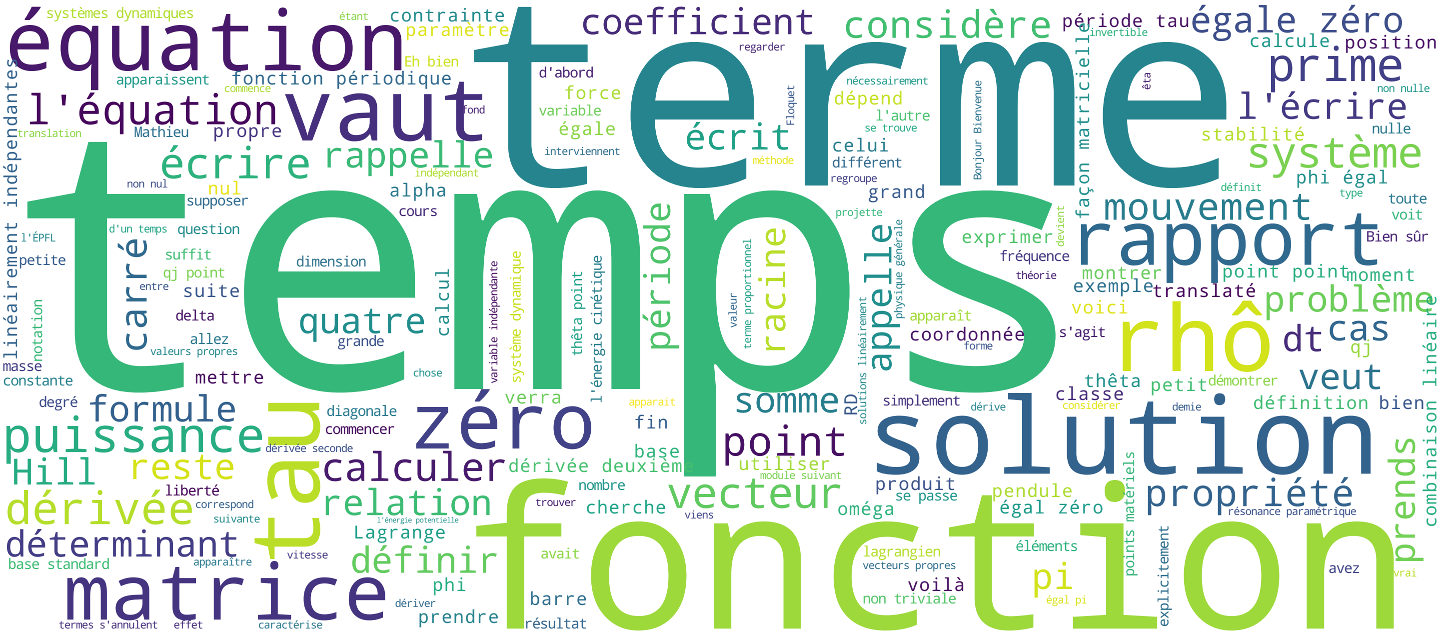
http://go.epfl.ch/traite-meca-5-30

Résonance paramétrique

Mécanique, cours 28.1

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

Résonance paramétrique

- Equation du mouvement
- Base standard
- Translation dans le temps
- Stabilité

Mécanique | 2013 7

Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, j'aimerais analyser une classe de systèmes dynamiques dans laquelle se trouve notamment le problème de l'enfant sur, qui se tient debout sur une balançoire et qui plie les genoux de façon régulière et périodique pour augmenter l'amplitude de son balancement. Je vais commencer par définir une équation de mouvement qui caractérise cette classe de systèmes dynamiques. Ensuite, je vais définir ce qu'on appelle une base standard des solutions de cette équation du mouvement. Ensuite, on verra une propriété de translation dans le temps des solutions, et cela nous permettra d'aborder la question de la stabilité de ces systèmes dynamiques.

