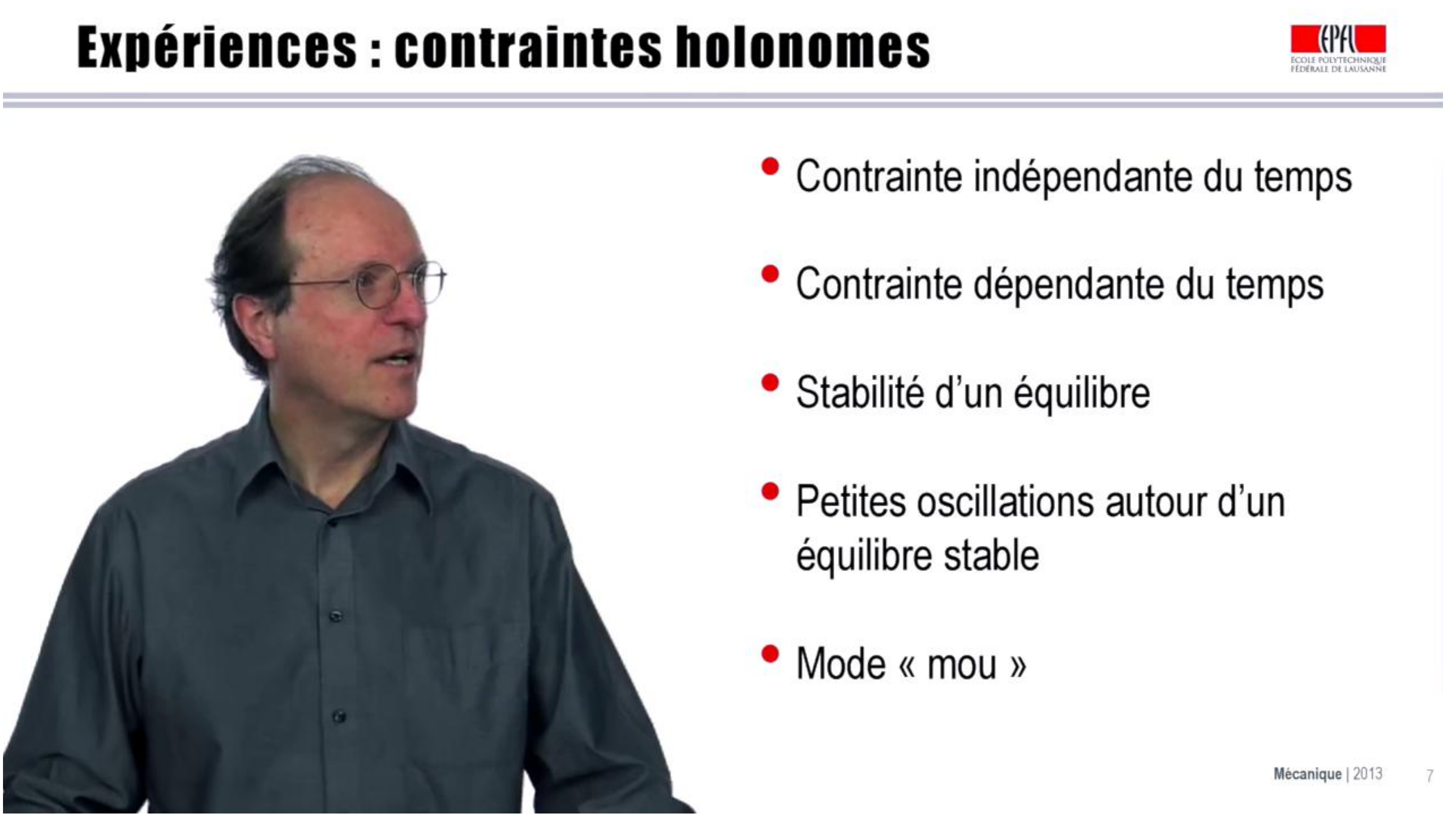
Expériences : contraintes holonomes

Mécanique, cours 25.exp

Jean-Philippe Ansermet

Search MOOC

Video



Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans ce module, on va regarder concrètement quelques exemples de contraintes holonomes. On va d'abord regarder une contrainte indépendante du temps, ensuite une contrainte qui dépend du temps, et après, j'aimerais discuter sur un exemple en utilisant les équations de Lagrange, la question des stabilités des équilibres, et des petites oscillations autour d'un équilibre. L'exemple que j'ai choisi ici m'intéresse particulièrement parce que on arrive à ce que j'appelle un mode mou, vous allez voir, un mode vibratoire dont la fréquence tend vers zéro quand on change un paramètre du système.

Notes

Summary

0m 03s

Contrainte indépendante du temps

- Contrainte indépendante du temps : point matériel astreint à se déplacer sur une surface dans le référentiel.

Mécanique | 2013 8

Je commence avec une contrainte toute simple, voyez cette surface, vous imaginez une bille astreinte à se déplacer sur cette surface, l'équation de la surface, c'est une de ces équations de contrainte, dite contrainte holonome.

