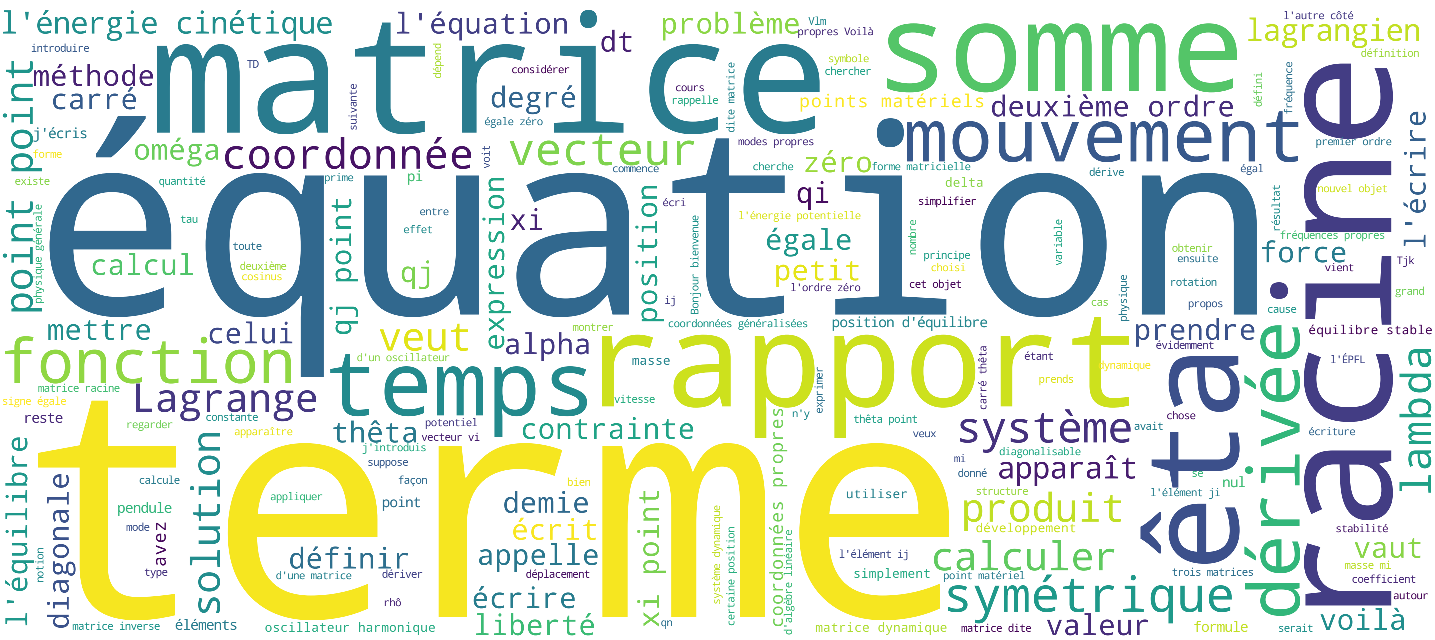
Systèmes vibratoires discrets, linéaires

