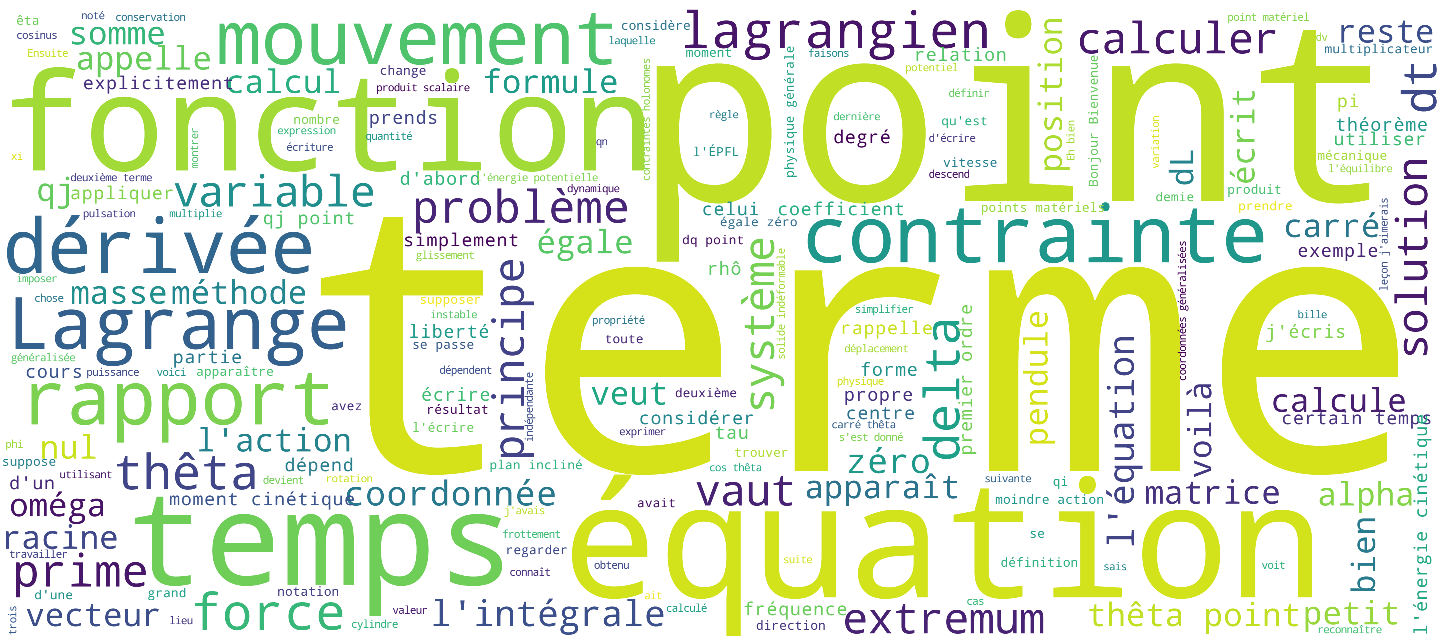
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-4-4

Principe de moindre action

Mécanique, cours 26.2

Jean-Philippe Ansermet



EPFL

Search MOOC

Video

Principe de moindre action

Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, j'aimerais résumer toute la mécanique avec un principe qui est très vite énoncé, c'est le principe de, dit de la moindre action. Alors d'abord, je vais définir l'action. Ensuite, on va voir ce principe de moindre action en utilisant les équations de Lagrange, et on va appliquer ce principe pour prendre le problème, un problème où on avait éliminé les contraintes, et on va maintenant retrouver les contraintes en appliquant ce principe. L'action.

Notes

Summary

0m 03s

Définition : l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q_1(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t), t\big)\, dt$$

L'action se définit comme ceci. En fait l'intégrale du lagrangien, c'est l'intégrale dans le temps pris entre un certain temps t un, et un certain temps t deux. Votre lagrangien est fonction des coordonnées q un à q n qui dépendent du temps, de q un point à q n point, et on n'exclut pas la possibilité que le lagrangien dépende aussi explicitement du temps. On note S, l'action, et voilà. Ça, c'est notre définition de l'actian, de l'action. C'est l'intégrale de L quand le système évolue de t un à t deux.

Notes

Summary

0m 48s

Principe de moindre action

Equations de Lagrange $\Leftrightarrow$ Extremum de l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

Soit $q(t)$ la fonction pour laquelle on a l'extremum.