Notes

Summary

0m 54s

Contrainte dépendante du temps

- Contrainte dépendante du temps : point matériel astreint à se déplacer sur un cercle en rotation uniforme d'axe vertical.
- Le déplacement virtuel est le long de l'anneau, différent du déplacement réel pendant un temps donné.

Mécanique | 2013 9

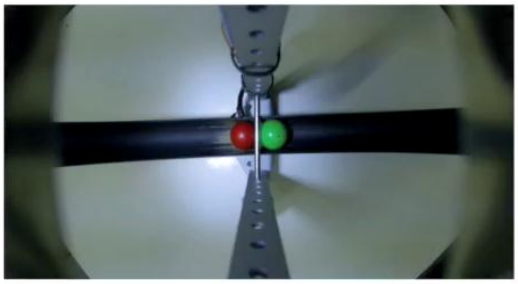
En revanche, si vous prenez le problème de la bille dans l'anneau, vous vous souvenez que, on a des billes qui roulent dans cette glissière hémisphérique, et la glissière elle-même tourne autour d'un axe vertical, alors là, on a une contrainte qui dépend du temps. C'est l'angle phi qu'on avait utilisé pour repérer la position de la bille dans l'anneau, l'angle phi qui est donc l'angle azimutal au sol sur la planche blanche, qui lui, est une fonction du temps et vaut oméga t, avec oméga qui est constant.

Notes

Summary

1m 14s

Equilibre et petites oscillations



- Anneau en rotation : la bille oscille autour d'une position d'équilibre. Quelle est cette position ?
- Quelle est cette fréquence ?
- Pratiquement, les frottements font que la bille s'immobilise rapidement à sa position d'équilibre.

