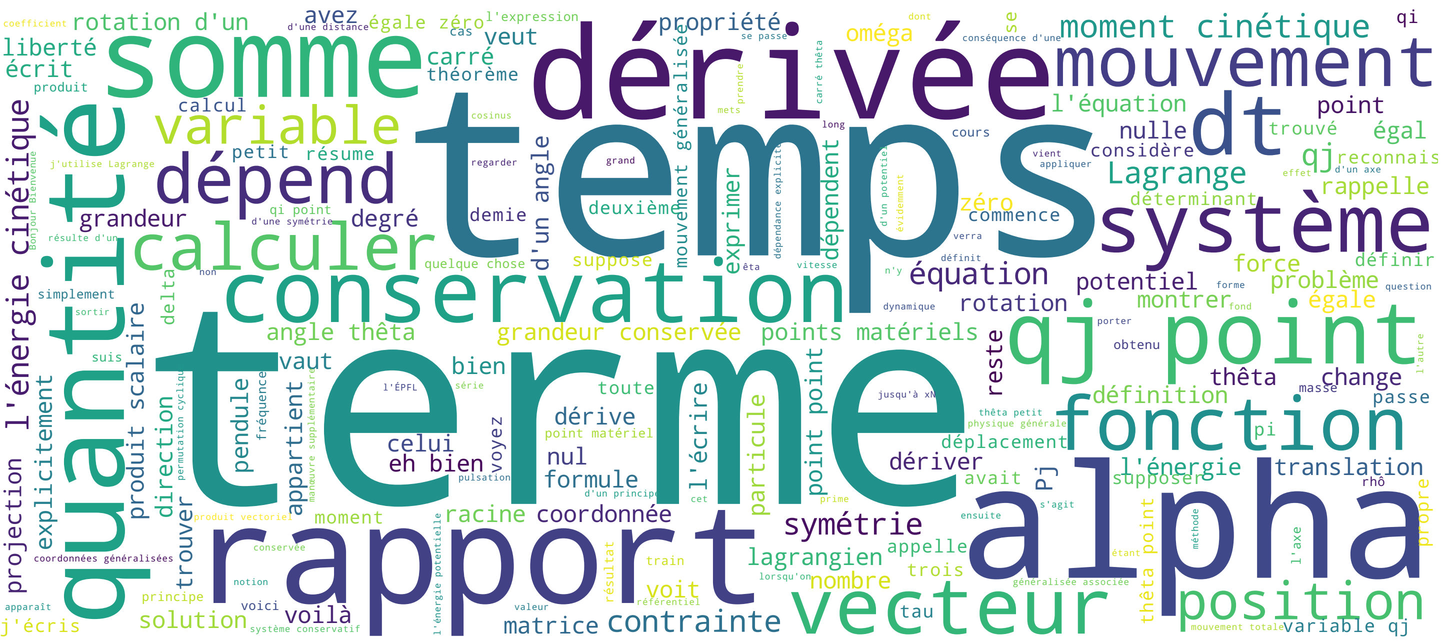
Symétries et conservations

Mécanique, cours 26.1

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

Symétries et conservations

- Variable cyclique
- Symétrie de translation
- Symétrie de rotation
- Energie

Mécanique | 2013 6

Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, j'aimerais utiliser le formalisme de Lagrange pour vous montrer que la conservation de la quantité de mouvement, ou de la conservation du moment cinétique, sont des propriétés qui résultent de symétrie fondamentale des systèmes qu'on considère. Pour commencer, je vais définir une variable cyclique, et je vais vous montrer que, une symétrie de translation implique une conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction dans laquelle on peut faire la translation, ensuite on va voir qu'une symétrie de rotation implique une conservation du moment cinétique, projeté dans, ou sur l'axe de rotation, et ensuite on verra comment s'exprime la conservation de l'énergie en utilisant Lagrange.

