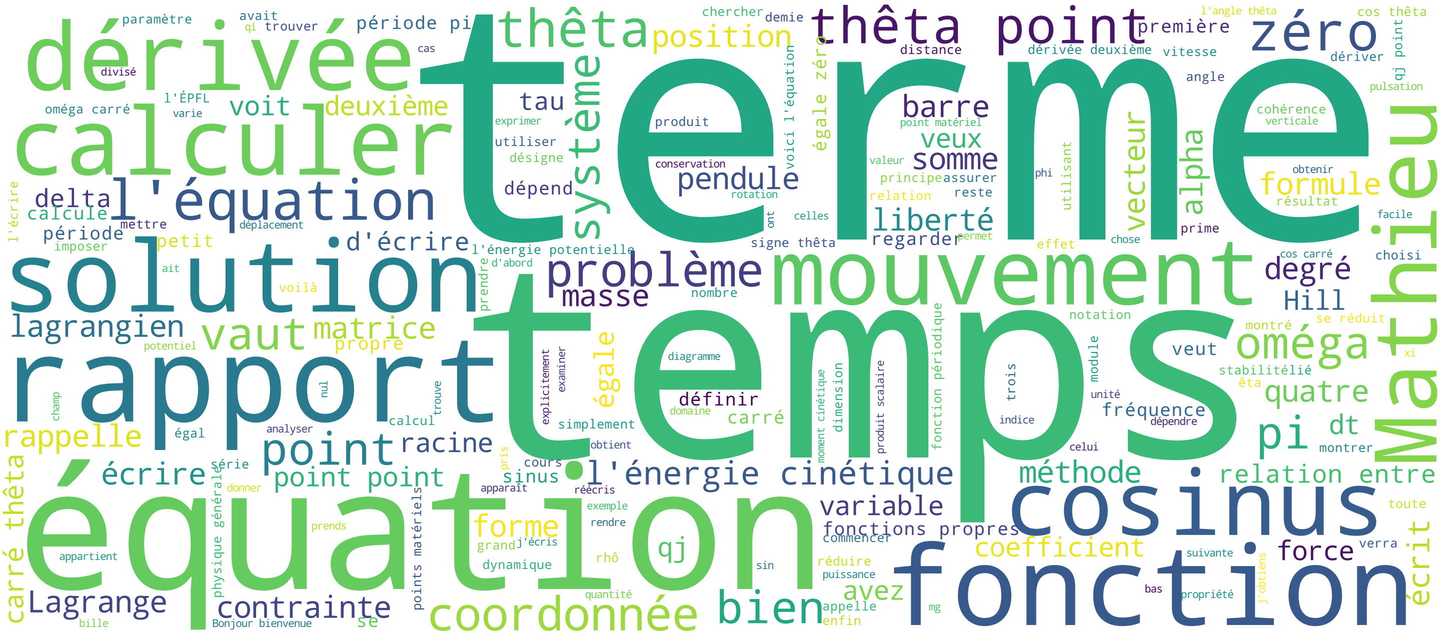
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-5-30

Pendule paramétrique

Mécanique, cours 28.2

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

Pendule paramétrique

- Equation du mouvement par la méthode de Lagrange
- Equation de Mathieu
- Fonctions propres
- Domaines de stabilité

Mécanique | 2013 7

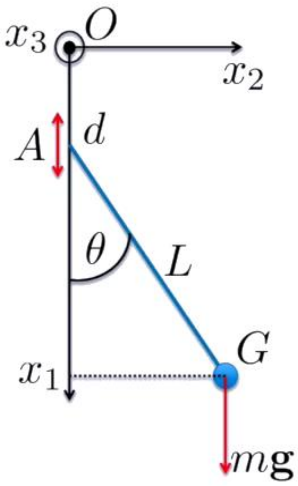
Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans ce module, on va analyser la dynamique d'un pendule, subissant une excitation paramétrique Je vais commencer par définir le problème, on va écrire les équations du mouvement pour ce pendule en utilisant la méthode de Lagrange, ensuite in verra en quoi cette équation-là a la forme d'équation dite de Mathieu, on va chercher les fonctions propres, et on va discuter les domaines de stabilité de ce pendule Voici le système mécanique, vous avez une barre rigide sans masse, une masse m au bout, dans le champ de la pesanteur.