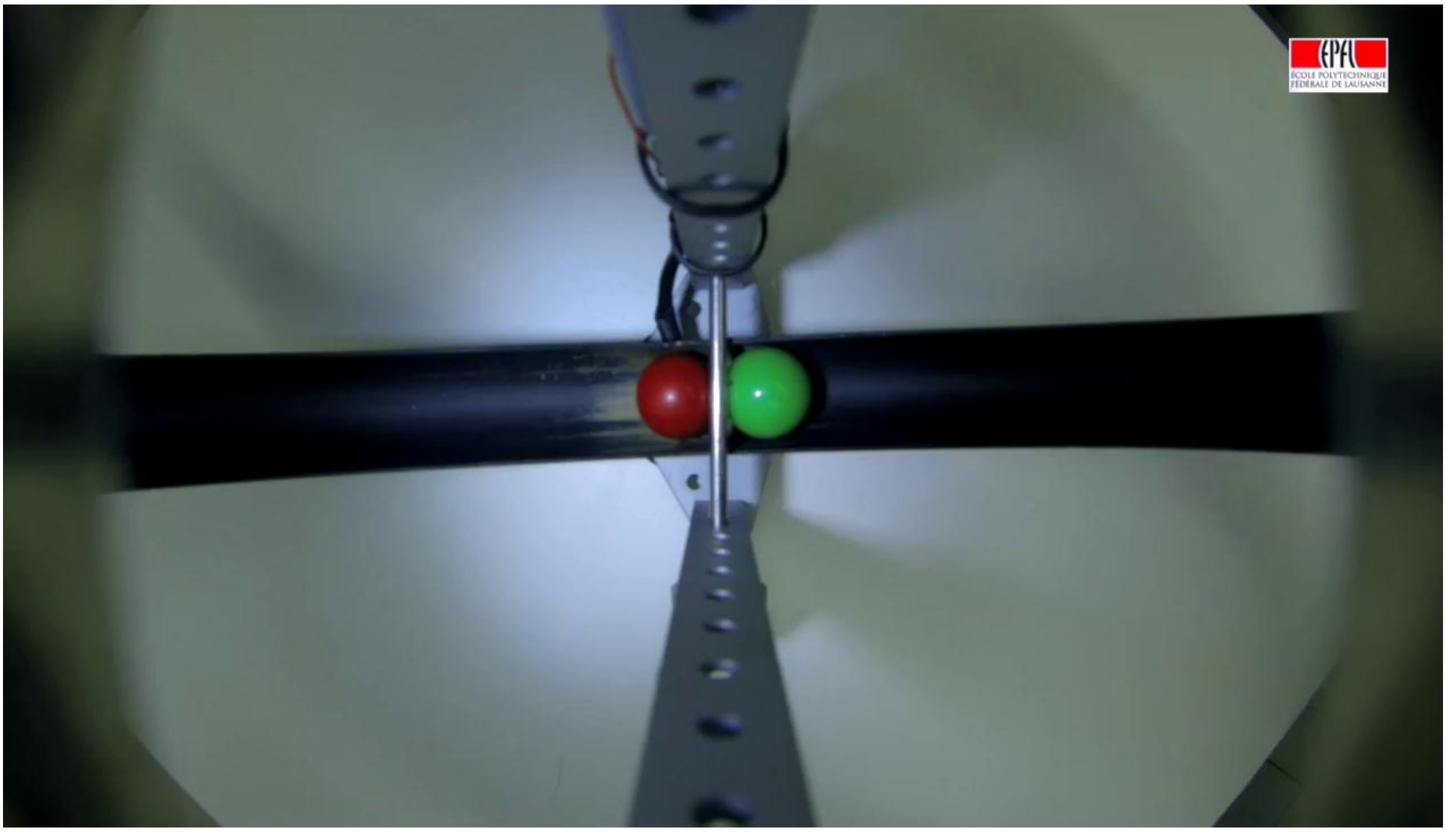
Mécanique | 2013 10

Ce que j'aimerais faire ici, c'est examiner l'équilibre de la bille, et puis les petites oscillations autour de l'équilibre. Avant de se lancer dans les calculs, pour nous remémorer ce système physique, je vous propose de regarder un film, je, sur ce film, la vitesse angulaire de la plateforme augmente gentiment, jusqu'au point où la bille sort de son équilibre au fond, et ce que je vous demande de noter, c'est qu'au moment où elle part, cette position au fond, elle oscille. Et ce qu'on veut déterminer dans la calcul qui suivra, c'est la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre. Sur ce dispositif, il y a du frottement, et l'oscillation ne dure pas longtemps. Je vous invite à regarder.

