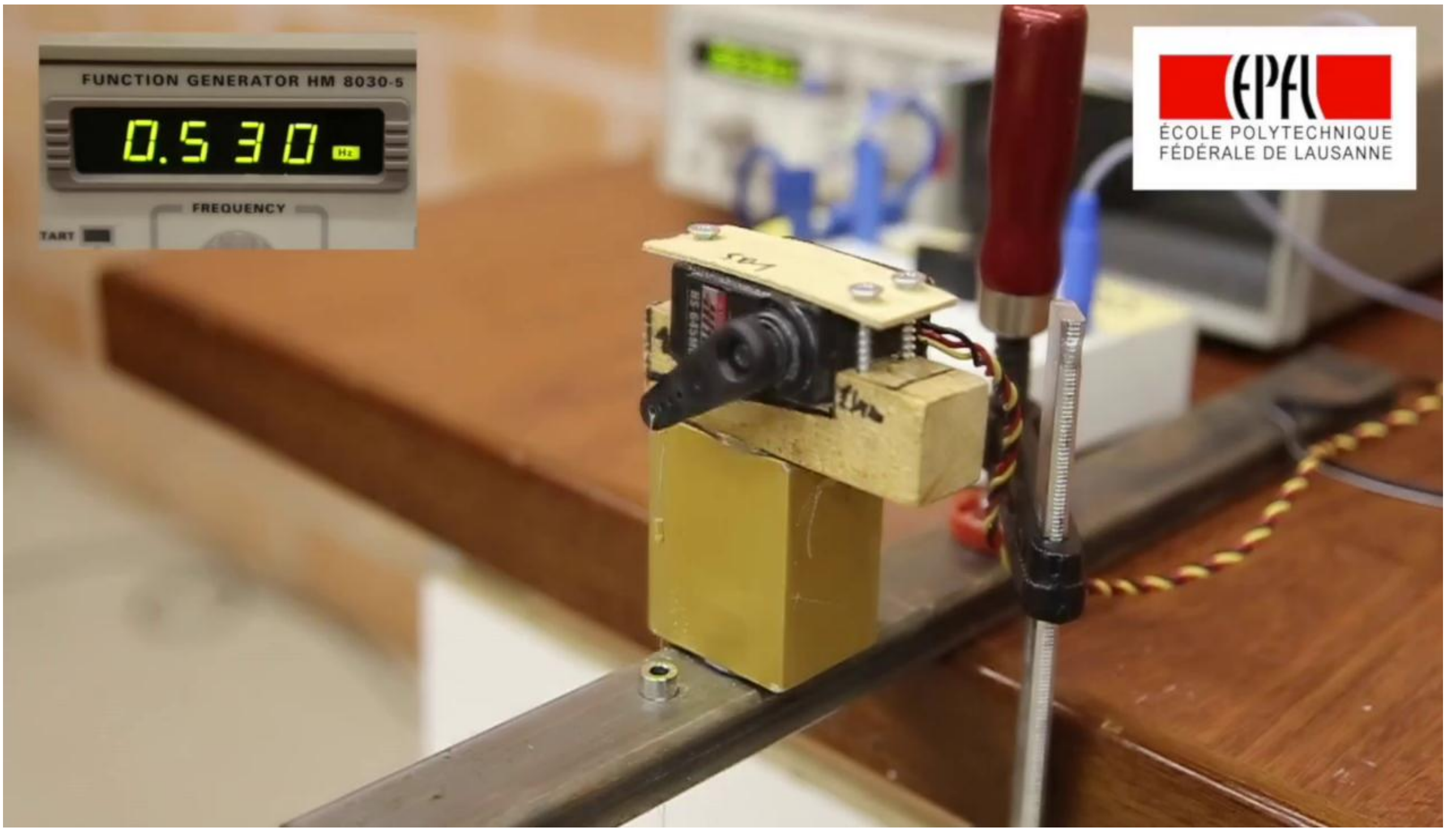
$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$

Voyons ce qui se passe avec ce pendule formé d'un fil et d'une masse : On peut maintenant examiner la stabilité lorsque la fréquence d'oscillation est exactement celle de la résonance du pendule libre. On veut donc avoir 1/2 de racine de *g* sur L Cela veut dire que *p* vaut 4. On est donc dans cette région-là du diagramme. Le diagramme a été dessiné pour le cas idéal où il n'y a pas de frottement. S'il y a des frottements, comme notre intuition nous le dicte, les zones de stabilité augmentent. Donc cette région-là devient stable. Il faut avoir une amplitude suffisante pour entrer dans la zone d'instabilité.