Notes

Summary

0m 04s

Pendule forcé : méthode de Lagrange



$$x_1 = d + L\cos\theta \qquad x_2 = L\sin\theta$$

$$\dot{x}_1 = \dot{d} - L\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{x}_2 = L\dot{\theta}\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{d}^2 - 2\dot{d}L\dot{\theta}\sin\theta + L^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = -mg\left(d + L\cos\theta\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{d}^2 - m\dot{d}L\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgd + mgL\cos\theta$$

Mécanique | 2013 14

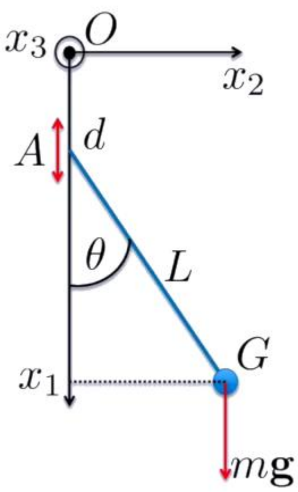
L'extrémité de la barre au point A oscille selon une verticale, et je désigne par la distance entre le point O qui appartient au différentiel et le point A, je désigne cette distance par d, d est ici une fonction du temps. Je vais utiliser la méthode de Lagrange pour obtenir l'équation du mouvement. C'est un problème à un degré de liberté, et je vais utiliser l'angle thêta comme coordonnée; d varie, et d qui dépend du temps est une contrainte dépendante du temps. Donc on a un degré de liberté. Pour calculer l'énergie cinétique, je vais commencer par calculer la position, alors je l'écris en coordonnées cartésiennes, en utilisant ma coordonnée thêta, je calcule la dérivée, attention que ici d, ce d-là, est une fonction du temps, donc d point non-nul, les autres dérivées sont triviales, je calcule l'énergie cinétique, vous avez ce terme au carré, ce terme au carré se combine ici on a un sin carré thêta, là un cos carré thêta, ça donc, ça donne ce terme, et il y a le double produit ici, que j'ai écrit, le voilà. L'énergie potentielle, c'est cette distance plus celle-là vers le bas, donc c'est moins mg avec un d plus L cos thêta, le lagrangien, c'est T moins V, le voici, j'ai bien écrit moins V ici, et maintenant, il faut calculer les dérivées.

Notes

Summary

0m 52s

Pendule forcé : équation du mouvement



$$L = \frac{1}{2}m\dot{d}^2 - m\dot{d}L\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgd + mgL\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = -m\dot{d}L\sin\theta + mL^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = -m\ddot{d}L\sin\theta - m\dot{d}\dot{\theta}\cos\theta + mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -m\dot{d}L\dot{\theta}\cos\theta - mgL\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta - \frac{\ddot{d}}{L}\sin\theta = 0$$

Mécanique | 2013 19

Je réécris le lagrangien pour rendre le calcul plus commode, je dois calculer d de L sur d de thêta point, alors il y a un terme en thêta point ici, et là. C'est une dérivée par rapport à thêta point prise comme une variable. Ce terme-là. Je dois je dériver par rapport au temps, qui, en principe, dépend du temps, donc j'ai un d point point, le signe thêta donne une contribution aussi, et le thêta point donne un thêta point point. d de L sur d de thêta, il a un terme qui vient d'ici, d'un terme de l'énergie cinétique, et un autre d'énergie potentielle. Le voici. On a donc l'équation du mouvement, j'ai simplifié ici par, j'ai divisé l'équation par L carré, voici l'équation du mouvement pour ce pendule à tout angle.

Notes

Summary

2m 38s

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta - \frac{\ddot{d}}{L}\sin\theta = 0$$

$$d = d_0\cos(2\Omega t)$$

$$\theta \to 0$$
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{4d_0\Omega^2}{L}\cos(2\Omega t)\right)\theta = 0$$

$$\ddot{x} + G(t)x = 0 \qquad x = L\theta$$

$$\text{période : } \tau = \frac{\pi}{\Omega}$$

Maintenant je vais vous montrer comment ce problème se réduit à une équation de Mathieu, d'abord on va se convaincre qu'on a bien une équation de Hill, pour se faire, on va regarder la limite des petits angles, et puis on va imposer pour que d ait une fonction périodique. J'ai choisi, pour pouvoir facilement me réduire à l'équation de Mathieu, j'ai choisi un, d'écrire deux oméga t, plutôt que oméga t, et je vais garder le deux, comme dans l'équation de Mathieu. Si thêta tend vers zéro, on a le signe thêta ici, qui devient thêta, et on a donc ces deux termes, et ici on a une équation qui a la structure d'une équation de Hill, avec ici un terme oscillant, donc cette fonction-là est bien une fonction périodique, je peux multiplier thêta par L si je veux pour avoir un x, qui a la forme d'une fonction de Hill, et maintenant je vais traiter ces paramètres pour avoir une équation sans dimension, ce sera pour l'équation de Mathieu, je rappelle que la période, vu qu'il y a un deux ici, la période c'est pi sur oméga, dans ce problème-là.