Notes

Summary

1m 54s



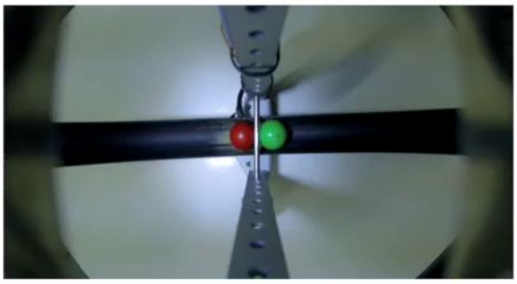
Voilà, on fait augmenter la vitesse de rotation, cet équilibre devient instable et voilà la bille qui oscille de côté. La caméra étant montée évidemment sur la glissière qui tourne. Et c'est le fond qui a l'air de tourner. Voilà ces oscillations-là. Là j'arrête le dispositif, la bille repart au fond.

Notes

Summary

2m 48s

Equilibre et petites oscillations



- Anneau en rotation : la bille oscille autour d'une position d'équilibre. Quelle est cette position ?
- Quelle est cette fréquence ?
- Pratiquement, les frottements font que la bille s'immobilise rapidement à sa position d'équilibre.

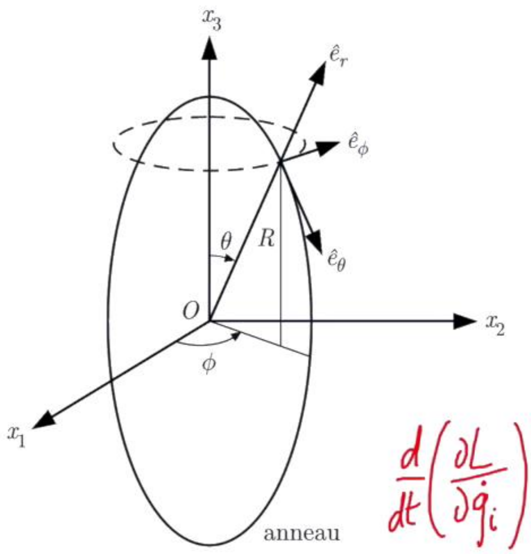
Ce sont les oscillations autour de la position d'équilibre latérale, que j'aimerais analyser.

Notes

Summary

3m 21s

Méthode de Lagrange



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Vitesse : $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$

Contraintes : $r = R \qquad \phi = \omega t$

Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$

Energie potentielle : $V = mgR\cos\theta$

Lagrangien : $L = T - V$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta}$$

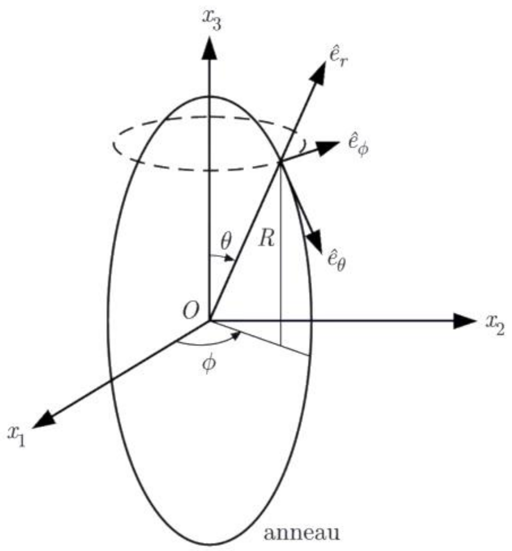
Mécanique | 2013 18

Bien sûr, on va le faire avec la méthode de Lagrange. Je propose d'utiliser comme la dernière fois qu¡on a visité ce problème, les coordonnées sphériques phi et thêta, ça, c'est ma glissière, et, pour travailler avec des angles aigus j'ai mis le point matériel là en-haut, donc là en-bas c'est un angle thêta égale pi, notez bien, et maintenant je vais m'attacher à exprimer la vitesse, et l'énergie cinétique, pour utiliser la méthode de Lagrange. Alors, la vitesse en coordonnées sphériques, on la connaît. On a comme contrainte que la coordonnée R est une constante, et phi, cet angle de rotation, vaut oméga t, avec oméga qui est une constante. L'énergie cinétique va contenir ce terme-là au carré, une demie de m, R carré thêta point carré, et puis il y a ce terme -là au carré, une demie de m, R carré, oméga carré sin carré thêta. On va prendre l'énergie potentielle mg fois la hauteur au-dessus du plan O x un, x deux, ça fait mgr cos thêta. Le lagrangien, c'est T moins V, je me suis économisé l'écriture de T moins V, c'est peut-être pas idéal, je ne vous recommande pas, mais ici pour raison de place sur la page, je ne l'ai pas fait, on doit calculer d de L sur d de delta point, hein, je vous rappelle Lagrange, d sur dt, d de L sur d de qi point, moins d de L sur d de qi égale zéro.