Notes

Summary

2m 42s



Voyons ce qui se passe sur l'expérience : la longueur du pendule oscille maintenant avec une fréquence de 0,5 hertz.

Notes

Summary

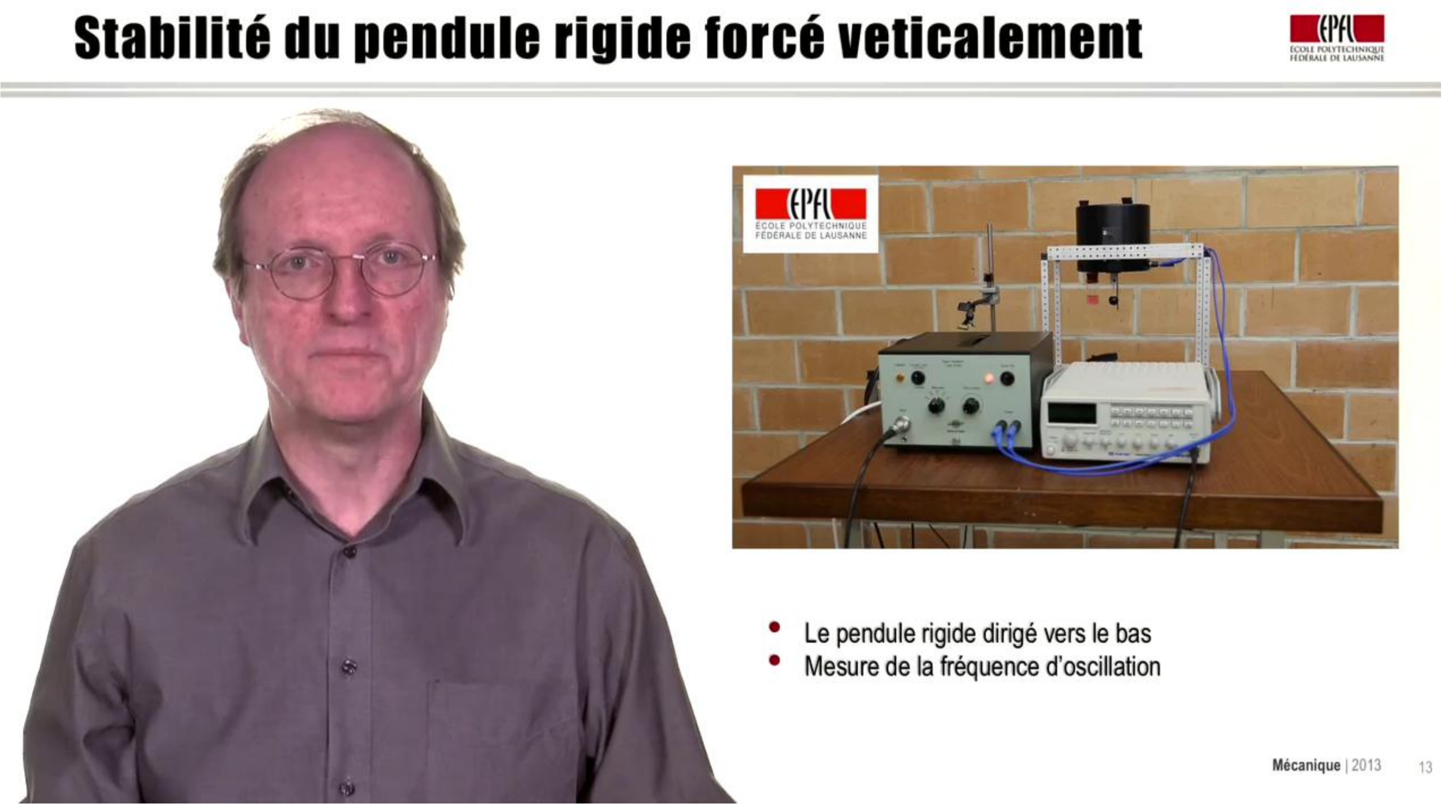
4m 21s

Le pendule est tributaire de frottements et on obtient bien une petite oscillation, mais pas grand-chose. Le comportement ici est très différent de ce qu'on a observé à deux fois la fréquence propre.