On examine une petite variation $q(t) + \delta q(t)$

On impose $\delta q(t_1) = 0$ et $\delta q(t_2) = 0$.

Mécanique | 2013 12

Alors maintenant, on a ce résultat extraordinaire qui est que le principe, le, les équations de Lagrange impliquent un extremum de l'action et inversement. Si on a un extremum de l'action, on doit avoir les équations de Lagrange. On va considérer, pour simplifier les écritures, que notre lagrangien ne dépend que d'une coordonnée. Et donc, le problème qu'on doit se poser, c'est de comprendre ce que ça veut dire un extremum de l'action, parce que L, c'est quand même un objet assez complexe. Alors dire que L est extremum, c'est dire la chose suivante : on suppose qu'on connaît q de t, la fonction pour laquelle S est extremum. Maintenant, si je fais une petite variation de q, que je note delta q, qui est une fonction du temps. Si S est extremum, ça veut dire si, pour q de t. Alors, le premier ordre, en delta q de t doit être nul. Maintenant, on va pas faire cette variation n'importe comment, on va supposer les deux points, le point de départ et le point d'arrivée, les points aux temps t un et t deux d'être connus. Faut bien qu'on ait une certaine position initiale, puis une position après un certain temps. On va calculer l'extremum pour deux points connus.

Notes

Summary

1m 36s

Principe de moindre action

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q+\delta q, \dot q + \delta \dot q, t\big)\,dt - L\big(q,\dot q,t\big)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{u}\,\underbrace{\delta \dot q\Big)\,dt}_{dv}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q\,dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\right]_{t_1}^{t_2} - \int \delta q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\right] \delta q\,dt$$

Mécanique | 2013 17

Alors faisons le calcul. Je veux calculer une variation de l'action, lorsqu'au lieu de calculer l'action pour q qui est censé l'extremum, je prends q plus une variation delta q avec les restrictions à t un et à t deux. Pour faire ce calcul, je reconnais d'abord ici que j'ai une dérivée de L par rapport à q, point delta q, et j'ai une dérivée de L par rapport à q point, fois un accroissement delta q point. Maintenant, je vais travailler ce deuxième terme de l'intégrale, je vais faire une intégration par parties. J'ai noté ces fonctions u et dv, et l'intégrale de u dv vaut uv moins l'intégrale de vd u. C'est la formule que je vais appliquer ici : l'intégration par parties. Donc, si ça c'est la fonction d de v, la fonction v, c'est delta q, et la fonction u, c'est celle-ci. Ce terme-là, je le change pas. Et il faut faire moins intégrale vd u, donc c'est de delta q, Ld u, ça fait d sur dt de d de dL sur dq point fois dt. Pour calculer d de u, je fais d sur dt de ça fois dt. Maintenant, on s'est donné comme règle du jeu qu'on allait faire des variations delta q avec delta q qui est nul en t un et en t deux. Donc, ce terme tombe. Il me reste plus que ces deux termes de d de L sur dL q, L moins d sur dt de dL sur dq point.

Notes

Summary

3m 16s

Principe de moindre action

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q+\delta q, \dot q + \delta\dot q, t\big)\, dt - L\big(q,\dot q,t\big)\, dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{u}\, \underbrace{\delta \dot q \Big)\, dt}_{dv}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q\, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\right]_{t_1}^{t_2} - \int \delta q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\right] \delta q\, dt$$

$$\text{Pour tout } \delta q(t) \implies \text{Lagrange}$$

Mécanique | 2013 18

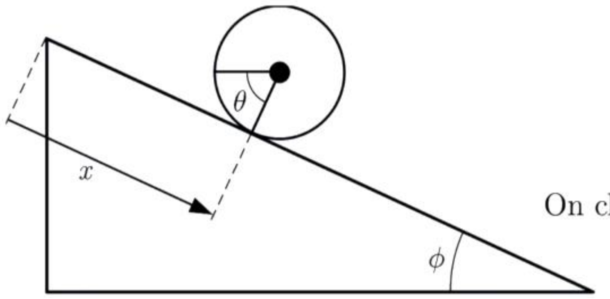
Maintenant, S est extremum pour la fonction q, la solution qu'on cherche veut dire que on doit pouvoir prendre n'importe quel delta q infinitésimal, et on doit obtenir zéro au premier ordre. La seule manière d'y arriver, c'est que ce terme-là doit être nul, donc on a Lagrange. Et on peut faire le raisonnement à l'envers, à l'inverse et trouver que Lagrange implique l'extremum de l'action. Donc voilà, on a obtenu que le mouvement est celui qui minimise l'action.