Notes

Summary

3m 26s



Vitesse : $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$

Contraintes : $r = R \qquad \phi = \omega t$

Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$

Energie potentielle : $V = mgR\cos\theta$

Lagrangien : $L = T - V$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

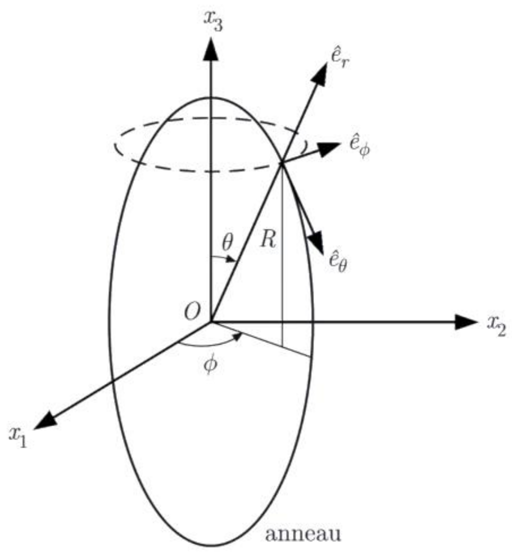
C'est ça, qu'il faut appliquer. Alors on calcule d de L sur d de thêta point, il y en a un ici, ça me donne simplement mR carré, thêta point, et ça je dérive par rapport au temps. Ça fait simplement un thêta point point, qui arrive. Je dois calculer d de L sur d de thêta, alors là c'est intéressant parce qu'il y a un terme en thêta dans l'énergie cinétique, et un autre dans l'énergie potentielle. Celui-là me donne sin thêta cos thêta, dans l'énergie potentielle, c'est moins V qu'il faut prendre, et la dérivée du cosinus ça fait moins sinus, donc on aura un plus au sinus ici. Et maintenant, ça, moins ça égale zéro, c'est ce qu'on écrit comme ceci, voilà on a déjà obtenu l'équation du mouvement.

Notes

Summary

5m 29s

Equilibres relatifs



$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

$$\text{équilibre relatif : } \ddot{\theta} = 0$$

$$\sin\theta_e\cos\theta_e = -\frac{g}{R\omega^2}\sin\theta_e$$

$$\text{Trois solutions : } \theta_e = 0; \quad \theta_e = \pi; \quad \cos\theta_e = \frac{-g}{\omega^2 R}$$