Notes

Summary

4m 40s

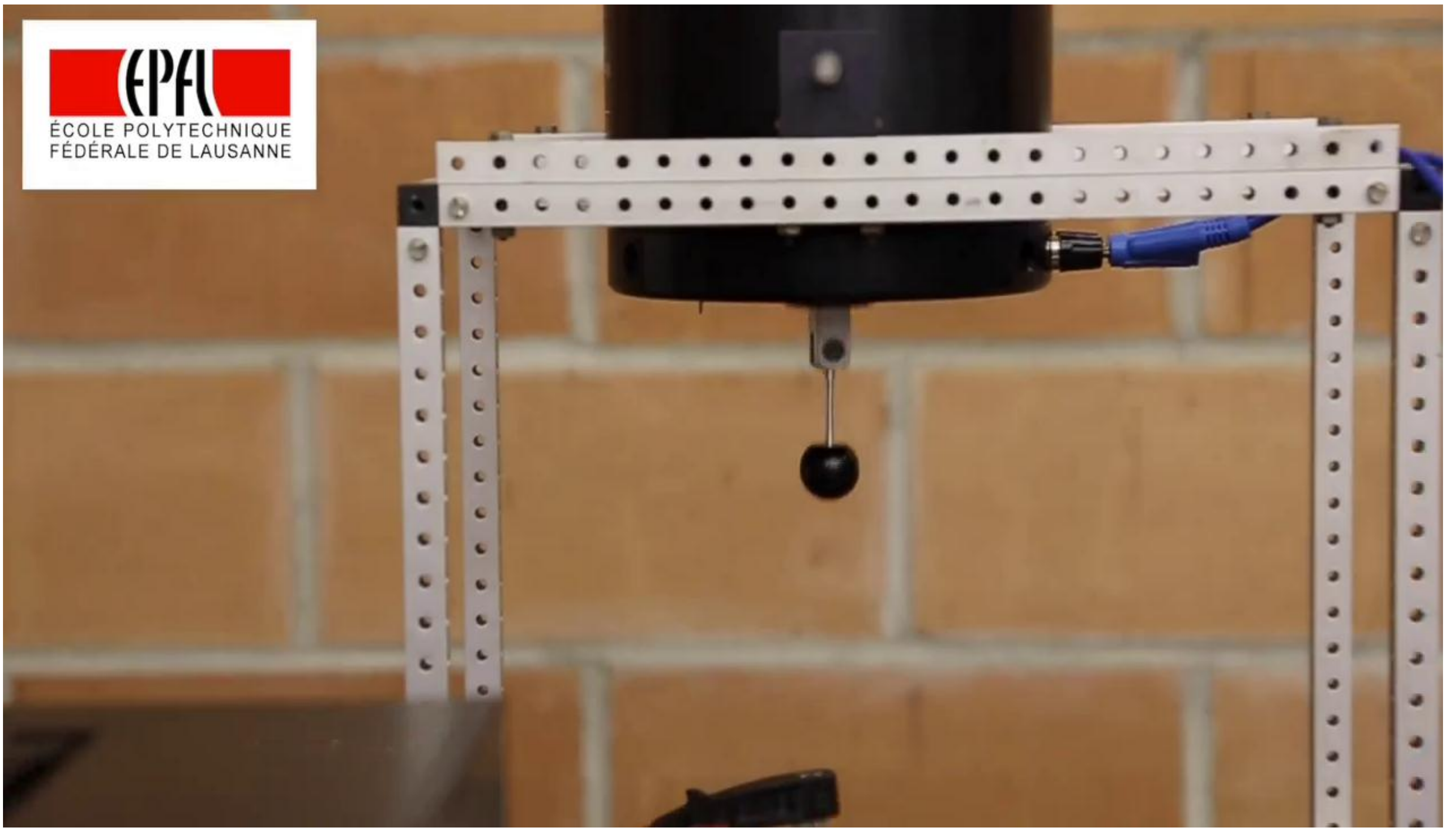


Passons maintenant à un pendule rigide : sa longueur est fixe et c'est le point d'attache qu'on va faire osciller avec un point vibrant le long d'une verticale. Commençons par mesurer la fréquence propre du pendule libre.

