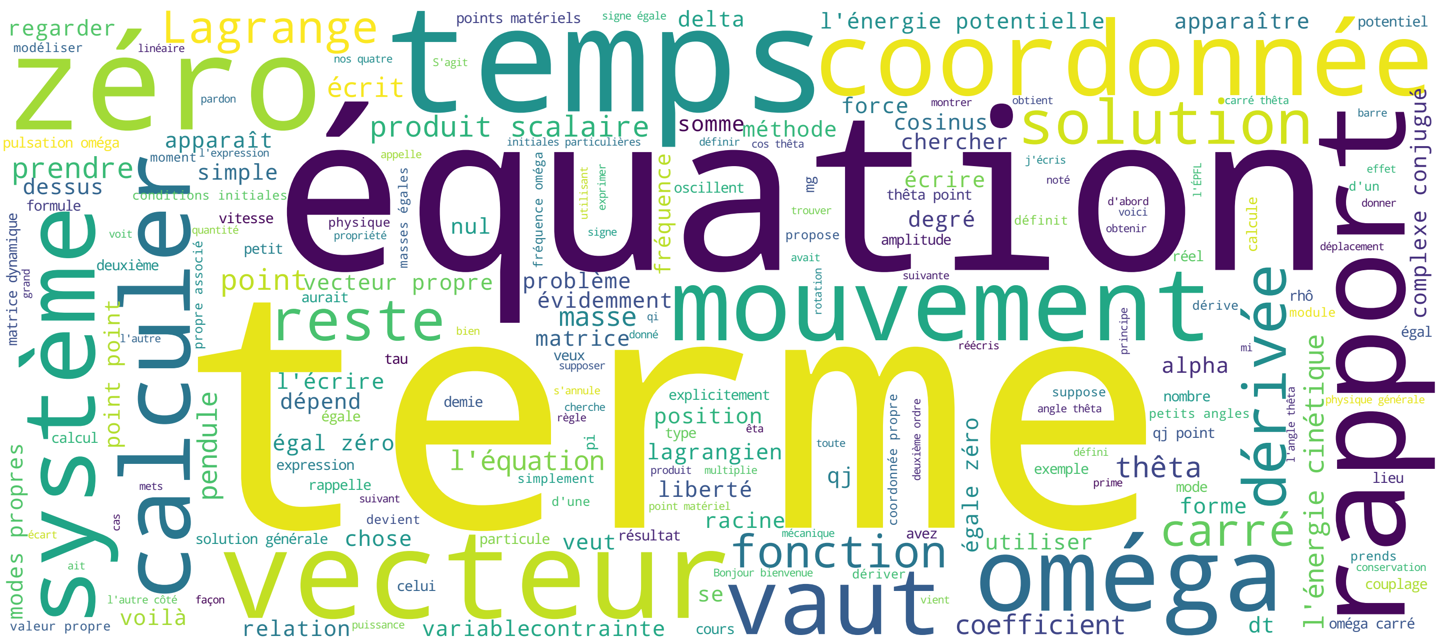
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Pendules couplés