Notes

Summary

0m 03s

Exemple : équation de Mathieu

$$y'' + (p - 2q\cos(2\bar{t})\,)\,y = 0$$

Mécanique | 2013 13

Je commence par définir cette classe de mouvement par une équation que voici. Vous avez une dérivée deuxième d'une coordonnée qui bien sûr est une fonction du temps. Si dans l'équation que j'ai écrite, G de t, et t une constante, on aurait l'équation d'un oscillateur harmonique. Mais ici, on a une fonction du temps, donc c'est comme si on avait un paramètre caractéristique du système dynamique qui devient une fonction du temps. C'est pour ça qu'on parlera après de résonance paramétrique. C'est un paramètre du système qui dépend du temps. Ce n'est pas une force appliquée au système, mais c'est un paramètre qui dépend du temps. On va faire l'hypothèse suivante. On va supposer que cette fonction G de t est une fonction périodique de période tau. Je vous donne un exemple d'une telle fonction, c'est l'exemple qu'on verra dans la partie pratique de cette leçon, c'est l'équation de Mathieu qui a la forme suivante. Ici, je l'ai écrite avec un t barre. C'est une variable indépendante sans dimensions qui, la notation nous rappelle le temps, parce qu'en effet, nous, nous allons regarder des systèmes qui dépendent du temps.

Notes

Summary

1m 03s

Exemple : équation de Mathieu

$$y'' + (p - 2q\cos(2\bar{t})\,)\,y = 0$$

$$\text{période :}\quad \bar{\tau} = \pi$$

$$y'' = \frac{d^2y}{d\bar{t}^{\,2}}$$

Mécanique | 2013 15

Cette équation de Mathieu se retrouve dans toutes sortes d'autres systèmes physiques où alors, la variable indépendante n'est peut-être pas le temps; y seconde, c'est la dérivée seconde de ce système par rapport au temps, t barre, et la période, vu que j'ai écrit deux t barre, la période tau barre, c'est pi. Donc on a un système qui correspond à une équation de type Hill, c'est l'équation qu'on s'est proposé d’analyser dès le début avec une forme particulière, ici avec ce terme en p et ce terme en q, le q donnant l'amplitude de l'oscillation du paramètre.

Notes

Summary

2m 40s

Propriété : linéarité

$$\ddot{x}_1 + G(t)x_1 = 0 \qquad \ddot{x}_2 + G(t)x_2 = 0$$

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \alpha\ddot{x}_1 + \beta\ddot{x}_2 &= -\alpha G(t)x_1 - \beta G(t)x_2 \\ &= -G(t)\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right) \\ &= -G(t)x \end{aligned}$$

Cette équation de Hill est une équation linéaire. Ici, linéaire veut dire la chose suivante. Si x un est une solution de l'équation de Hill, et x deux aussi, alors toute combinaison linéaire de x un et de x deux est aussi une solution. On peut le vérifier aisément si on calcule la dérivée deuxième de x. On peut l'écrire immédiatement en terme de dérivée deuxième de x un et de x deux. On substitue l'équation de Hill, enfin le résultat de l'équation de Hill. On regroupe les termes, et on voit bien apparaître un terme moins G fois x, donc c'est dire que l'équation x est bien solution elle aussi de l'équation de Hill.

Notes

Summary

3m 28s

Définition : base standard

$e_1(t)$ $\quad\quad$ $e_2(t)$

$$e_1(0) = x_0 \qquad e_2(0) = 0$$
$$\dot{e}_1(0) = 0 \qquad \dot{e}_2(0) = v_0$$

linéairement indépendantes :

$$e_1 + be_2 = ce_1 \implies b = 0 \text{ et } c = 1$$

$$\dot{e}_1 + b\dot{e}_2 = c\dot{e}_1$$

Maintenant, je vais définir une base appelée standard. C'est, il s'agit ici d'une base de deux solutions linéairement indépendantes, comme on va le voir, qui, qui ont, qui vont jouer un rôle spécial dans notre description. La première fonction e un de t, solution de cette équation de Hill a cette propriété-là au temps t égale zéro. On a une amplitude non nulle x zéro et une vitesse nulle. Pour la deuxième, je vais prendre une condition initiale qui est que la position, l'amplitude est nulle, et la vitesse vaut v zéro, non nulle. Maintenant, je vais vous convaincre que ces deux solutions sont linéairement indépendantes. Ça vaut dire quoi pratiquement qu'elles sont linéairement indépendantes? Eh bien ça veut dire par exemple, ceci : si je prends une combinaison linéaire de e un et de e deux, et que il se trouve que cette combinaison-là est proportionnelle à e un, ça veut dire nécessairement, si les deux solutions sont linéairement indépendantes, ça veut dire nécessairement que le b doit être nul. Et à ce moment-là, c vaut un. Explicitons cela. D'abord, si j'ai cette équation-là, j'ai aussi, pour les dérivées par rapport au temps, une équation comme ceci, avec les dérivées par rapport au temps des fonctions.