Mécanique, cours 27.1

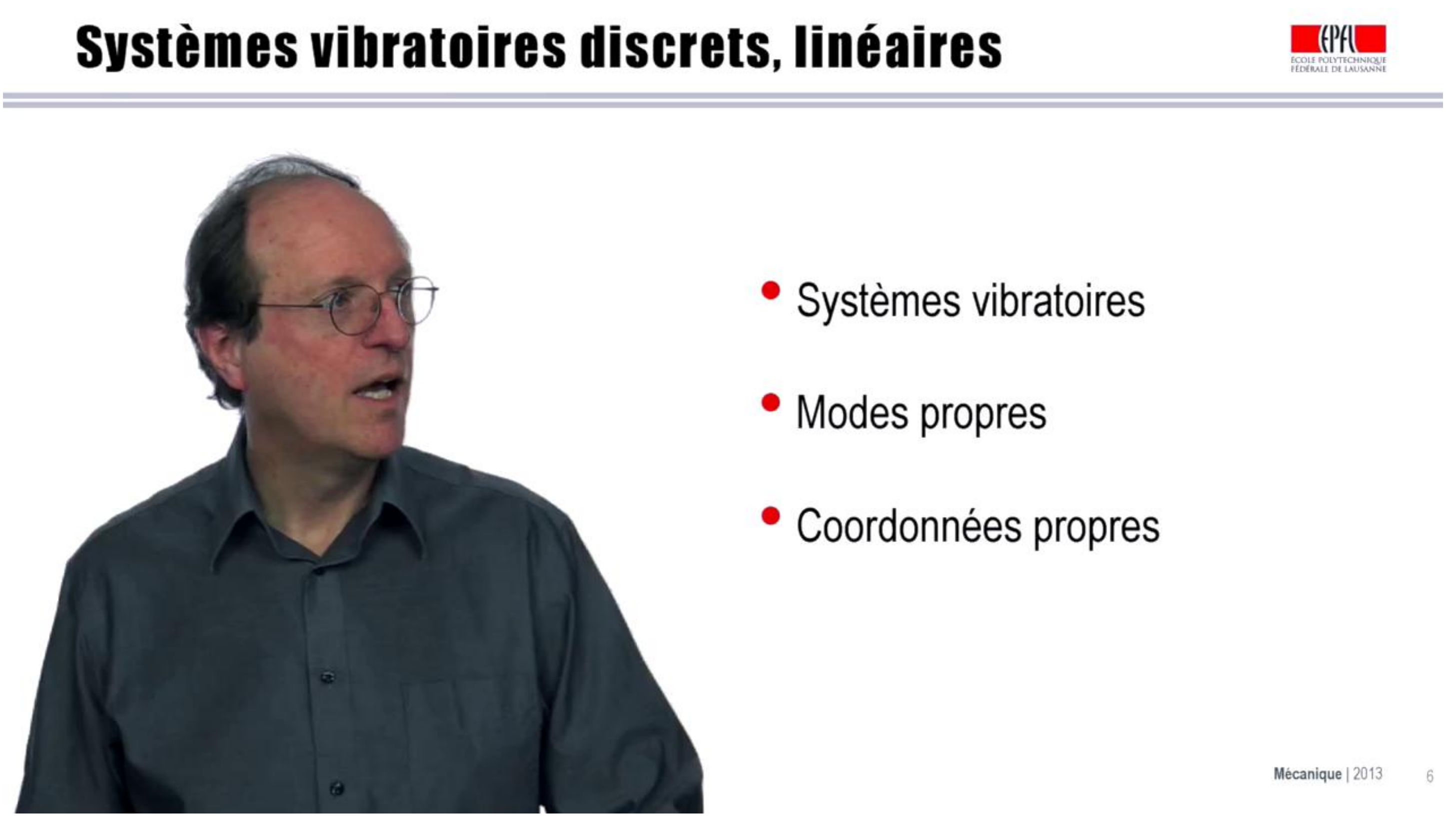
Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-5-29



Search MOOC

Video



Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, j'aimerais analyser la dynamique d'un système d'oscillateur harmonique, couplé. Je vais commencer par définir mon système vibratoire, les coordonnées que je vais utiliser, je vais utiliser la méthode de Lagrange pour obtenir les équations du mouvement, je vais ensuite montrer comment ces équations du mouvement peuvent s'exprimer de façon matricielle, et je vais définir les modes propres et les fréquences propres caractéristiques du système. Je finirai avec la définition de ce qu'on appelle les coordonnées propres de notre système dynamique.