**Mécanique, cours 27.2**

Jean-Philippe Ansermet

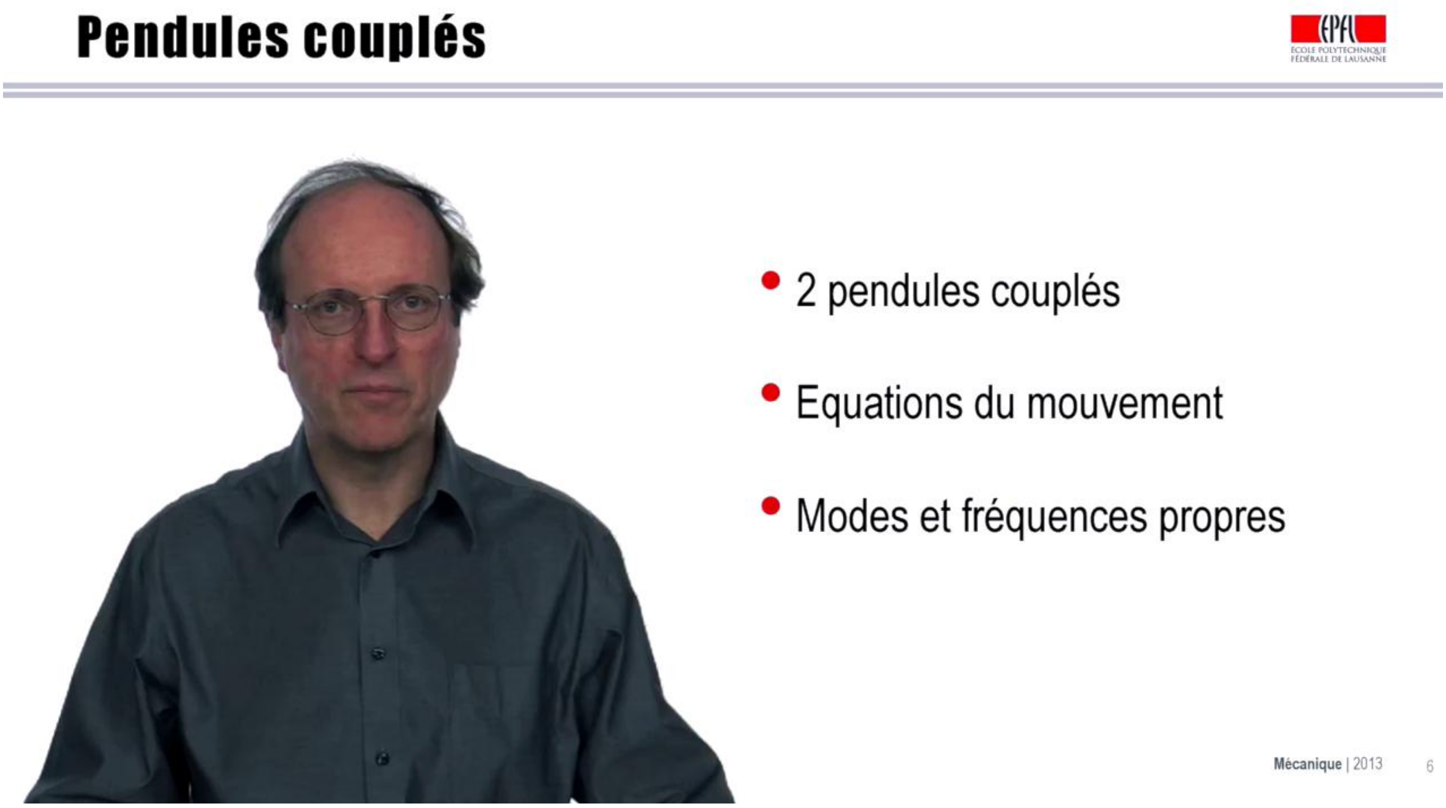
http://go.epfl.ch/traite-meca-5-6




Search MOOC

Video

EPFL



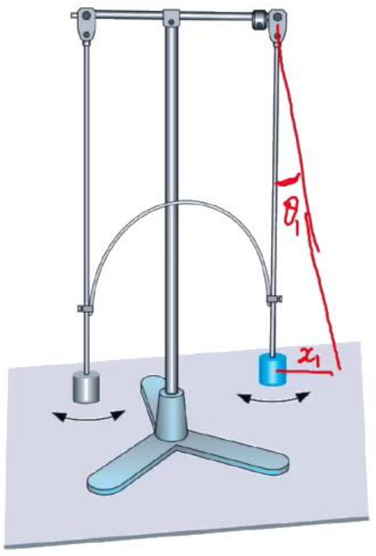

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans ce module, on va regarder le cas particulier de deux pendules couplés, on va regarder les petits oscillations de ces pendules, on va utiliser la méthode de Lagrange pour obtenir les équations du mouvement, et on va chercher les modes propres et les fréquences propres de ce système.