Notes

Summary

4m 21s

Définition : base standard

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\dot{W} = \cancel{\dot{e}_1\dot{e}_2} + \underbrace{e_1\ddot{e}_2}_{-e_1 G e_2} - \underbrace{\ddot{e}_1 e_2}_{+e_1 G e_2} - \cancel{\dot{e}_1\dot{e}_2} = 0$$

$e_1(t)$ $\qquad$ $e_2(t)$

$e_1(0) = x_0$ $\qquad$ $e_2(0) = 0$

$\dot{e}_1(0) = 0$ $\qquad$ $\dot{e}_2(0) = v_0$

linéairement indépendantes :

$$e_1 + be_2 = ce_1 \implies b = 0 \text{ et } c = 1$$

Mécanique | 2013 $\quad$ 32

Maintenant, je vais écrire ce système d'équation-là de façon matricielle. Le voici. Et maintenant, je peux regrouper les termes et l'écrire ainsi. Maintenant, si cette matrice-là est invertible, alors j'aurai un moins c et b qui vaut cette, la matrice inverse fois le zéro. Et on sait que cette matrice est invertible si son déterminant est non nul, donc il faut se préoccuper du déterminant. Alors par chance, une propriété de ce déterminant, c'est que ça, il est indépendant du temps. Donc, on va pouvoir le calculer, notamment en prenant les valeurs à t égale zéro. Prouvons d'abord que ce déterminant est indépendant du temps. Alors, ici je calcule la dérivée par rapport au temps de W. W qu'on appelle wronskien a un terme en e un, e deux point. Donc la dérivée par rapport au temps va faire apparaître un e un point, e deux point, c'est ce terme-là. Un e un, e deux point point, il est là, moins e un point point e deux, il est là, et encore moins e un, e deux point, il est là. Ces deux termes s'annulent. Il me reste ce terme-là. Mais celui-là, je peux l'écrire e un avec moins G fois e deux, et ce terme-là, je peux l'écrire plus e un fois G, fois e deux. Et donc, ces deux termes s'annulent.

Notes

Summary

6m 04s

Définition : base standard

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\dot{W} = \dot{e}_1\dot{e}_2 + e_1\ddot{e}_2 - \ddot{e}_1 e_2 - \dot{e}_1\dot{e}_2 = 0$$

$$W = x_0 v_0 \neq 0$$

$e_1(t)$ $\qquad$ $e_2(t)$

$e_1(0) = x_0$ $\qquad$ $e_2(0) = 0$

$\dot{e}_1(0) = 0$ $\qquad$ $\dot{e}_2(0) = v_0$

linéairement indépendantes :

$$e_1 + be_2 = ce_1 \implies b = 0 \text{ et } c = 1$$

On a bien que la dérivée par rapport au temps de W est nulle, donc W est une constante. Je peux la calculer à t égale zéro, c'est ce terme fois ce terme moins celui-là. Donc, W vaut x zéro, v zéro. Et on a choisi des solutions non triviales, donc x zéro et v zéro, les deux sont non nuls, et donc le W, il est différent de zéro. Par conséquent, il faut que un moins c soit nul, et b égale zéro, c'est ce que qu'on avait exprimé ici. Donc, e un et e deux sont des solutions linéairement indépendantes.

Notes

Summary

7m 58s

Espace vectoriel des solutions

$$x(t) = ae_1(t) + be_2(t)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Mécanique | 2013 37

Je vais maintenant définir l'espace vectoriel des solutions. Je le fais de la manière suivante. Si x de t est une solution, alors je peux écrire x de t comme une combinaison linéaire des deux fonctions e un et e deux, c'est ce que j'ai écrit ici. Maintenant, mon espace vectoriel, je vais l'écrire comme un espace à deux dimensions où les vecteurs ont les composantes a et b. Et tous ces vecteurs de type a et b représentent des combinaisons linéaires de e un et de e deux, donc des solutions de notre problème.