Notes

Summary

0m 03s

Définition : quantité de mouvement généralisée

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

p_j quantité de mouvement généralisée associée à chaque coordonnée généralisée q_j

Mécanique | 2013 9

Je commence avec la notion de quantité de mouvement généralisée. Si vous avez un système physique qui est caractérisé par un lagrangien L, pour la variable j des coordonnées généralisées, d de L sur d de qj point, ça va être ce qu'on appelle le moment, la quantité de mouvement généralisée, associée à cette variable qj. Pourquoi on prend la peine de faire cette définition?

Notes

Summary

1m 07s

Propriété : variable cyclique et conservation

q_j ***cyclique*** si L ne dépend pas de q_j

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}p_j$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

p_j constante du mouvement

Mécanique | 2013 14

Alors on a vu dans les petits exemples de la leçon précédente, que lorsqu'on fait ce calcul, on peut tomber ou bien sur une quantité de mouvement, proprement dite, ou bien sur un moment cinétique, mais ce qui est très intéressant de voir ici, c'est la propriété suivante : une propriété de conservation, on dit que si qj est cyclique, ça veut dire si qj ne dépend pas, si L ne dépend pas de qj, si on a ça, alors la quantité de mouvement est conservée, en effet si d de L sur d de qj est nul, d de L sur d de qj, par Lagrange, je peux l'écrire comme ça, là-dedans, j'ai Pj, donc je suis en train de dire que d sur dt, la dérivée par rapport au temps de Pj est nulle, c'est donc dire que Pj est une grandeur conservée. Donc vous voyez, dans un problème où vous avez une variable, une des coordonnées qui n'apparaît pas dans l'expression du lagrangien, alors vous avez une conservation. Ça, c'est quelque chose de très utile.

Notes

Summary

2m 07s

Symétrie de translation et conservation

Système de N points matériels en $\boldsymbol{x}_i$, $(i = 1, .., N)$
forces conservatives, potentiel $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$
$\hat{\boldsymbol{n}}$ dans le référentiel tel que pour tout s :

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}\big)$$

$$0 = \frac{dL\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t\big)}{ds}$$

Mécanique | 2013 19

Maintenant, j'aimerais m'engager dans, quelque chose d'un peu plus général, j'aimerais considérer des systèmes de points matériels, avec une symétrie, ou bien de translation, ou bien de rotation. Je commence avec la translation. Je suppose que j'ai N points matériels, donnés par les positions, les vecteurs xi, i égale un à N, N c'est le nombre de points matériels, je n'ai pas à m'occuper ici de réduire le nombre de variables, je vais supposer que j'ai des particules au fond qui sont libres, j'ai un système conservatif, donc j'ai un potentiel, qui définit mon système, et je fais maintenant l'hypothèse qu'il existe une direction du référentiel, telle que si je fais un déplacement du système dans, le long de cette direction, donc chaque particule du système je la déplace de s fois n, c'est un déplacement dans la direction de n, d'une distance s, eh bien je ne change pas le potentiel. Donc j'ai une symétrie de translation pour le potentiel. Et on va voir que lorsqu'on a cela, on a conservation de la quantité de mouvement. Alors, je traduis maintenant le fait que L, si V ne change pas dans cette translation, alors L non plus, parce que l'énergie cinétique évidemment ne change pas dans une telle translation, et pour exprimer que L est indépendant de s, j'écris d de L sur d de s, égale zéro.