Notes

Summary

0m 03s

# Pendules couplés : Lagrange




Coordonnées : écarts à l'équilibre $x_1$ et $x_2$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

Pesanteur, énergie potentielle d'un pendule :

$$V_1 = mg\ell(1-\cos\theta_1) \approx mg\ell\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\theta_1^2\right)$$



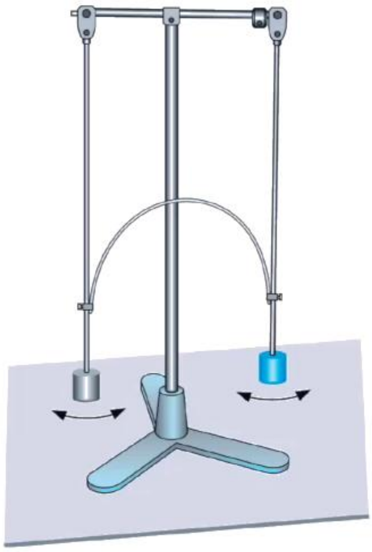
Alors voilà une image de ce système, vous avez deux masses égales, il y a une articulation ici, on va négliger la masse de la barre, on va supposer qu'on a des points matériels, et puis on a une lame ici, une lame ressort qui définit le couplage entre les deux pendules. On va utiliser la méthode de Lagrange, on suppose que les deux pendules oscillent dans un plan horizontal, on a donc deux degrés de liberté, et on va prendre comme coordonnées les écarts, ici on a des petits angles et chaque, on peut prendre la coordonnée cartésienne qui représente l'oscillation de chacune des masses, on a donc une coordonnée x un et x deux. On va prendre des masses égales, ce qui va grandement simplifier le, le calcul de la matrice dynamique. L'énergie cinétique, on peut immédiatement l'écrire, avec les coordonnées cartésiennes, et maintenant pour l'énergie potentielle, si on introduit par exemple, pour le pendule numéro un ici, un angle thêta un, on a évidemment si on prolonge ici, x un mais on va prendre la limite quand thêta un tend vers zéro, hein, là on a un certain angle.

Notes

Summary

0m 24s

# Pendules couplés : Lagrange



Coordonnées : écarts à l'équilibre $x_1$ et $x_2$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2$$

Pesanteur, énergie potentielle d'un pendule :

$$V_1 = mg\ell(1-\cos\theta_1) \approx mg\ell\left(1-1+\frac{1}{2}\theta_1^2\right)$$

Petits angles : $\theta_1 \approx \frac{x_1}{\ell}$

Couplage, énergie potentielle (choix) :

$$\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2$$



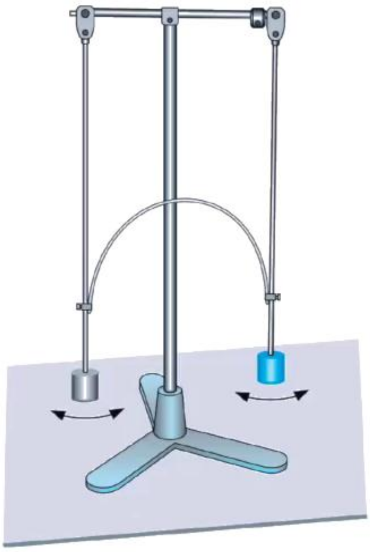
Alors on a l'habitude d'écrire l'énergie potentielle pour un pendule, c'est un terme comme ceci, maintenant on va prendre des petits angles, donc on va faire une approximation du cosinus, et on doit aller chercher le deuxième ordre, on a un moins pour le cosinus et un moins une demie de thêta un au carré, avec le moins ça devient un plus, et si maintenant on écrit que l'angle thêta un ça vaut x un sur L, c'est une relation de trigonométrie toute simple qu'on a souvent utilisée, on peut écrire l'énergie potentielle et l'énergie cinétique avec la coordonnée thêta un. Pour le couplage qui est défini par cette lame vibrante, on va modéliser le système avec l'expression la plus simple qu'on puisse imaginer pour représenter cette action-là, et je propose de prendre simplement un terme comme ceci, on verra qu'en effet ce terme donne lieu à un couplage qui, qui a, qui est linéaire, qui donne lieu à des équations linéaires, et qui représente bien les effets qu'on cherche à modéliser.