Notes

Summary

8m 44s

Translation dans le temps

$x(t)$ solution, alors

$x(t+\tau)$ aussi solution

Démonstration :

$$t' = t + \tau \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{d(t+\tau)}{dt} = \frac{dx}{dt'} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt'^2}$$

$$\ddot{x} + G(t)x = 0 \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + G(t)x(t) = 0 \qquad \frac{d^2x(t+\tau)}{d(t+\tau)^2} + G(t+\tau)x(t+\tau) = 0$$

$$\frac{d^2x(t+\tau)}{dt^2} + G(t)x(t+\tau) = 0$$

Mécanique | 2013 48

Maintenant, je vais démontrer une propriété qui est la suivante. Si x de t est une solution, alors si on translate la solution d'un temps tau, je vous rappelle que tau, c'est la période de la fonction G de t qui définit notre problème, alors, x de t plus tau est aussi une solution. Procédons à la démonstration. Je considère t prime qui vaut t plus tau. Je considère x comme une fonction de t prime, et t prime est une fonction de t. J'applique la règle de dérivation en chaîne, donc d de x sur dt, c'est d de x sur d t prime, fois la dérivée de t prime par rapport à t. Ça, ça vaut un. Donc on a la dérivée dx sur dt qui vaut dx sur d t prime. Bien sûr, pour la dérivée seconde, on a la même propriété. Maintenant, je considère cette foncti, cette équation du mouvement, et je la réécris explicitement comme ceci pour que x soit clairement une fonction de t, G une fonction de t, x fonction de t ici, et maintenant je vais exprimer cette fonction à un autre temps. Ça c'est vrai pour tout temps, je vais exprimer ça au temps t plus tau. Ça me donne explicitement cette équation-là. Maintenant, quand on dérive par rapport à t ou à t plus tau, on a la même chose. Donc ce terme-là, je peux le simplifier, comme ceci.

Notes

Summary

9m 28s

Translation dans le temps

$x(t)$ solution, alors

$x(t+\tau)$ aussi solution

Démonstration :

$$t' = t + \tau \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{d(t+\tau)}{dt} = \frac{dx}{dt'} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt'^2}$$

$$\ddot{x} + G(t)x = 0 \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + G(t)x(t) = 0 \qquad \frac{d^2x(t+\tau)}{d(t+\tau)^2} + G(t+\tau)x(t+\tau) = 0$$

$$\frac{d^2x(t+\tau)}{dt^2} + G(t)x(t+\tau) = 0$$

cqfd

Le G de t plus tau, à cause de la périodicité de G, ça veut G de t. Et je garde le x de t plus tau. Qu'est-ce que cette équation-là me dit? Elle me dit que cette fonction-là, x de t plus tau, est une solution de l'équation dite de Hill. Donc j'ai démontré ce que je voulais.

Notes

Summary

11m 23s

Matrice d'avancée d'une période

$$x(t) = ae_1(t) + be_2(t)$$
$$x(t+\tau) = a'e_1(t) + b'e_2(t)$$
$$e_1(t+\tau) = r_{11}e_1(t) + r_{21}e_2(t)$$

Alors maintenant, je vais faire quelque chose qui me permet de calculer une solution à un temps avancé en fonction d'un temps précédent. Vous allez voir comment ça fonctionne et comment ça peut se faire de façon matricielle. J'ai x de t qui est une solution. Je le projette, sur e un et e deux. Et maintenant je considère la fonction translatée de tau. Je sais que c'est une fonction qui est solution aussi, je viens de le montrer. Alors je la projette sur ma base standard, e un de t, e deux de t. Je vais faire maintenant le même exercice avec la base, je considère la fonction e un translatée de tau, et je vais l'écrire avec deux coefficients, comme ici j'avais utilisé a et b, je vais utiliser des coefficients r un, un et r deux, un, parce que je vais définir une matrice et j'ai mis les indices pour qu'ils correspondent à notre convention habituelle de notation de produit matriciel.

Notes

Summary

11m 46s

Matrice d'avancée d'une période

$$x(t) = ae_1(t) + be_2(t)$$
$$x(t+\tau) = a'e_1(t) + b'e_2(t)$$
$$e_1(t+\tau) = r_{11}e_1(t) + r_{21}e_2(t)$$
$$e_2(t+\tau) = r_{12}e_1(t) + r_{22}e_2(t)$$

$$x(t+\tau) = ae_1(t+\tau) + be_2(t+\tau) = a[r_{11}e_1(t) + r_{21}e_2(t)] + b[r_{12}e_1(t) + r_{22}e_2(t)]$$
$$= (ar_{11} + br_{12})e_1(t) + (ar_{21} + br_{22})e_2(t)$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}(t+\tau) = R\mathbf{x}(t)$$