Notes

Summary

5m 28s

Application : forces de contraintes



$$L = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + Mgx \sin\phi$$

On garde deux degrés de liberté.

On cherche un extremum de l'action sous la contrainte $x = R\theta$.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange : on considère

$$L' = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + Mgx \sin\phi - F(x - R\theta)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = I_\Delta \dot{\theta}$$

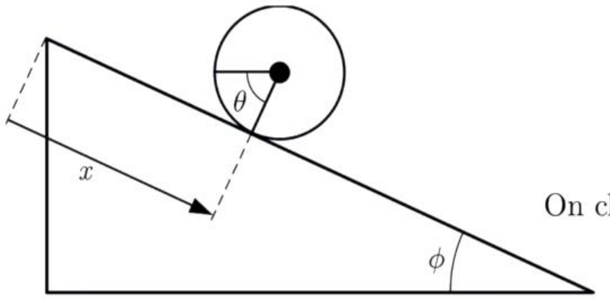
On va maintenant utiliser ce principe pour voir comment avec Lagrange on peut calculer des forces de contraintes. Rien ne vaut un exemple. Je reprends mon problème du cylindre qui descend un plan incliné. J'écris mon lagrangien en terme de la variable thêta et de la variable x. Mais au lieu de faire comme la dernière fois, je vais imposer le fait qu'il y a une contrainte, mais je vais garder les deux variables. C'est comme ça qu'on va faire apparaître une force, la force de contrainte, la contrainte étant, ici, le roulement sans glissement. Donc, on a, on cherche l'extremum de l'action définie pour ce L sous la contrainte que x vaut R thêta. Alors, ça revient au même que de considérer le lagrangien L prime, qui est le lagrangien que j'avais, moins un certain coefficient; je l'ai appelé F parce que je sais où je vais aller. Mais ce, c'est un coefficient qu'on appelle un multiplicateur de Lagrange qui multiplie cette relation-là de contrainte x moins R thêta. Et je considère ce lagrangien L prime maintenant comme ayant deux variables indépendantes. Alors, si je, maintenant j'écris mes équations du mouvement, je calcule d de L prime, la, la dérivée de ce lagrangien par rapport à thêta point.

Notes

Summary

6m 13s

Application : forces de contraintes



$$L = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + Mgx \sin\phi$$

On garde deux degrés de liberté.

On cherche un extremum de l'action sous la contrainte $x = R\theta$.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange : on considère

$$L' = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + Mgx \sin\phi - F(x - R\theta)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = I_\Delta \dot{\theta} \qquad \frac{\partial L'}{\partial \theta} = FR \qquad I_\Delta \ddot{\theta} = FR$$ théorème du moment cinétique

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \qquad \frac{\partial L'}{\partial x} = Mg \sin\phi - F \qquad M\ddot{x} = Mg\sin\phi - F$$ théorème du centre de masse

Mécanique | 2013 33

Je calcule la dérivée de L prime par rapport à thêta. Alors, on a FR qui apparaît, et j'ai cette équation-là. Et bon, j'ai une notation qui est de reconnaître tout de suite ce qui se passe. On a ici une équation du mouvement pour le moment cinétique. C'est un petit peu comme si on avait appliqué d de Lg sur dt égal Mg extérieur avec le moment qui vaut la force, et ici, on a R, le rayon. La deuxième équation du mouvement, je l'obtiens en prenant x comme variable. Alors, j'ai calculé d de L prime sur d de x point, je calcule d de L prime sur d de x, x apparaît ici, et là. Et qu'est-ce que j'ai ici? J'ai cette équation du mouvement qui est l'équation du mouvement, c'est l'équation de Newton, l'équation F égale Ma pour le centre de masse, avec la force dans la direction du plan incliné. Il y a un MG sin alpha, et il y a la force de frottement. Et maintenant, j'ai retrouvé tout ce que la mécanique newtonienne pouvait nous dire, le théorème du moment cinétique, le théorème du centre de masse pour ce solide indéformable. Encore une fois, je rappelle la méthode. On a écrit le lagragien, et on a une contrainte, et on rajoute cette contrainte avec un coefficient devant, qu'on appelle un multiplicateur de Lagrange. Et maintenant, on écrit les équations de Lagrange comme si les variables étaient indépendantes. Cette méthode n'est valable que pour des contraintes holonomes.

Notes

Summary

7m 56s