Notes

Summary

0m 03s

Définition : systèmes vibratoires discrets, linéaires

N points matériels, masses m_i $(i = 1 \dots N)$

n degrés de liberté

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n),\ i = 1, \dots, 3N$$

Le système est en équilibre stable à $(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})$

Petites oscillations autour de cet équilibre

$$\eta_i = q_i - q_{i0} \to 0$$

Mécanique | 2013 13

J'imagine que j'ai N points matériels, grand N points matériels de masse mi. Que j'ai petit n degrés de liberté et je choisis les coordonnées q un et qn, coordonnées généralisées pour définir l'état de mon système. J'ai donc les coordonnées cartésiennes xi, de la masse mi qui sont données en fonction de q un et de qn. Je suppose, attention, là c'est une hypothèse qu'on fait, à propos de notre système dynamique, on suppose que ce système a un équilibre stable, a la position q un zéro, q deux zéro, qn zéro. Et on va regarder les petites oscillations du système autour de cet équilibre stable. Donc si on définit l'écart de la coordonnée par rapport à la position d'équilibre, on suppose qu'on a pris la limite lorsque cet écart tend vers zéro.

Notes

Summary

0m 48s

Application de la méthode de Lagrange

Energie cinétique

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_n),\ i = 1, \ldots, 3N \qquad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \quad = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

$$T_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Mécanique | 2013 20

Alors je vous propose d'utiliser la méthode de Lagrange pour obtenir les équations du mouvement, et je commence avec l'énergie cinétique. Alors, comme xi est une fonction des qi, et qi, chaque qi est fonction du temps, si je veux calculer xi point, je dois calculer la dérivée de xi par rapport aux qi, et la dérivée des qi par rapport au temps. Formellement, ça s'écrit comme ceci. Je dois calculer la dérivée de xi par rapport à qj, fois d de qj sur dt, et je somme sur toutes les coordonnées ici. Ça me donne xi point. L'énergie cinétique c'est une demie de masse fois la vitesse au carré, donc il y a les xi point au carré, j'utilise cette formule, je le réécris comme ceci en prenant la précaution d'écrire une fois somme sur j, et somme sur k, pour bien distinguer ces deux sommes. Maintenant dans cette expression de l'énergie cinétique, j'ai une somme sur i ici, des mi, les xi, qui apparaissent ici aussi. Je peux regrouper tous ces termes, et si j'appelle Tjk, la somme sur i jusqu'à trois N, des mi fois ces termes, fois ceci, alors T peut s'écrire une demie, c'est le demi que j'ai ici, Tjk, qj point, c'est ce qj point, qk point, c'est celui-là. Passons maintenant à l'énergie potentielle.

Notes

Summary

1m 53s

Energie potentielle

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \; V(q_{10}, \ldots, q_{n0}) \; + \sum_i \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\text{éq}} \eta_i \quad + \frac{1}{2}\sum_{\ell m} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}} \eta_\ell \, \eta_m$$

$$\eta_i = q_i - q_{i0}$$

Alors, là, on va faire intervenir la physique quand c'est donné à propos de ce système, on a dit qu'on avait un équilibre stable, à une certaine position. On doit maintenant exprimer l'existence de cette stabilité, à une certaine position. Pour le faire, je vais faire une approximation au deuxième ordre pour le potentiel V, autour de la position d'équilibre. À l'ordre zéro, je dirai que V est une fonction, et simplement égale à la valeur à l'équilibre. Avec ça, on ne va pas aller très loin, donc on va pousser le développement plus loin. D'abord on va faire un développement au premier ordre. Le développement au premier ordre, pour les variablesêta i qui sont l'écart par rapport à la position d'équilibre, ce serait des termes comme ceci. Maintenant, on dit que la valeur à l'équilibre, à l'équilibre, enfin, à cette position qi zéro, on est à l'équilibre. Donc ces termes-là sont nuls. C'est ça qui détermine l'équilibre. Donc on doit aller au deuxième ordre. Voilà le deuxième ordre qui apparaît comme ceci, avec des dérivées deuxième par rapport à toutes les variables, fois les écart êta l, êta m, correspondant aux variables ql et qm.