Pour e deux, je vais aussi mettre deux coefficients, donc e deux translaté de tau, je l'écris projeté sur e un et e deux, grâce à cette définition-là, maintenant si je considère x de t plus tau, en regardant cette formule-là, je peux mettre à la place de t partout t plus tau, ça me donne ceci, maintenant e un de t plus tau, je l'ai réécrite en fonction de e un de t et e deux de t, de même pour e deux de t plus tau, voilà le terme proportionnel à a, le terme proportionnel à b, maintenant je regroupe les termes en e un et en e deux, ça me donne ceci. Et ça, ça doit être mon a prime, et ça, ça doit être mon b prime, que j'avais défini ici. Alors je peux écrire cette relation de façon matricielle, je peux écrire que a prime et b prime, c'est cette matrice r avec les coefficients dans cet ordre-là, fois ab. Si je veux simplifier les écritures, le vecteur x qui correspond à a prime, b prime, j'écris fonction de t plus tau pour me rappeler qu'il s'agit de la solution x translaté dans le temps, c'est cette matrice r, fois le vecteur ab, qui est la solution au temps t. Donc j'ai une relation ici entre la solution au temps t plus tau et la solution au temps t. C'est cette relation-là qui va me permettre d'analyser les stabilités du système.

Notes

Summary

13m 02s

Matrice d'avancée d'une période

$$e_1(t+\tau) = r_{11}e_1(t) + r_{21}e_2(t) \qquad \dot{e}_1(t+\tau) = r_{11}\dot{e}_1(t) + r_{21}\dot{e}_2(t)$$

$$e_2(t+\tau) = r_{12}e_1(t) + r_{22}e_2(t) \qquad \dot{e}_2(t+\tau) = r_{12}\dot{e}_1(t) + r_{22}\dot{e}_2(t)$$

$$R = \begin{pmatrix} e_1(\tau)/x_0 & e_2(\tau)/x_0 \\ \dot{e}_1(\tau)/v_0 & \dot{e}_2(\tau)/v_0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{vmatrix} = x_0 v_0 \qquad det(R) = \frac{e_1(\tau)\dot{e}_2(\tau) - \dot{e}_1(\tau)e_2(\tau)}{x_0 v_0} = 1$$

Mécanique | 2013 66

Alors, je vais commencer par exprimer cette matrice r en fonction des conditions initiales. Que je m'était données pour e un et e deux. Voilà, je rappelle la définition des coefficients r un, un, r deux un, r un, deux et r deux, deux. Je peux dériver ces fonctions par rapport au temps, ça me donne ceci. Et maintenant je prends ces relations au temps t égale zéro, et je vois si je prends par exemple ici t égale zéro, ce e un de t vaut x zéro, ceci est nul, et là on a e un de tau. Donc e un de tau divisé par x zéro, ça fait r un, un. C'est ce que j'ai écrit ici. Avec le même raisonnement, vous trouvez les autres coefficients. De la matrice. Les autres éléments de la matrice. Maintenant, on note que le déterminant de r c'est donc ça fois ça, moins ça fois ça, je retrouve ici le terme w, le wronskien, qui, je vous le rappelle, valait x zéro, v zéro, donc le déterminant de r vaut un, ça c'est une propriété qu'on va utiliser par la suite.

Notes

Summary

15m 03s

Résonance paramétrique

$$t = n\tau + t' \qquad \mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t')$$

Diagonalisation : $R = U^{-1} R_D U$

$$\mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t') = U^{-1} R_D^n U \mathbf{x}(t')$$

$$R^n = RRR\cdots = U^{-1} R_D \underbrace{U U^{-1}}_{\mathbb{1}} R_D U \cdots$$

Maintenant, pour comprendre la résonance paramétrique, il suffit de faire le petit raisonnement suivant. J'imagine que je connais ma fonction x de t pour un temps t que j'ai noté t prime, petit. Et maintenant j'aimerais savoir qu'est-ce qu'il se passe beaucoup plus tard dans le temps. Donc un temps t. Je peux écrire t comme un certain nombre de périodes, plus t prime. Alors, la solution au temps t, c'est R à la puissance n, vous appliquez R n fois, sur la solution x au temps t prime. Alors maintenant on va analyser ce que vaut cette matrice R à la puissance n. On va diagonaliser R, donc on va supposer, et on va la trouver, cette, on va faire cette diagonalisation, on a R qu'on peut écrire comme un produit U moins un, R diagonale fois U, à ce moment-là, x, c'est R à la puissance n, et là c'est facile de voir, on peut le faire comme ceci, R à la puissance n, c'est R fois R, fois R, et cetera, on peut écrire ça comme U moins un, RD U, U moins un, RDU, et cetera, hein, j'ai rajouté simplement la matrice un ici, et donc il nous reste plus que le U moins un au début, le U à la fin et RD à la puissance n, si RD est une matrice diagonale, il suffit de mettre à la puissance n les éléments sur la diagonale.