Notes

Summary

2m 03s

# Pendules couplés : Lagrange



Coordonnées : écarts à l'équilibre $x_1$ et $x_2$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2$$

Pesanteur, énergie potentielle d'un pendule :

$$V_1 = mg\ell(1 - \cos\theta_1) \approx mg\ell\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\theta_1^2\right)$$

Petits angles : $\theta_1 \approx \frac{x_1}{\ell}$

Couplage, énergie potentielle (choix) :

$$\frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_1^2 - \frac{1}{2}\left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_2^2 + kx_1x_2$$

**Mécanique** | 2013 14

Pour calculer le lagrangien, je vais l'exprimer avec les coordonnées x un, x deux, donc j'ai l'énergie cinétique ici, j'ai l'énergie potentielle de la masse un, ici, exprimée avec la coordonnée x un, le potentiel pour la masse deux a la même forme, c'est ce terme-là, et puis le terme de couplage, il apparaît ici avec un terme k x un, x deux, le terme en x un au carré, je l'ai regroupé avec le terme en mg, comme ceci, pour la particule un et pour la particule deux. Voilà mon lagrangien pour un système à deux degrés de liberté, avec les coordonnées x un et x deux.

Notes

Summary

3m 36s

# Pendules couplés : équations du mouvement

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_1^2 - \frac{1}{2}\left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_2^2 + \underline{k x_1 x_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_1 + k x_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + \left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_1 - k x_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + \left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_2 - k x_1 = 0$$



S'agit maintenant de calculer les équations du mouvement en utilisant les équations de Lagrange, alors, pour arriver, voilà le résultat. Pour y arriver, qu'est-ce qu'on doit faire? On doit calculer d de L, pardon, d de L sur d de x un, point, alors in a évidemment un m x un point ici. Et après on doit faire la dérivée par rapport au temps, de d de L sur d de x un point, ça va évidemment nous donner m x un point point, c'est très simple, on doit calculer d de L sur d de x un, alors il y a un terme qui vient ici, k plus mg sur L, fois x un, avec un signe moins, et ce terme-là donne aussi un terme k x deux. Maintenant, d de, d sur dt de d de L sur d de xi point, moins d de L sur d de xi égale zéro, ça c'est l'équation de Lagrange, donc on a ce terme-là dérivé par rapport au temps, moins ce terme-là qui est égal à zéro, et la même chose pour la coordonnée x deux, donc on a ce terme-là. Vous remarquez que si on n'avait pas ce terme de couplage, s'il n'y avait pas ce terme-là, ici on aurait une équation pour x un seulement, et là pour x deux seulement, on pourrait résoudre pour l'un et pour l'autre indépendamment, ce qui complique les choses et qui rend la physique plus intéressante et qui rend compte des phénomènes qu'on observe quand on étudie des pendules couplées, c'est ce terme-là. Ce terme-là couple les deux équations du mouvement.

Notes

Summary

4m 27s

# Fréquences propres

$$m\ddot{x}_1 + \left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_1 - k x_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + \left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_2 - k x_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$m\omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + \frac{mg}{\ell} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = \left(k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2\right)^2 - k^2 \;\; = \left(\cancel{k} + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \cancel{- k}\right)\left(k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 + k\right)$$

$$\omega_1 = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \omega_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}$$

Mécanique | 2013 24

Alors, suivant la méthode générale, on a ici les équations du mouvement, on va chercher des solutions, les modes propres qui sont des vecteurs x un, x deux, qui oscillent à une pulsation oméga donnée. Alors on écrit des amplitudes a un et a deux, on dérive deux fois par rapport au temps, ce qui fait apparaître un moins oméga carré, alors ici j'ai mis plus parce que j'ai passé ces termes de l'autre côté du signe égale, j'écris ça sous forme, ces équations-là, ces termes-là sous forme matricielle, et j'ai donc ici ma matrice dynamique. Maintenant on a simplement un coefficient m, on n'a pas besoin de se préoccuper plus avant de l'existence de ce coefficient-là. Je peux regrouper tous ces termes-là, si je veux des solutions a un et a deux non-triviales, il faut que cette matrice-là ait un déterminant nul. Ce qui donne l'équation caractéristique suivante: c'est ce terme fois ce terme moins k carré, ce que je peux écrire comme ceci, hein, on a les mêmes termes ici et là. Ça, c'est du type a carré moins b carré, je peux l'écrire a moins b fois a plus b. Ici je vois apparaître les solutions. J'ai donc, si ce terme-là est nul, j'ai un oméga un qui vaut, ces deux termes s'annulant, il me reste simplement oméga égale plus ou moins racine de g sur L, et ici j'ai deux k.