Notes

Summary

3m 41s

Application de la méthode de Lagrange

Energie potentielle

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = V(q_{10}, \ldots, q_{n0}) + \sum_i \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\text{éq}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{\ell m} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}} \eta_\ell \, \eta_m$$

$$\eta_i = q_i - q_{i0} \qquad V_{\ell m} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}} \qquad V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{\ell m} V_{lm} \, \eta_\ell \, \eta_m$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} T_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \qquad T_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right|_{\text{éq}} \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right|_{\text{éq}}$$

Lagrangien : $$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (T_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - V_{jk} \eta_j \eta_k)$$

Mécanique | 2013 31

Si maintenant j'écris ce coefficient-là Vlm, et je me souviens que ce terme est nul, et celui-là c'est un terme constant qui n'apporte rien, dans le lagrangien parce que ce qui compte avec le lagrangien c'est les dérivées qu'on va en faire, donc on peut laisser tomber ce terme-là, et je peux écrire que le V de q un, qn, c'est le une demie, qui était ici, somme sur l, et sur m, allant jusqu'à n, j'aurai pu écrire ici n, le nombre de degrés de liberté, des Vlm, fois les êta l, fois les êta m. Pour l'énergie cinétique, on avait obtenu cette expression-là, maintenant ces êta sont petits, si on veut une expression de T au deuxième ordre, il faut prendre pour Tjk ces dérivées-là, évaluées à l'équilibre aussi. Ces termes-là sont du deuxième ordre, ces termes-là doivent être de l'ordre zéro. Donc je les prends à l'équilibre, Tjk sont maintenant des constantes. Et mon lagrangien L, c'est T moins V, c'est ce terme-là moins celui-là. Ce que j'ai écris ici.

Notes

Summary

5m 16s

Application de la méthode de Lagrange

$$\text{Vecteur :} \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_\ell \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice T :} \qquad T_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right|_{\text{éq}} \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right|_{\text{éq}}$$

$$\text{Matrice V :} \qquad V_{\ell m} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}}$$

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

Pour appliquer la méthode de Lagrange, on part du lagrangien, et on doit dériver L par rapport à êta i, et puis ensuite cette dérivée-là par rapport au temps, alors quand on dérive par rapport à êta i, on a deux fois un terme qui apparaît, de type Tik, et la dérivée du êta k, est tout simplement êta k point, c'est êta k point point. Donc là il n'y a pas de gros souci pour calculer la dérivée première puis la dériver par rapport au temps, on a simplement des termes comme ça, il nous reste une somme, et ici on a le même argument, on a une double somme, on peut prendre un terme, comme on a un terme qui apparaît pour chacune des sommes, on a deux fois les même terme, donc le terme deux, le terme une demie, tombe, et on a ceci, qui est indicé par i, et on a i qui vaut un à n, donc on a n équations du mouvement. Maintenant, cette façon d'écrire, est lourde et peu explicite, alors on va faire une transformation d'écriture qui nous permet de, d'écrire l'équation de mouvement sous forme matricielle. D'abord, les écarts êta un à êta l, je les constitue en vecteurs. Les Tjk, je vais les considérer comme les éléments de la matrice, d'une matrice T. Et les Vlm, comme les éléments d'une matrice V.

Notes

Summary

6m 46s

Application de la méthode de Lagrange

$$\text{Vecteur : } \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_\ell \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice T : } \quad T_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right|_{\text{éq}} \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right|_{\text{éq}}$$

$$\text{Matrice V : } \quad V_{\ell m} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}}$$

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

Mécanique | 2013 37

Alors, mon équation du mouvement, je peux l'écrire T fois êta point point, ce vecteur-là dérivé deux fois par rapport au temps, égale moins V fois êta. On reconnaît plus ou moins la structure de l'équation d'un oscillateur harmonique, pour le vecteur êta, c'est pas tout à fait ça à cause du T. On pourrait passer le T de l'autre côté, du signe égale, mais dans ce qui suit, je vais vous montrer une technique plus habile, qui assure que la matrice dynamique est symétrique, ce qui va simplifier les calculs qui suivent.