Notes

Summary

3m 36s

Equation de Mathieu

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{4d_0\Omega^2}{L}\cos(2\Omega t)\right)\theta = 0$$

$\bar{t} = \Omega t$

$\Omega^2 \frac{d^2\theta}{d(\Omega t)^2}$

θ''

$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\,y = 0$$

Maintenant on va voir comment cette équation se réduit à la forme de Mathieu, voici l'équation, voici la forme de Mathieu. Alors on voit que ici, on devrait pouvoir écrire la dérivée deuxième par rapport au temps de cette manière-là. On écrit oméga t au carré, en mettant oméga carré devant, ce terme-là est sans dimension, donc on va appeler le temps t barre oméga t, et ici on a la dérivée thêta seconde.

Notes

Summary

4m 59s

Equation de Mathieu

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{4d_0\Omega^2}{L} \cos(2\Omega t) \right) \theta = 0$$

$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\, y = 0$$

$$\bar{t} = \Omega t$$

$$p = \frac{g}{L\Omega^2} \qquad q = \frac{-2d_0}{L}$$

On a bien la forme de Mathieu, avec t barre sans unité, et p et q, qui sont les rapports, les rapports g sur L que j'ai ici, et puis ce rapport-là divisé par le oméga carré, qui provient de la dérivée deuxième par rapport au temps.

Notes

Summary

5m 46s

Méthode de Ince

$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\, y = 0$$

chercher une solution de période π :

$$\bar{e}_1(\bar{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos 2r\bar{t}$$

$$2\cos 2r\bar{t}\cos 2\bar{t} = \cos(2r+2)\bar{t} + \cos(2r-2)\bar{t}$$
$$2\sin 2r\bar{t}\cos 2\bar{t} = \sin(2r+2)\bar{t} + \sin(2r-2)\bar{t}$$

$$pA_0 - qA_2 = 0$$
$$(p-4)A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(p - 4r^2)A_{2r} - q(A_{2r-2} + A_{2r+2}) = 0$$

Maintenant, on va examiner une méthode qui permet de trouver les solutions de cette équation-là. Là on est très avant dans les techniques de résolutions d'équations différentielles, on va y aller pas par pas, je vais juste montrer le principe. Je cherche suivant la discussion qu'on a eue tout à l'heure dans l'autre module sur les fonctions propres de l'équation de Mathieu, je vais chercher des solutions de période pi. Alors, je vais écrire une série de termes en cosinus des fonctions cosinus qui ont une période pi, en effet, moi j'ai écrit deux r, r égale zéro, un, deux, trois, et cetera, série infini de termes dénombrables, et puis j'ai des coefficients A deux r, A indice deux r, ce sont les poids respectifs de tous ces coefficients. Si je veux faire en sorte que ce e un barre soit une solution, je dois le mettre dans l'équation différentielle, j'aurais des termes en cosinus deux t, qui multiplient le cosinus deux rt, ces produits de cosinus je peux les réduire en somme de cosinus avec des règles trigonométriques que je rappelle ici, quand on fait ce travail, c'est un peu laborieux, on arrive aux relations suivantes: alors on a des relations, les premières sont faciles, mais très vite on voit que ça se gâte, déjà à la deuxième en fait, parce qu'on a A deux, qui est lié à A zéro et à A quatre.

Notes

Summary

6m 07s

$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\,y = 0$$

chercher une solution de période π :

$$\bar{e}_1(\bar{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos 2r\bar{t}$$

$$2\cos 2r\bar{t}\cos 2\bar{t} = \cos(2r+2)\bar{t} + \cos(2r-2)\bar{t}$$
$$2\sin 2r\bar{t}\cos 2\bar{t} = \sin(2r+2)\bar{t} + \sin(2r-2)\bar{t}$$

$$pA_0 - qA_2 = 0$$
$$(p-4)A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(p-4r^2)A_{2r} - q(A_{2r-2} + A_{2r+2}) = 0$$

$$-\frac{p}{2} = \cfrac{q^2}{4 - p - \cfrac{q^2}{16 - p - \cfrac{q^2}{36 - p - \cfrac{q^2}{(\ldots)}}}}$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{p}{q}$$
$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{-q}{4 - p + q\frac{A_4}{A_2}}$$
$$\frac{A_{2r}}{A_{2r-2}} = \frac{-q}{4r^2 - p + q\frac{A_{2r+2}}{A_{2r}}}$$