Notes

Summary

3m 02s

Symétrie de translation et conservation

Système de N points matériels en $\boldsymbol{x}_i$, $(i = 1, .., N)$
forces conservatives, potentiel $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$
$\hat{\boldsymbol{n}}$ dans le référentiel tel que pour tout s :

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}\big)$$

$$0 = \frac{dL\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t\big)}{ds} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}} n_i = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) n_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) n_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\,\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha\right)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

Mécanique | 2013 23

mais ici pour expliciter cette dérivée, je rappelle que L est une fonction ici de x un, x deux, et cetera jusqu'à xN, mais qu'ici j'ai pas simplement pris x un, mais j'ai fait cette translation d'une distance s. Et maintenant, j'ai donc une fonction scalaire qui est une fonction de s, mais à travers toutes ces variables, enfin ces vecteurs de position. Donc comment est-ce que je fais cette dérivée d sur ds? Je dois dériver par rapport à chaque position, ou chaque coordonnée de position, x alpha i, et après je dois dériver la position alpha i, x alpha i par rapport à s. donc j'ai une dérivée de ce terme-là par rapport à s, qui me donne toujours le ni avec i qui va de un à trois. Cette somme-là, c'est la somme sur les particules. Maintenant, pour ce terme-là, j'utilise Lagrange, donc ce terme-là, je dis qu'il vaut d sur dt, d de L, sur d de x alpha i point, ça, je reconnais le Pi, la quantité de mouvement généralisée associée à la variable x alpha i, maintenant, dans L, il n'y a que l'énergie cinétique qui dépend des x alpha i point, donc je peux écrire, remplacer L par T, quand je dérive l'énergie cinétique par rapport à x alpha i point, je me retrouve avec le terme suivant, le terme m alpha, x alpha point, indice i fois ni, j'ai ici enlevé la somme sur i, je n'ai gardé que la somme sur alpha parce que j'ai ici introduit le produit scalaire.

Notes

Summary

5m 03s

Symétrie de translation et conservation

Système de N points matériels en $\boldsymbol{x}_i$, $(i = 1, .., N)$

forces conservatives, potentiel $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ dans le référentiel tel que pour tout s :

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}\big)$$

$$0 = \frac{dL\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t\big)}{ds} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}} n_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) n_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) n_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\, \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha\right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\, \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{P} \text{ quantité de mouvement totale}$$

$\boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ grandeur conservée

Mécanique | 2013 24

Et maintenant le d sur dt, je peux le faire porter sur n, parce que n appartient au référentiel, donc je vais rajouter un zéro, et à ce moment-là, je suis en train de dire que la dérivée par rapport au temps de ça produit scalaire avec n, est nul, ça veut dire que ce terme-là, qui est la quantité de mouvement totale, fois le vecteur unité n, donc c'est la projection de la quantité de mouvement dans la direction n qui est une grandeur conservée, puisque sa dérivée par rapport au temps est nulle.

Notes

Summary

7m 21s

Théorème de Noether : translation

Système de N points matériels en $\boldsymbol{x}_i$, $(i = 1, .., N)$
forces conservatives, potentiel $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$

S'il existe $\hat{\boldsymbol{n}}$ dans le référentiel tel que pour tout s :
$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}\big)$$

$\boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ grandeur conservée

Mécanique | 2013 28

Je résume, et ce que je viens d'exprimer est connu dans la littérature comme le théorème de Noether, le théorème de Madame Emma Noether. On a un système de N points matériels. Qui est conservatif, donc toutes les forces dérivent d'un potentiel. Et j'ai cette propriété de translation, pour le potentiel. Alors, j'ai obtenu grâce à Lagrange que la quantité de mouvement totale projetée dans cette direction de translation, est une grandeur conservée. Donc vous voyez que ici, la conservation de la quantité de mouvement résulte d'un principe de symétrie. C'est un résultat très fort et très élégant.