Notes

Summary

8m 31s

Diagonalisation

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

$$T_D = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}$$

T réelle et symétrique $\Longrightarrow$ T est diagonalisable : $T = U^{-1} T_D U$

U orthogonale ($U_{ij}^{-1} = U_{ji}$)

$$T = U^{-1}\sqrt{T_D}\,\sqrt{T_D}\,U \;\; = \underbrace{U^{-1}\sqrt{T_D}U}_{\sqrt{M}}U^{-1}\sqrt{T_D}\,U = \sqrt{M}\,\sqrt{M}$$

Mécanique | 2013 47

Alors pour ce faire, pour exprimer cette équation du mouvement de façon plus proche que celle d'un oscillateur harmonique, comme T est symétrique, je sais que T peut être diagonalisé, ça c'est un résultat présumé connu appris dans un cours d'algèbre linéaire, si T est diagonalisable, ça veut dire qu'il existe une matrice U telle que T peut être écrit comme U moins un fois T diagonale fois U, TD veut dire T diagonale, je veux dire que TD est une matrice avec des éléments sur la diagonale non-nuls, et des zéros partout ailleurs, et U, c'est un résultat aussi d'algèbre linéaire, est une matrice orthogonale, ça veut dire que l'inverse se calcule en calculant un transposé. Ici vous avez U moins un, ij, c'est simplement Uji. Maintenant je vais écrire, c'est une écriture un peu amusante, on va introduire la notion racine de la matrice, évidemment qu'il s'agit de prendre la racine carrée des éléments sur la diagonale, ici entre-deux je vais introduire U, U moins un, U fois U moins un ça fait un, voilà U, U moins un, et là je vois apparaître U moins un, racine de TD U, je peux l'écrire si j'appelle cette matrice-là racine de M, encore une fois, il s'agit d'un symbole, c'est une écriture, j'ai racine de M fois racine de M, j'ai deux fois la même chose.

Notes

Summary

9m 17s

Diagonalisation

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

$$T_D = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}$$

T réelle et symétrique $\Longrightarrow$ T est diagonalisable : $T = U^{-1}T_D U$

U orthogonale ($U^{-1}_{ij} = U_{ji}$)

$$T = U^{-1}\sqrt{T_D}\sqrt{T_D}\,U \;\; = U^{-1}\sqrt{T_D}UU^{-1}\sqrt{T_D}\,U = \sqrt{M}\sqrt{M}$$

$$\sqrt{M} = U^{-1}\sqrt{T_D}\,U$$

$\sqrt{M}$ est symétrique $\quad \left(\sqrt{M}\right)_{ij} = \sum_{lm} U^{-1}_{il}\left(\sqrt{T_D}\right)_{lm}U_{mj} = \sum_{lm} U^{-1}_{jm}\left(\sqrt{T_D}\right)_{ml}U_{li} = \left(\sqrt{M}\right)_{ji}$

$$\frac{1}{\sqrt{M}} = \sqrt{M}^{-1} \text{ est aussi symétrique}$$

Mécanique | 2013 53

Donc j'introduis une matrice racine de M par ce calcul. Avec cette équation-là qui définit racine de M. Maintenant je montre que racine de M est symétrique. Alors je calcule l'élément ij de la matrice racine de M, racine de M se définit par ce produit de trois matrices, ce produit de trois matrices, si j'écris les composantes des matrices, j'ai un il, un lm, un mj, et je somme sur l, et je somme sur m. Maintenant, Umj, c'est égale à Ujm moins un. À cause de cette propriété d'orthogonalité. C'est ce que j'ai écrit ici. Uil moins un, c'est égal à Uli, et ici j'observe que j'ai le produit de la matrice U moins un, fois la matrice racine de TD, fois la matrice U, et j'ai l'élément ji. Donc c'est racine de M indice ji. Donc ici j'ai ij et ji, donc cette matrice de M est symétrique. Je vais définir un symbole encore plus curieux pour des matrices, mais ce symbole-là ne fait que représenter la matrice inverse de racine de M, et il est facile de vérifier que la matrice inverse est aussi symétrique.