Notes

Summary

16m 32s

Résonance paramétrique

$$\begin{pmatrix} e_1(\tau)/x_0 & e_2(\tau)/x_0 \\ \dot{e}_1(\tau)/v_0 & \dot{e}_2(\tau)/v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{e_1(\tau)}{x_0} - \rho\right)\left(\frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0} - \rho\right) - \frac{\dot{e}_1(\tau)e_2(\tau)}{x_0 v_0} = 0$$

$$\rho^2 - \rho\left(\frac{e_1(\tau)}{x_0} + \frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0}\right) + 1 = 0$$

$$T = Tr(R) = \frac{e_1(\tau)}{x_0} + \frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0} = \rho_+ + \rho_-$$

$$t = n\tau + t' \qquad \mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t')$$

$$\text{Diagonalisation}: \; R = U^{-1} R_D U$$

$$\mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t') = U^{-1} R_D^n U \mathbf{x}(t')$$

$$R_D = \begin{pmatrix} \rho_+ & 0 \\ 0 & \rho_- \end{pmatrix}$$

$$det(R) = \rho_+ \rho_- = 1$$

Mécanique | 2013 78

Et je vais écrire ces éléments diagonaux, rhô plus et rhô moins. On se souvient que le déterminant de R, vaut un, donc rhô plus fois rhô moins égale un. Ça c'est une propriété qui va être très importante pour cette question de stabilité, comme vous allez le voir. Alors maintenant, je me lance dans le calcul de rhô plus et de rhô moins, donc je cherche au fond, vous voyez, je dois calculer le problème aux valeurs propres et vecteurs propres, rhô c'est la valeur propre, je cherche le vecteur a et b à associer, j'ai cette matrice fois le vecteur qui vaut un nombre fois le vecteur, c'est bien donc un problème de valeurs propres. Quand j'effectue le détail du calcul, donc je passe ces termes-là de l'autre côté du signe égale, et je cherche un déterminant nul pour que j'aie des solutions ab non-triviales, alors j'ai ces deux termes qui apparaissent. Dans ce terme-là, j'ai, dans ce produit, ces deux éléments, j'ai rhô carré qui apparaît, j'ai le terme de produit mixte, qui est ici, et à la fin, j'ai un e un fois e deux point, or ça, c'est notre w encore une fois, qui valait x, zéro, v, zéro, donc là il y a le un. Ce terme-là, c'est la somme de ces deux termes, c'est donc ce qu'on appelle la trace de la matrice, et ça vaut rhô plus, plus rhô moins.

Notes

Summary

18m 30s

Résonance paramétrique

$$\begin{pmatrix} e_1(\tau)/x_0 & e_2(\tau)/x_0 \\ \dot{e}_1(\tau)/v_0 & \dot{e}_2(\tau)/v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{e_1(\tau)}{x_0} - \rho\right)\left(\frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0} - \rho\right) - \frac{\dot{e}_1(\tau) e_2(\tau)}{x_0 v_0} = 0$$

$$\rho^2 - \rho\left(\frac{e_1(\tau)}{x_0} + \frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0}\right) + 1 = 0$$

$$T = Tr(R) = \frac{e_1(\tau)}{x_0} + \frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0} = \rho_+ + \rho_-$$

$$\rho_\pm = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$$

$$t = n\tau + t' \qquad \mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t')$$

$$\text{Diagonalisation :} \quad R = U^{-1} R_D U$$

$$\mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t') = U^{-1} R_D^n U \mathbf{x}(t')$$

$$R_D = \begin{pmatrix} \rho_+ & 0 \\ 0 & \rho_- \end{pmatrix}$$

$$det(R) = \rho_+ \rho_- = 1$$

Maintenant, si je récris ici T et que je cherche les solutions rhô plus et rhô moins, j'ai T plus ou moins racine de T carré moins quatre, le tout divisé par deux. Alors maintenant, on va tout de suite voir comment apparaissent des solutions qui divergent, des solutions instables.