Notes

Summary

8m 10s

Symétrie de rotation et conservation

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V(\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_N)$$

$\boldsymbol{R}_\theta$ axe passant par l'origine O, d'orientation $\hat{\boldsymbol{n}}$, d'angle θ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha \qquad \theta \text{ petit}$$

Je passe maintenant à une symétrie de rotation. Même situation, j'ai un système conservatif, et maintenant je suppose que si je fais une rotation du sysyème d'un angle thêta autour d'un axe qui passe par l'origine, et l'axe est un axe qui appartient au référentiel, alors je fais cette hypothèse que le potentiel ne change pas. Et on va trouver dans ce cas-là qu'on a une conservation du moment cinétique. Maintenant, je dois faire une représentation mathématique de cette rotation d'un angle thêta. Alors on a beaucoup travaillé sur les rotations infinitésimales. Regardons ce qui se passe si on a une rotation d'un angle thêta petit. Je vous rappelle cette formule bien connue qui avait aboutie aux équations de, aux formules de Poisson, et je l'applique pour un dt. Donc, j'ai un oméga fois dt. Je vais supposer que j'ai un angle thêta qui est petit, qui vaut oméga fois dt. Alors, je peux appliquer cette formule pour dire que le vecteur que j'obtiens par la rotation de thêta et que j'a, rotation que j'applique sur vecteur x alpha, c'est x alpha plus le terme qui découle de cette formule, un thêta n fois produit vectoriel avec x alpha.

Notes

Summary

9m 06s

Symétrie de rotation et conservation

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V(\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_N)$$

$\boldsymbol{R}_\theta$ axe passant par l'origine O, d'orientation $\hat{\boldsymbol{n}}$, d'angle θ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha \qquad \theta \text{ petit}$$

$$0 = \frac{dL\big(\boldsymbol{x}_1 + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t\big)}{d\theta} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)_i \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i$$

Mécanique | 2013 37

Donc maintenant, pour exprimer cette symétrie, je peux dire, la dérivée du lagrangien par rapport à thêta, lorsque j'estime le lagrangien opposition x un augmenté de ce terme-là, jusqu'à xn. Puis après, il y a encore évidemment les variables x un point xn point L temps qui est, n'est pas exclu, cette dépendance explicite en temps. Alors, pour faire ce calcul, L étant une fonction de plusieurs variables, je dois dériver par rapport à chaque variable. Donc, c'est ce que j'ai écrit ici, d de L sur d de alpha x alpha i. Et après, je dois dériver x alpha i par rapport à thêta. Donc, c'est un terme comme ça que je dois dériver par rapport à thêta. Il me reste n cross x alpha, composante i. Maintenant, je vais utiliser Lagrange pour ce terme-là. Donc, ce terme-là, il est égal à ce terme-là, c'est les équations de Lagrange. Et là, j'ai simplement recopié ce dernier terme. Ici, je reconnais un terme qui ne dépend que de l'énergie cynétique. Et quand je dérive, j'obtiens la quantité de mouvement, c'est ce que j'ai exprimé ici. On a le d sur dt de la quantité de mouvement, le voici. Et ce terme encore une fois, somme sur i égale un à trois. Et maintenant, je me propose, qu'est-ce que j'ai ici?

Notes

Summary

10m 44s

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V(\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_N)$$

$\boldsymbol{R}_\theta$ axe passant par l'origine O, d'orientation $\hat{\boldsymbol{n}}$, d'angle θ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \qquad \to \qquad \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha \qquad \theta \text{ petit}$$

$$0 = \frac{dL\big(\boldsymbol{x}_1 + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t\big)}{d\theta} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)_i \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} (\hat{\boldsymbol{n}})_i \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)_i = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)$$

$$= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{p}_\alpha\right) = \frac{d}{dt} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}_O\right) \qquad \boldsymbol{L}_O = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{p}_\alpha\right)$$