Notes

Summary

11m 11s

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

$$\sqrt{M}\,\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{1}{\sqrt{M}}V\frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{M}\,\boldsymbol{\eta}$$

$$\boldsymbol{X} = \sqrt{M}\boldsymbol{\eta} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{M}}V\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

Tous ces calculs-là sous ces artifices qui définissent ces matrices racine de M, ou un sur racine de M, vont me simplifier les équations de la manière suivante: Au lieu d'écrire mon équation du mouvement comme ceci, je vais ici mettre un racine, T je vais l'écrire comme racine de M fois racine de M, et je vais diviser par, enfin diviser, c'est multiplié par la matrice inverse, de racine de M, donc j'ai un un sur racine de M qui vient ici, ici j'ai ce produit qui vaut un, que j'ai introduit entre V et êta, c'est un petit jeu sur les matrices. Qui a l'avantage de faire apparaître maintenant ce nouvel objet, disons ce nouvel objet-là, et sa dérivée deuxième par rapport au temps, cet objet-là je vais l'appeler grand X, c'est un vecteur dans le même espace vectoriel, c'est racine de M fois êta, et maintenant si je définis la matrice dite matrice dynamique D comme étant cet objet-là, mon équation du mouvement maintenant prend cette forme-là, qui ressemble à l'équation de l'oscillateur harmonique, mais c'est une équation pour un vecteur et D est une matrice.

Notes

Summary

12m 52s

Diagonalisation

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

$$\sqrt{M}\,\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{1}{\sqrt{M}}\,V\,\frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{M}\,\boldsymbol{\eta}$$

$$\boldsymbol{X} = \sqrt{M}\boldsymbol{\eta} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{M}}\,V\,\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

D est symétrique : $\qquad D_{ij} = \sum_{lm}\left(\sqrt{M}^{-1}\right)_{il} V_{lm} \left(\sqrt{M}^{-1}\right)_{mj} = D_{ji}$

Mécanique | 2013 58

Cette matrice est symétrique, en effet si j'écris la définition de l'élément, j'utilise la définition de D pour calculer l'élément ij de cette matrice, j'ai un produit de trois matrices, j'ai une somme sur l, j'ai une somme sur m, elle apparaît ici, et m apparaît là, comme cette matrice est symétrique, je peux écrire jm, et le mettre là-devant, pour aider à la lecture. Cette matrice là est symétrique aussi, donc là je peux écrire li et le mettre là. Et on a donc l'élément ji de la matrice D. Dij égale Dji. La matrice est symétrique. J'ai donc une équation du mouvement sous forme matricielle avec une matrice dite matrice dynamique, qui est symétrique et réelle bien sûr.

Notes

Summary

14m 19s

Définition : modes propres, fréquences propres

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

$$\ddot{\boldsymbol{v}}_i = -\lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi} \; : \text{ fréquence propre}$$

$$i = 1 \dots n$$

$$\boldsymbol{v}_i \; : \text{ mode propre}$$

Alors maintenant je vais définir les modes propres de mon problème, et les fréquences propres. Voilà l'équation de la dynamique, je cherche des solutions de ce type-là. Le vecteur vi est un vecteur propre de mon problème dans ce sens que je vais chercher une solution de type harmonique avec ici un nombre lambda i. Et la lambda i, évidemment, ou si vous voulez la racine de lambda est divisée par deux pi, ça c'est la fréquence propre où la racine de lambda i c'est la pulsation propre de ce mode. Ce mode aussi a une fréquence. On a n tel mode, qui peuvent être dégénérés, certains peuvent avoir la même valeur, mais il y en a n, et vi, le vecteur vi, c'est ce qu'on appelle le mode propre de ce problème dynamique.