Notes

Summary

20m 23s

Solutions instables

$$\rho_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$$

$$T^2 > 4$$

$$\mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t')$$

$$n \to \infty \implies \rho_i^n \to \infty \quad (i = + \text{ ou } -)$$

Mécanique | 2013 84

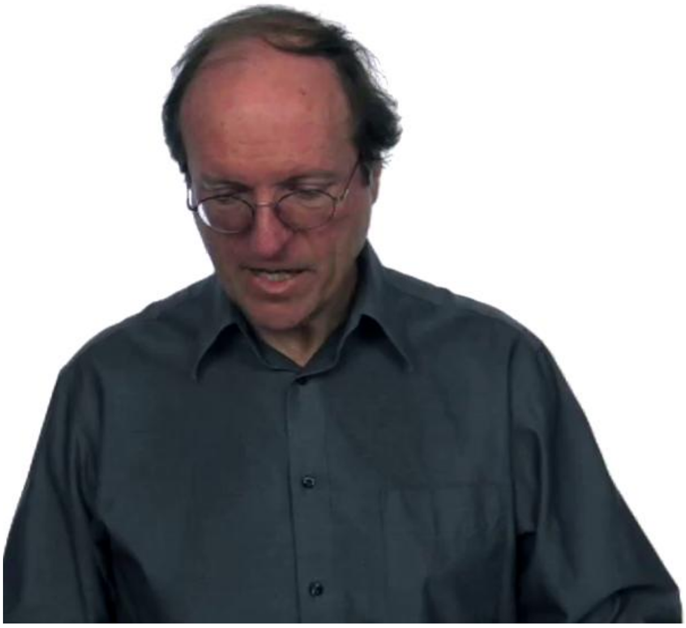
En effet, si on considère ces so, solutions-là avec un T carré qui est plus grand que quatre, rhô plus et rhô moins réels, donc, je rappelle cette formule-là, quand on va chercher un T très grand, n est très grand, on va avoir rhô plus à la puissance n et rhô moins à la puissance n qui interviennent. Maintenant, comme rhô plus fois rhô moins vaut un, vous avez rhô plus, qui vaut un sur rhô moins. Si une racine est plus grande que un, on verra après le cas de la racine qui vaut un, mais si une racine vaut, est plus grande que un, l'autre est plus petite que un. Des deux, il y en a toujours une qui diverge. Donc on a un système qui devient instable.

Notes

Summary

20m 45s

Solutions stables



$$\rho_\pm = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$$

$$T^2 < 4$$

$$\rho_\pm = \frac{T \pm i\sqrt{4 - T^2}}{2}$$

$$|\rho\pm| = 1$$

$$\rho_\pm = e^{\pm i\phi}$$

Mécanique | 2013 90

Maintenant je regarde les cas stables. Je considère cette formule pour rhô plus et moins et je prends le cas T carré est plus petit que quatre. À ce moment-là, mon rhô plus, je peux l'écrire comme T plus ou moins i fois la racine de quatre moins T carré, ça c'est un nombre réel. On remarque que le module de rhô plus et de rhô moins il faut calculer T carré plus quatre moins T carré, divisé par quatre, ça fait un, le module vaut un. Donc, je peux écrire mon rhô plus, moins comme e à la puissance plus ou moins i, phi. Maintenant, il y a des propriétés particulières qui interviennent.

Notes

Summary

21m 42s

Solutions stables

$$\rho_\pm = e^{\pm i\phi} \qquad \phi \neq 0 \text{ et } \phi \neq \pi$$

changement de base pour diagonaliser R :

$$\{e_1(t), e_2(t)\} \to \{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t)\}$$

$$\bar{e}_k(t+\tau) = e^{\pm i\phi}\bar{e}_k(t) \quad (k = 1, 2)$$

$$\bar{e}_k(t) = e^{\pm i\phi t}u_k(t) \quad (k = 1, 2)$$

$u_k(t)$ est une fonction périodique, de période τ

Démonstration :