J'ai le produit scalaire de ce vecteur-là, et de celui-là. Et donc, j'ai un produit mixte que je peux calculer en, comme un déterminant où je mets ce vecteur dans la première colonne, ce vecteur dans la deuxième, ce vecteur dans la troisième. Maintenant, vous savez que quand vous calculez un déterminant, vous pouvez faire des permutations cycliques des colonnes. Ici, ça veut dire que je peux faire une permutation cyclique des vecteurs. Je vais faire passer le n dans cette position-là, le x alpha dans cette position-là, et ce vecteur, là. Ça fait une permutation cyclique. Ça me donne ceci. Voilà le n, le x alpha de dp sur dn, dt, dp alpha sur dt. Et maintenant, je fais une petite manœuvre supplémentaire. Bon, je fais deux manœuvres. Bon, je fais juste une manœuvre supplémentaire. Ici, j'ai simplement exprimé ce produit scalaire, ici. Et maintenant, le d sur dt, je peux le sortir de la parenthèse, parce que je rajoute un terme qui est d sur dt du x alpha, mais qui est colinéaire avec P alpha, le produit vectoriel donne zéro. Et comme le n dont il s'agit ici, appartient au référenciel, je peux encore une fois l'englober. Le, donc, je peux sortir d sur dt totalement.

Notes

Summary

12m 28s

Symétrie de rotation et conservation

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V(\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_N)$$

$\boldsymbol{R}_\theta$ axe passant par l'origine O, d'orientation $\hat{\boldsymbol{n}}$, d'angle θ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha \qquad \theta \text{ petit}$$

$$0 = \frac{dL\big(\boldsymbol{x}_1 + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t\big)}{d\theta} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)_i \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} (\hat{\boldsymbol{n}})_i \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)_i = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)$$

$$= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{p}_\alpha\right) = \frac{d}{dt} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}_O\right) \qquad \boldsymbol{L}_O = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{p}_\alpha\right)$$

Mécanique | 2013 41

Et je reconnais ici somme sur alpha x alpha cross P alpha, c'est notre définition du moment cinétique. Et donc, j'ai trouvé que la dérivée par rapport au temps de la projection du moment cinétique dans la direction n est nulle, c'est dire que cette projection est conservée.

Notes

Summary

14m 04s

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V(\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_N)$$

$\boldsymbol{R}_\theta$ axe passant par l'origine,

d'orientation $\hat{\boldsymbol{n}}$, d'angle θ

$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}_O$ conservée

Mécanique | 2013 44

Maintenant, je résume. Vous avez un système de point matériel avec des forces conservatives. Vous avez une symétrie de rotation d'un axe n qui appartient au référentiel. Eh bien, on vient de trouver que rien ne change quand on fait une rotation d'un angle thêta infiniment petit. Si on fait une série de rotation d'angles thêta petits, rien ne change toujours, donc on a une conservation, quel que soit l'angle thêta. Et on a donc cette relation entre la conservation de la projection du moment cinétique et la symétrie du problème. Donc, on voit que cet, ce principe de conservation du moment cinétique résulte d'un principe fondamental de symétrie. C'est un très beau résultat.

Notes

Summary

14m 27s

Autre grandeur conservée

Si L ne dépend pas **explicitement** du temps $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L$ est une grandeur conservée

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j\right) - \frac{dL}{dt} \quad = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\,\dot{q}_j$$

Mécanique | 2013 49

Maintenant, je passe à la question de l'énergie. Alors dans un premier temps, je vais trouver une grandeur conservée qui peut paraître un peu singulière. Je considère un système où le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Et je vais vous montrer maintenant que cette grandeur-là, où pj, c'est la quantité de mouvement associée à la variable qj. Et je fais une somme sur j égal un à n, le nombre de degrés de liberté de ces produits-là, je soustrais le lagrangien, et cette grandeur-là est une grandeur conservée. Démonstration. Pour démontrer que H est une grandeur conservée, je vais calculer la dérivée de H par rapport au temps, et on va montrer que cette dérivée et nulle. On doit donc calculer la dérivée par rapport au temps de ce terme-là, moins la dérivée par rapport au temps, un d droit dl sur dt. Alors, je vais travailler sur ce deuxième terme. L est une fonction des qi, des qi point, et en principe du temps. On a supposé qu'il y avait pas de dépendance en temps. Donc L ici, dépend des qi et des qi point. Donc, pour calculer la dérivée d sur dt, d droit, je dois calculer les dL sur d de q, j point, somme sur j, d de qj point fois qj point point, et j'ai d de L sur d de qj fois qj point.