Notes

Summary

4m 53s

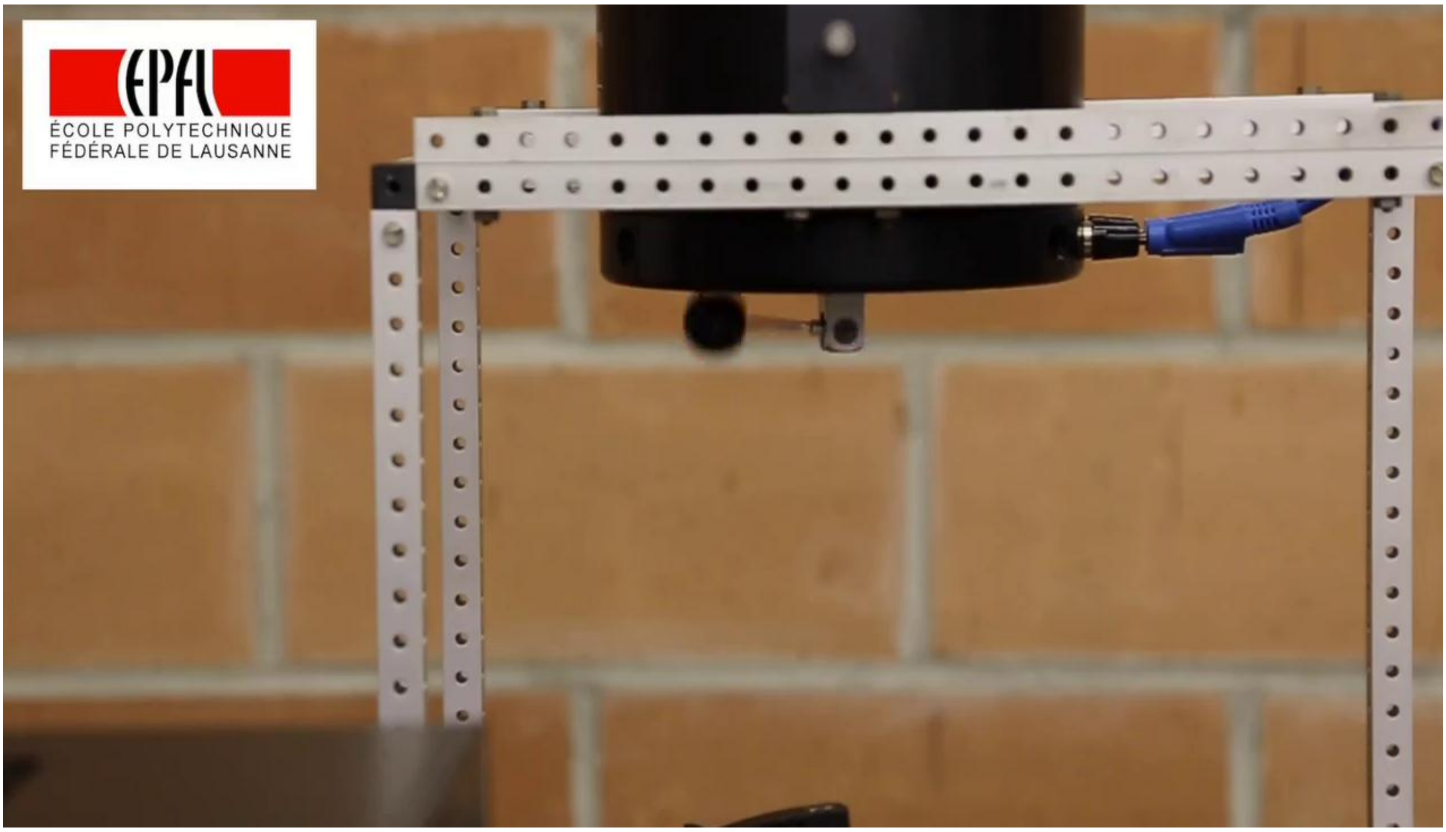


Observons ce qui se passe si le point d'attache oscille à la fréquence du pendule libre : il faut créer une perturbation pour observer à peine une oscillation qui est très vite amortie. Ce système est beaucoup plus tributaire des frottements que le système précédent, donc, à une fois la fréquence, on a un système stable.