$$u_k(t) = e^{\mp i\phi t/\tau}\bar{e}_k(t)$$

$$u_k(t+\tau) = e^{\mp i\phi t/\tau}e^{\mp\phi}\bar{e}_k(t+\tau)$$

Mécanique | 2013 98

Je vais considérer le cas où rhô plus, moins vaut e puissance plus ou moins i, phi et phi est différent de zéro et pi, on traitera ces deux cas à la fin. Dans ce cas-là, j'imagine que mon changement de base passe de la base standard à la base des vecteurs propres de la matrice R, et j'ai donc cette propriété que si je prends le vecteur de base e, k translaté de tau, j'ai un e puissance plus ou moins i, phi dépendant que je prends une ou l'autre des solutions, fois la fonction de base au temps t. Maintenant, je choisis d'écrire cette fonction comme e puissance i, phi de t fois u, k de t, c'est ce qu'avait fait Floquet et cette théorie est connue comme la théorie de Floquet. Si on fait ceci, on peut se convaincre que u, k de t est une fonction périodique. Dans un autre cadre théorique, c'est ce qu'on appelle le théorème de Bloch. Je vais le démontrer, le fait que u, k est une fonction périodique de période tau, il suffit d'écrire la définition de u, k de t comme ceci. Ceci est vrai pour tout t. Je vais prendre pour t la valeur t plus tau, donc j'écris ça, ici je mets un t plus tau et t plus tau. Maintenant, là, j'observe le terme que je peux déduire de cette relation-là.

Notes

Summary

22m 30s

Solutions stables

$$\rho_{\pm} = e^{\pm i\phi} \qquad \phi \neq 0 \text{ et } \phi \neq \pi$$

changement de base pour diagonaliser R :

$$\{e_1(t), e_2(t)\} \rightarrow \{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t)\}$$

$$\bar{e}_k(t+\tau) = e^{\pm i\phi}\bar{e}_k(t) \quad (k = 1, 2)$$

$$\bar{e}_k(t) = e^{\pm i\phi t}u_k(t) \quad (k = 1, 2)$$

$u_k(t)$ est une fonction périodique, de période τ

Démonstration :

$$u_k(t) = e^{\mp i\phi t/\tau}\bar{e}_k(t)$$

$$u_k(t+\tau) = e^{\mp i\phi t/\tau}e^{\mp\phi}\bar{e}_k(t+\tau) = e^{\mp i\phi t/\tau}\bar{e}_k(t) = u_k(t)$$

Mécanique | 2013 99

Donc j'ai un e, k de t, qui apparait ici, et j'ai donc ce terme qui reste, ceci qui se simplifie comme étant e, k de t et maintenant e puissance moins ou plus i, phi de t fois e, k, ça fait u, k de t. Alors je viens de dire que u, k de t plus tau est égal à u, k de t, c'est donc dire que u, k est une fonction périodique de période tau. Donc voilà que là, on a toute une série de solutions bornées.

Notes

Summary

24m 15s

Solutions stables

$\phi = 0$ $\qquad \bar{e}_k(t+\tau) = e^{\pm i\phi}\bar{e}_k(t)$

$\bar{e}_k(t+\tau) = \bar{e}_k(t)$

les fonctions $\bar{e}_k(t)$ sont des ***fonctions de période*** τ

$\phi = \pi$

$\bar{e}_k(t+2\tau) = (-1)^2\bar{e}_k(t)$

les fonctions $\bar{e}_k(t)$ sont des ***fonctions de période*** 2τ

Mécanique | 2013 107

Je dois encore traiter le cas où phi égal zéro. Si phi égal zéro, et bien, on voit tout de suite qu'on a e, k translaté de tau qui est égal à e, k. C'est dire qu'on a des fonctions de période tau. Je vous rappelle que tau, c'est la période de cette fonction g de t qui caractérise comment le paramètre de mon système dynamique oscille. Si maintenant je prends phi égal pi, j'ai un e puissance moins i, pi qui apparait, qui vaut moins 1, donc il faut avancer de deux tau pour retrouver la fonction. On a donc une fonction périodique de période deux tau. Alors, comme on le verra dans le module suivant, l'analyse d'un cas particulier peut devenir assez lourde mais dans le cas que je vais montrer, ces fonctions-là, celles qui correspondent à phi égal zéro et phi égal pi, elles sont ce qu'on appelle des fonctions propres de l'équation de Mathieu, elles délimitent la, le, le régime stable du régime instable. C'est ce qu'on va voir dans le module suivant.

Notes

Summary

24m 49s