Notes

Summary

15m 19s

Autre grandeur conservée

Si L ne dépend pas **explicitement** du temps $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L$ est une grandeur conservée

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = 0$$

Mécanique | 2013 51

Je dérive L par rapport à chaque variable, et je dérive chaque variable par rapport au temps. Maintenant, dans le premier, ces, ces deux premiers termes, je les laisse. et ce terme-là, je vais l'écrire comme d sur dt, eh bien, j'utilise Lagrange, et j'écris ça par Lagrange comme d sur dt de d de L sur d de qj point. Et j'ai fini, parce que si maintenant je veux écrire explicitement cette dérivée-là, j'aurai une dérivée par rapport au temps, ici, qui sera donc équivalente, peut-être qu'il vaut mieux l'écrire. Si je veux développer ce terme-là, je devrais écrire somme sur j de d sur dt, de d de L sur d de qj point fois qj point. Ça, c'est un terme. Si maintenant je fais porter la dérivée sur l'autre terme, j'ai somme sur j, d de L sur d de qj point, qj point point. Ce terme-là s'annule avec celui-là, et ce terme-là s'annule avec celui-là. Donc, il me reste zéro. Je nettoie, voilà. J'ai donc trouvé que la dérivée par rapport au temps de cette grandeur H est nulle. C'est dire que H est une grandeur conservée. La bonne question à se poser, c'est mais que représente H? Alors là, j'ai le résultat suivant.

Notes

Summary

17m 06s

Conservation de l'énergie mécanique

Si L ne dépend pas **explicitement** du temps

Si les contraintes ne dépendent pas du temps

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L$$

grandeur conservée, est l'énergie mécanique

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

En général, pour un point matériel : $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \quad \Longrightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j = 2T$$

Mécanique | 2013 61

Si L ne dépend pas explicitement du temps, et si les contraintes ne dépendent pas du temps, alors H, qui est une grandeur conservée, est l'énergie mécanique. Prouvons-le. Je pars de ce terme-là. J'explicite les pj par leur définition. d de L sur d de qj point ne peut être que d de t sur d de qj point, parce que v ne peut pas dépendre des qj point. Maintenant, en toute généralité, on a vu que v peut s'écrire comme ceci. Si maintenant, les contraintes ne dépendent pas du temps, ce terme-là tombe. Il me reste pour v que ce terme que j'ai réécrit ici. Donc, dans l'expression de l'énergie cinétique, enfin l'expression de l'énergie cinétique peut être faite comme ceci, seulement si on n'a pas ce terme. Maintenant, si on l'a, alors on voit que lorsqu'on calcule pj, qj point, on peut l'écrire comme ceci. Et ça, donc ça veut dire qu'il faut que je dérive ça par rapport à qj. Alors, il y a une demie fois le deux qui vient d'ici, qui s'a, s'annule, l'un et l'autre. Il me reste une fois cette somme qui est là, et après le, la, le point particulier, d de r alpha sur d de qj fois qj point, quand je dérive par rapport à la variable qj point. Je peux réarranger ces termes. Cette somme-là, elle ne porte que sur ceci.

Notes

Summary

18m 48s

Conservation de l'énergie mécanique

Si L ne dépend pas **explicitement** du temps

Si les contraintes ne dépendent pas du temps

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L$$

grandeur conservée, est l'énergie mécanique

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

En général, pour un point matériel : $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j = 2T$$