Notes

Summary

6m 42s

# Fréquences propres

$$m\ddot{x}_1 + \left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_1 - kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + \left(k + \frac{mg}{\ell}\right) x_2 - kx_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$m\omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + \frac{mg}{\ell} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = \left(k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2\right)^2 - k^2 = \left(\cancel{k} + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \cancel{-k}\right)\left(k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 + k\right)$$

$$\omega_1 = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \omega_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}$$

Mécanique | 2013 24

Donc j'ai cette racine-là qui apparaît. Et encore une fois, on a un plus ou moins. On pourrait s'étonner d'avoir ici un terme qui dépend de k, mais là un terme qui ne dépend pas de k. Quand on aura calculé les amplitudes a un et a deux, on comprendra mieux pourquoi un des modes ne dépend pas de k.

Notes

Summary

8m 40s

# Modes propres

$$\begin{pmatrix} k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$ka_1 - ka_2 = 0$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}$$

$$-ka_1 - ka_2 = 0$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Je réécris mon équation caractéristique, j'ai deux solutions, si maintenant je prends oméga un dans cette équation-là, de la première équation ici, j'ai ce terme-là qui s'annule avec celui-là, il me reste k fois a un, moins k fois a deux, égale zéro. Ça veut dire a un égale a deux. Donc mon vecteur propre associé à cette valeur propre c'est un, un, qu'on pourrait normaliser si on voulait, pour ce mode-là si on met oméga carré là-dedans, il me reste k moins deux k. Ça fait k moins k. Donc maintenant on a moins k fois a un, moins k fois a deux, qui est nul. Ce que j'ai écrit ici. Ici on a a un qui vaut moins a deux. a un au moins a deux. Donc, on a des vecteurs propres comme ceci. Ça, c'est le vecteur propre associé à cette valeur propre.

Notes

Summary

9m 06s

# Solution générale et coordonnées propres

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1\, e^{+i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_{-1}\, e^{-i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2\, e^{+i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A_{-2}\, e^{-i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A^*_{-1} \qquad A_2 = A^*_{-2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2$ : pulsation $\omega_1$



La solution générale, on peut l'écrire comme ceci : la solution générale pour x un, x deux, c'est une combinaison linéaire des modes propres avec la fréquence plus oméga un ou moins oméga un et le vecteur propre un, un. On a aussi plus oméga deux, moins oméga deux avec le vecteur propre un, moins un. On veut des solutions réelles. Donc il faut que toute cette expression-là donne x un et x deux réels. Une façon de le faire, c'est la, de s'assurer de prendre pour a moins un le complexe conjugué de a un, parce que là on a déjà le complexe conjugué, les, ces termes-là sont complexes conjugués l'un de l'autre. Si on assure aussi que a moins un soit le complexe conjugué de a un, à ce moment-là, on a des termes qui sont de l'ordre du type, un nombre complexe plus son complexe conjugué, ça fait deux fois la partie réelle de ce nombre, et ça, c'est réel. Donc, on va imposer cette règle-là sur les coefficients a un et a moins un et a deux et a moins deux, pour assurer la réalité. On aurait aussi pu écrire x un, x deux explicitement avec des fonctions réelles en introduisant des phases comme on l'avait fait pour l'oscillateur harmonique tout simple. On remarque que si je calcule x un plus x deux, ces termes s'annulent.