Notes

Summary

5m 20s

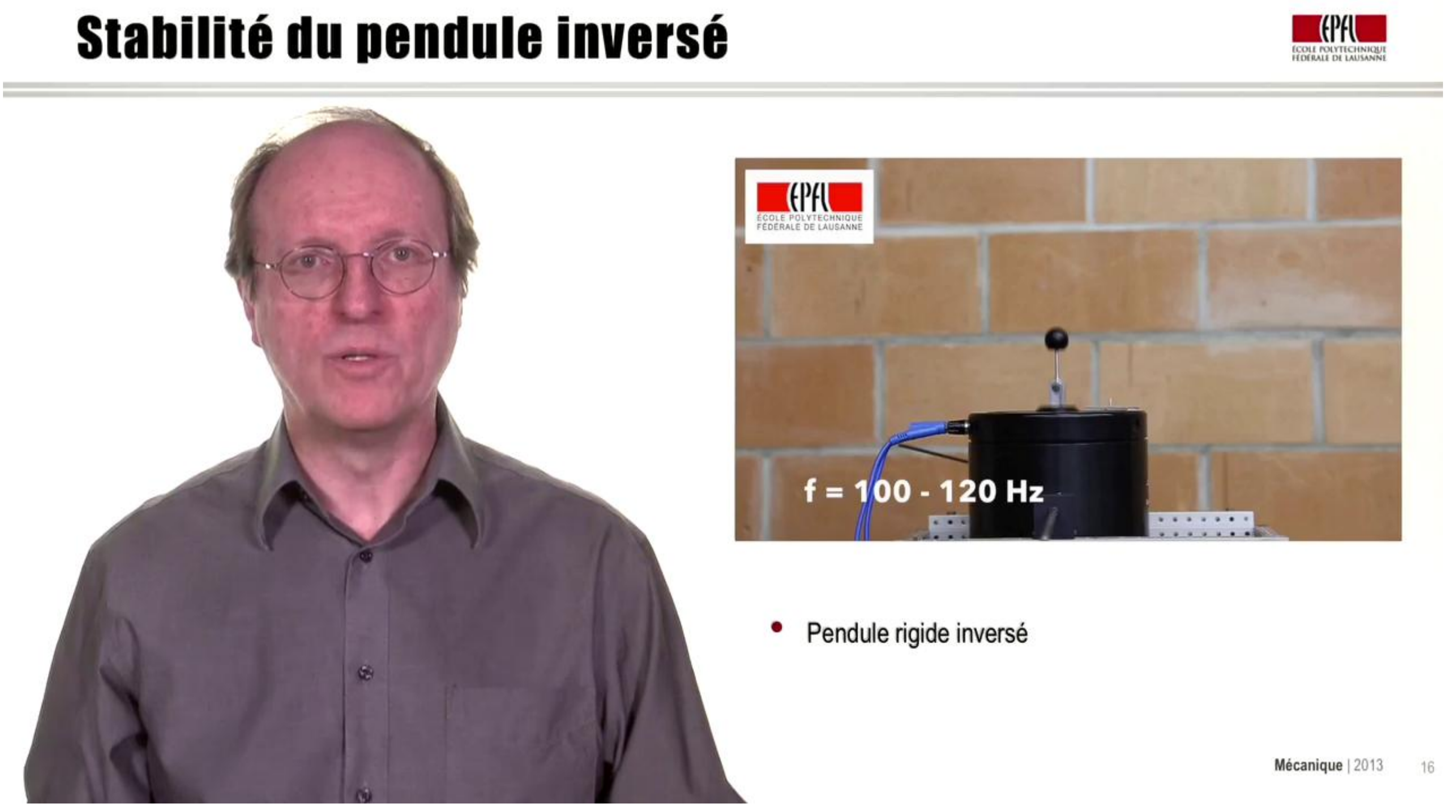


Observons ce qui se passe à deux fois la fréquence propre : le système est stable, dans cette position d'équilibre. Il suffit d'une petite perturbation et on excite la résonance paramétrique de façon très claire.