Notes

Summary

15m 19s

Définition : coordonnées propres

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

D réelle symétrique $\Longrightarrow$ il existe une matrice O : $D = O^{-1}D_\lambda O$ $\quad$ D_λ diagonal

$$O\ddot{\boldsymbol{X}} = -D_\lambda O\boldsymbol{X}$$

Changement de variable : $\boldsymbol{x} = O\boldsymbol{X}$ $\quad \ddot{\boldsymbol{x}} = -D_\lambda \boldsymbol{x}$

$$\ddot{x}_i = -\lambda_i x_i \qquad \lambda_i \ (i = 1\dots n)$$

x_i coordonnée propre, oscille avec la pulsation : $\sqrt{\lambda_i}$

$$x_i = (O\boldsymbol{X})_i = \sum_k O_{ik}X_k = \sum_k O_{ik}(\sqrt{M}\boldsymbol{\eta})_k = \sum_{k\ell} O_{ik}\sqrt{M}_{k\ell}\,\eta_\ell$$

Mécanique | 2013 75

maintenant, certains auteurs utilisent la notion de coordonnées propres, voilà comment on peut l'introduire: ici j'ai l'équation de la dynamique, comme D est réelle et symétrique, elle est diagonalisable, ça veut dire qu'il existe une matrice O qui me permet d'écrire D égale O moins un, D lambda O, D lambda diagonale, et O est orthogonale, je peux écrire, je peux mettre cette expression de D ici, faire, multiplier l'équation à gauche, par O, alors il me vient OX point point, ici j'ai ce O qui vient avec ce X. Je définis maintenant le vecteur petit x, comme étant O fois le vecteur grand X, j'ai une équation de type x point point égale moins D lambda fois x, avec D lambda une matrice diagonale, et pour la coordonnée i, vous avez xi point point, donc un scalaire, moins lambda i, xi, vous avez une équation de type oscillateur harmonique, pour cette coordonnée petit x i, et la pulsation vaut lambda i, ça veut dire que cette coordonnée oscille à une seule fréquence. Ou à la pulsation racine de lambda i. Ça c'est ce qu'on appelle les coordonnées propres du système.

Notes

Summary

16m 23s

Définition : coordonnées propres

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

D réelle symétrique $\implies$ il existe une matrice O : $D = O^{-1}D_\lambda O$ $\quad D_\lambda$ diagonal

$$O\ddot{\boldsymbol{X}} = -D_\lambda O\boldsymbol{X}$$

Changement de variable : $\boldsymbol{x} = O\boldsymbol{X} \quad \ddot{\boldsymbol{x}} = -D_\lambda \boldsymbol{x}$

$$\ddot{x}_i = -\lambda_i x_i \qquad \lambda_i \ (i = 1 \ldots n)$$

x_i coordonnée propre, oscille avec la pulsation : $\sqrt{\lambda_i}$

$$x_i = (O\boldsymbol{X})_i = \sum_k O_{ik}X_k = \sum_k O_{ik}(\sqrt{M}\boldsymbol{\eta})_k = \sum_{k\ell} O_{ik}\sqrt{M}_{k\ell}\,\eta_\ell$$

Mécanique | 2013 75

Si on reprend toutes nos définitions, l'élément i du vecteur x, c'est OX indice i, OX c'est le produit de matrice fois d'un vecteur, le X, on se souvient que c'était racine de M fois êta, donc voilà en terme des êta le rapport, enfin la relation entre les êta et les xi. Les êta c'était les écarts par rapport à l'équilibre pour les coordonnées généralisées qu'on s'est données, et là on a les coordonnées propres qui oscillent à une fréquence donnée.

Notes

Summary

18m 03s