De même, on a A deux r qui est lié à deux r moins deux, et deux r plus deux. On a des relations de récurrence qui sont assez complexes, mais enfin, de la première, on peut obtenir A deux sur A zéro, de la deuxième je peux aussi calculer A deux sur A zéro, mais il y a un A quatre qui intervient. Le A quatre, je peux l'obtenir de la généralisation de cette formule-là, que j'obtiens ici en écrivant A deux r sur A deux r moins deux. Ça me donne ce terme-là qui va dépendre de A deux r plus deux. Maintenant, pour assurer la cohérence de cette solution, je dois imposer une relation entre p et q. En effet, ce p sur q ici qui vaut A deux sur A zéro vaut aussi cela. Avec le A quatre sur A deux que je peux calculer grâce à cette formule-là. J'arrive ainsi à une fraction infinie, j'ai arrêté ici d'écrire les termes, heureusement c'est une fraction qui converge assez vite, et on peut calculer assez aisément quelques termes de cette relation entre p et q.

Notes

Summary

7m 48s

Fonctions propres

autres solutions de période π :

$$\bar{e}_2(\bar{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2} \sin(2r+2)\bar{t}$$

solutions de période 2π :

$$\bar{e}_3(\bar{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1} \cos(2r+1)\bar{t}$$

$$\bar{e}_4(\bar{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1} \sin(2r+1)\bar{t}$$

Mécanique | 2013 44

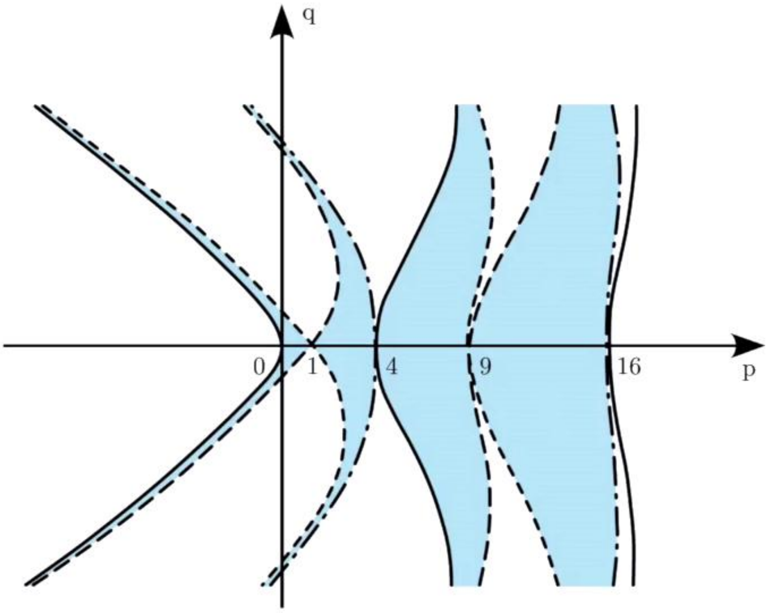
Maintenant, jusqu'ici, j'ai pris des termes en cosinus, en effet j'aurais pu prendre des termes en sinus, comme indiqué ici, ça me donnera une solution en e deux barre, et puis après il faudra regarder les solutions de période, non pas pi mais deux pi, ça va me donner de nouveau des séries en cosinus et des séries en sinus, pour chacune de ces fonctions il faut calculer les relations entre p et q pour assurer la cohérence, chaque fois on obtient une autre relation entre p et q, et maintenant je vous montre le résultat global sur un diagramme p et q, ce qu'on a montré c'est comment on trouve des lignes telles que celles-ci.

Notes

Summary

9m 09s

Relation de dispersion p(q) des fonctions propres



$$y'' + (p - 2q\cos 2\bar{t}\,)\, y = 0$$

$$q = \frac{-2d_0}{L}$$

$$p = \frac{g}{L\Omega^2}$$

Ce que je n'ai pas montré, c'est que dans les zones marquées en bleu ici, on a des solutions stables, et à l'extérieur on a des solutions instables. Donc les fonctions propres de période pi et deux pi de l'équation de Mathieu nous donnent les limites entres les zones instables et les zones stables. Je rappelle ici les notations qu'on a utilisées pour p et q, p et q qui apparaissent sur ce diagramme.

Notes

Summary

9m 56s