Notes

Summary

5m 45s

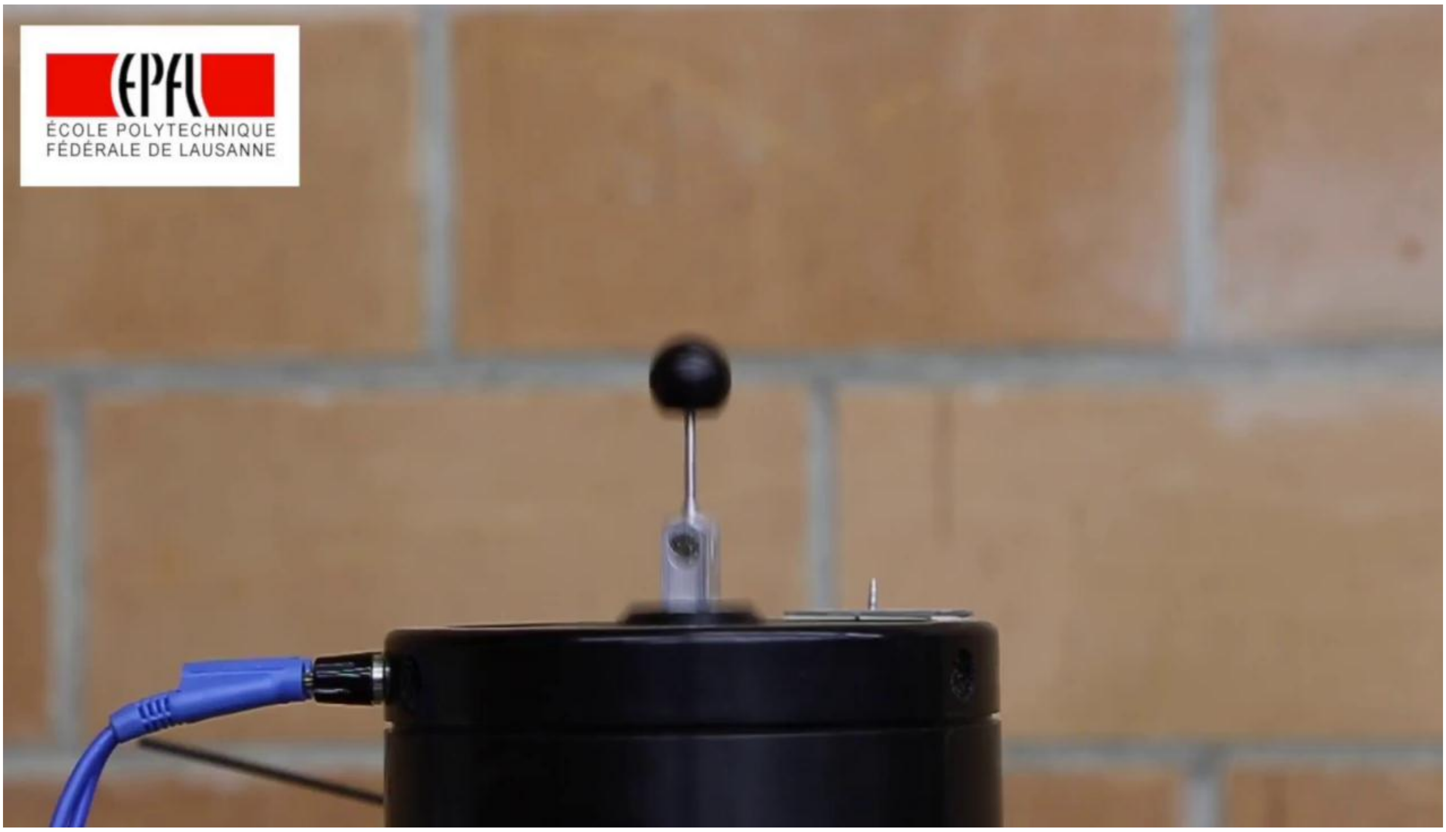


On termine ce module avec une expérience amusante : on va faire vibrer le pendule, mais avec le point d'attache en bas et le pendule dirigé vers le haut. On va voir qu'il existe un domaine de fréquences où, pour une amplitude suffisante, le pendule est stable, vibrant vers le haut.