$$\mathcal{H} = 2T - L = T + V$$

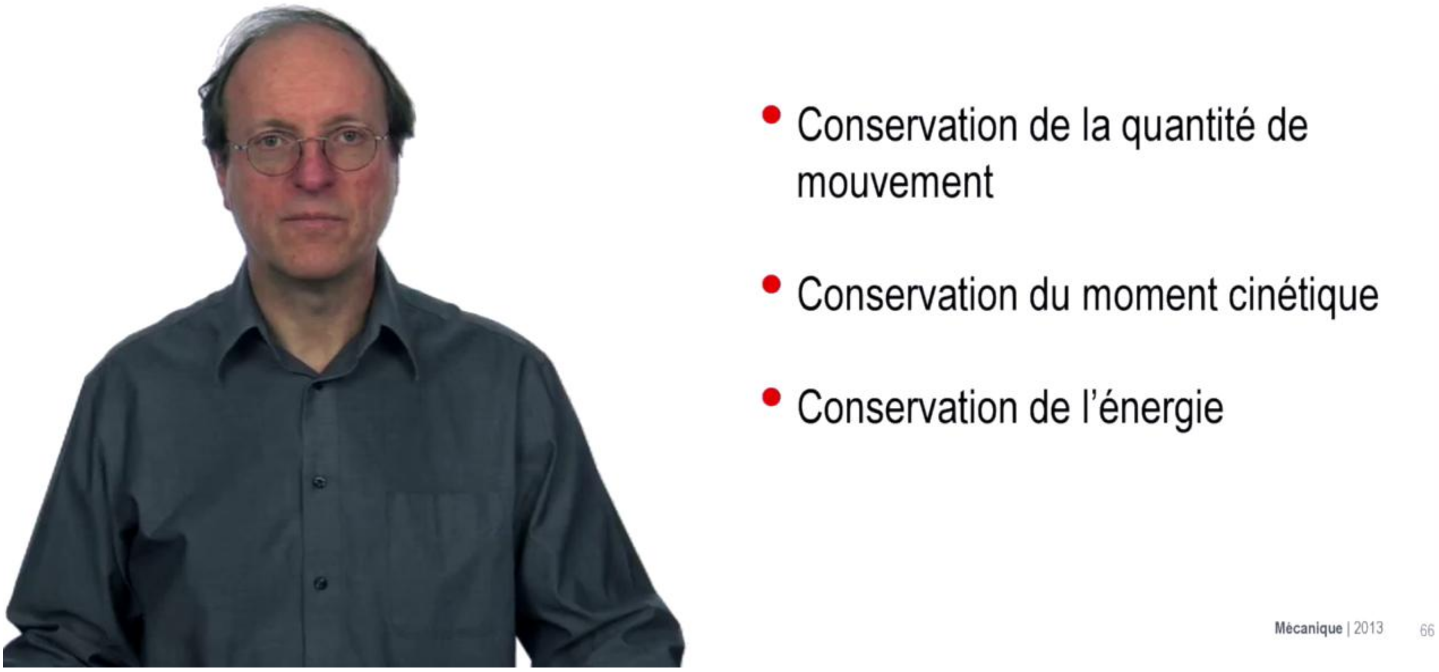
On a donc cette somme fois la même somme, une fois indicée sur k, mais m fois sur j, mais c'est la même somme. Donc, on voit qu'on a deux fois, on a un v carré, on a m alpha, v alpha au carré. Donc, on a deux fois l'énergie cinétique. Alors maintenant, H, c'est ce terme-là deux T moins L. Mais L, c'est T moins V, donc il reste T plus V. Et ça c'est l'énergie, donc on a trouvé que si L ne dépend pas explicitement du temps, cette grandeur est conservée. Si les contraintes ne dépendent pas du temps, alors ce terme-là, c'est l'énergie, et on a donc que l'énergie est conservée.

Notes

Summary

21m 02s

Symétries et conservations



Je résume. On a obtenu une conservation de la quantité de mouvement qui est une conséquence d'une symétrie de translation. La conservation du moment cinétique qui est une conséquence d'une symétrie de rotation. Et puis, on a obtenu la conservation de l'énergie, si on a un système où on n'a pas de dépendance explicite du temps, et la contrainte ne dépend pas explicitement du temps.

Notes

Summary

21m 49s