Notes

Summary

10m 10s

# Solution générale et coordonnées propres

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1\, e^{+i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_{-1}\, e^{-i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2\, e^{+i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A_{-2}\, e^{-i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A^*_{-1} \qquad A_2 = A^*_{-2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2$ : pulsation $\omega_1$ $\qquad$ $x_1 - x_2$ : pulsation $\omega_2$



Donc, il ne nous reste que des termes qui oscillent à la fréquence oméga un. Donc, on voit apparaitre cette idée qu'on a une coordonnée propre qui a une pulsation bien définie oméga un. De même, si on fait x un moins x deux, c'est ces termes-là qui s'annulent, il reste ces deux, cette contribution-là, qui est à la fréquence oméga deux, la pulsation oméga deux, la coordonnée propre x un moins x deux a la pulsation oméga deux.

Notes

Summary

11m 49s

# Conditions initiales, projections

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1\, e^{+i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_{-1}\, e^{-i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2\, e^{+i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A_{-2}\, e^{-i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{-1} = A_1^*$$
$$A_{-2} = A_2^*$$

Position : $$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = (A_1 + A_{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (A_2 + A_{-2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 1)\cdot \implies \quad x_{10} + x_{20} = 2(A_1 + A_{-1})$$
$$(1\ -1)\cdot \implies \quad x_{10} - x_{20} = 2(A_2 + A_{-2})$$

Vitesse : $$\begin{pmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{pmatrix} = +i\omega_1\, (A_1 - A_{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\omega_2\, (A_2 - A_{-2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Si maintenant, on a un problème qui nous est donné avec des conditions initiales particulières, là je vous rappelle la solution générale avec ces conditions sont les coefficients. Si maintenant, on nous donne la position à t égal zéro avec x un, zéro, x deux, zéro, si je prends t égal zéro là-dedans, j'ai des un, il me reste ces termes-là. Et pour trouver les coefficients, je peux simplement multiplier cette équation-là, multiplier au sens du produit scalaire avec une fois le vecteur un, un et une fois avec le vecteur un, moins un, ce que j'ai noté ici. Un, un, produit scalaire avec l'équation. Ça vous donne, x un de zéro plus x deux de zéro, qui vaut a un plus a moins un fois deux, c'est le produit scalaire de un, un avec un, un, ça fait deux. Si je fais le produit scalaire avec un, moins un, je mets un moins un ici, produit scalaire. Je fais le même produit scalaire partout, on peut peut-être le faire comme ça, je fais agir le produit scalaire là-dessus, là-dessus, là-dessus, j'ai cette relation-là. Si maintenant, j'ai une condition initiale sur les vitesses, alors il faut dériver cette expression-là par rapport au temps, ça fait apparaître un i, oméga un ici, moins i, oméga un là, i, oméga deux, moins i, oméga deux.

Notes

Summary

12m 18s

# Conditions initiales, projections

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1\, e^{+i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_{-1}\, e^{-i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2\, e^{+i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A_{-2}\, e^{-i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{-1} = A_1^* \qquad A_{-2} = A_2^*$$

Position :

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = (A_1 + A_{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (A_2 + A_{-2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 1)\cdot \implies x_{10} + x_{20} = 2(A_1 + A_{-1})$$

$$(1\ -1)\cdot \implies x_{10} - x_{20} = 2(A_2 + A_{-2})$$

Vitesse :

$$\begin{pmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{pmatrix} = +i\omega_1\,(A_1 - A_{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\omega_2\,(A_2 - A_{-2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 1)\cdot \implies v_{10} + v_{20} = 2i\omega_1\big(A_1 - A_{-1}\big)$$

$$(1\ -1)\cdot \implies v_{10} - v_{20} = 2i\omega_2\big(A_2 - A_{-2}\big)$$



Vous prenez ensuite t égal zéro, les exponentielles disparaissent. Il vous reste ces termes-là. Et pour résoudre, on multiplie par le vecteur un, un ou le vecteur un, moins un. En multipliant par le vecteur un, un, on obtient v un, zéro plus v deux, zéro. Avec un, moins un, on a v un de zéro moins v deux de zéro. Et là, on a nos quatre équations pour nos quatre inconnues et on peut déterminer le mouvement pour ces conditions initiales particulières.

Notes

Summary

13m 54s