Notes

Summary

6m 11s



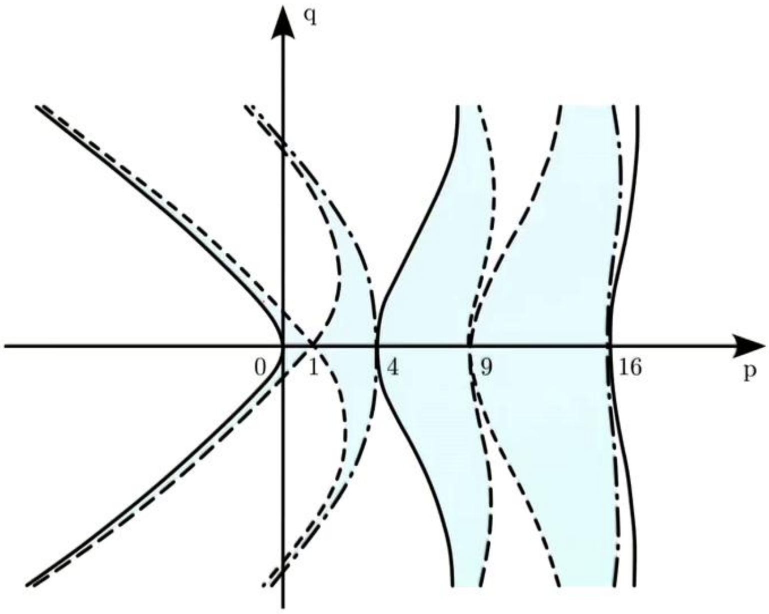
Il n'y a que dans le domaine entre 100 et 120 hertz qu'on observe ce phénomène. Et on peut tester la stabilité de ce pendule inversé. Encore une fois... Clairement, le pendule est stable.

Notes

Summary

6m 37s

Relation de dispersion p(q) des fonctions propres



$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\,y = 0$$

$$q = \frac{-2d_0}{L}$$

$$p = \frac{g}{L\Omega^2}$$

Ici, pour utiliser le développement théorique que nous avons vu, il faut considérer *g* négatif pour tenir compte du fait que le pendule est inversé. On est donc dans cette région-là du diagramme. Et on voit que pour un *g* négatif, si l'amplitude est suffisamment grande, *q* étant relié à l'amplitude de l'oscillation du point d'attache, on peut être dans une zone de stabilité.

Notes

Summary

7m 12s

Stabilité du pendule inversé : ordre de grandeur

$$p = \frac{g}{L\Omega^2} \qquad q = \frac{-2d_0}{L}$$

$$-\frac{p}{2} = \cfrac{q^2}{4 - p - \cfrac{q^2}{16 - p - \cfrac{q^2}{36 - p - \cfrac{q^2}{(\dots)}}}}$$

Ici : $2\,\Omega/2\pi = 110\,\text{Hz}$

$$p = \frac{g}{L\Omega^2} = \frac{-10}{0.05(2\pi\,55)^2} \approx -1.7\,10^{-3}$$

$$-\frac{p}{2} \approx \frac{q^2}{4} \implies q \approx 0.06$$

amplitude de l'oscillation du point d'attache :

$$2d_0 \approx 3\text{ mm}$$

Mécanique | 2013 24

Voici les équations qui relient les paramètres p et q aux paramètres du pendule. Si on prend pour la fréquence 110 hertz, on trouve que le paramètre p a la valeur que voici, qui est petite. Donc, dans cette formule qui lie p à q, on peut se contenter du premier terme de cette fraction continue, ce qui donne la valeur de q et de q, avec cette formule, on déduit l'amplitude de l'oscillation, on déduit 3 millimètres, ce qui n'est pas loin de ce qu'on a pu observer.

Notes

Summary

7m 42s