$$\cos\theta_e < 0 \implies \frac{\pi}{2} \leq \theta_e \leq \pi$$

$$|\cos\theta_e| < 1 \implies \omega \geq \omega_c = \sqrt{g/R}$$

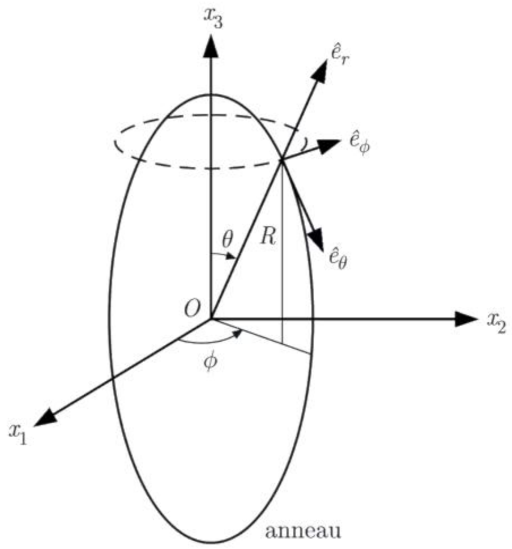
Et maintenant ce qui nous intéresse, c'est d'analyser les équilibres. Dans un premier temps. Je rappelle l'équation du mouvement. On cherche des équilibres relatifs, ça veut dire que, on regarde des positions de la bille tel que cet angle thêta ne bouge pas, enfin ne change pas, donc on veut thêta point point égale zéro dans l'équation du mouvement, on a donc cette équation-là, qui admet plusieurs solutions. On peut avoir sin thêta e, qui est nul, ce qui veut dire que, ou bien thêta e égale zéro, ou bien thêta e égale pi, zéro ça veut dire qu'on est là en-haut, on peut là en-bas, ou bien on peut encore avoir si sinus thêta n'est pas nul, alors ce qu'il faut avoir c'est cos thêta égale moins g sur oméga kR. Oméga carré R. On remarque deux choses, la première c'est que ce terme est négatif, donc j'ai cos thêta e qui est négatif, ça veut dire thêta e compris entre pi sur deux et pi, pi sur deux ce serait là, et pi, on est donc dans ce cadran-là, quand cos thêta e est négatif, et puis il faut faire attention dans cette formule, c'est que la valeur absolue du cosinus est toujours plus petite que un. Ça veut dire que la valeur absolue de cette fraction doit être plus petite que un.

Notes

Summary

6m 27s

Equilibres relatifs



$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

équilibre relatif : $\ddot{\theta} = 0$

$$\sin\theta_e \cos\theta_e = -\frac{g}{R\omega^2}\sin\theta_e$$

Trois solutions : $\theta_e = 0; \quad \theta_e = \pi; \quad \cos\theta_e = \frac{-g}{\omega^2 R}$

$$\cos\theta_e < 0 \implies \frac{\pi}{2} \le \theta_e \le \pi$$

$$|\cos\theta_e| < 1 \implies \omega \ge \omega_c = \sqrt{g/R}$$

Mécanique | 2013 27

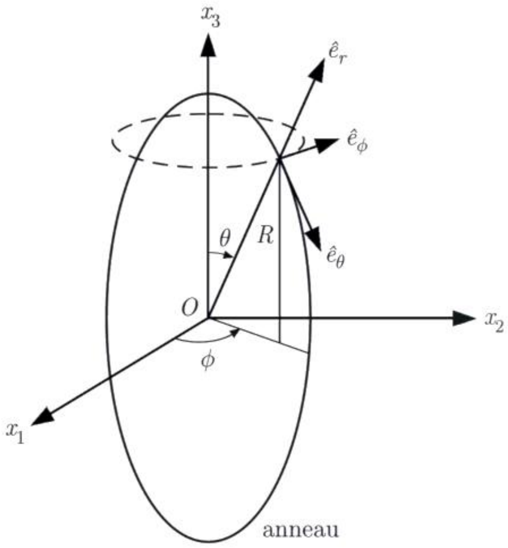
Alors on va dire que oméga doit être plus grand hein, si ça c'est plus petit que un, ça veut dire que oméga est plus grand qu'un certain oméga c pour critique, on verra que cette valeur intervient partout, c'est la racine de g sur R. Donc on a deux positions d'équilibre ici et si oméga est assez grand on a une troisième position qui apparaît ici.

Notes

Summary

8m 04s

Stabilité des équilibres



Petites oscillations autour de l'équilibre : $\theta = \theta_e + \delta\theta$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

équation dynamique au 1er ordre en $\delta\theta \ll 1$

$$\theta_e = 0 \qquad \ddot{\delta\theta} = \left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)\delta\theta$$

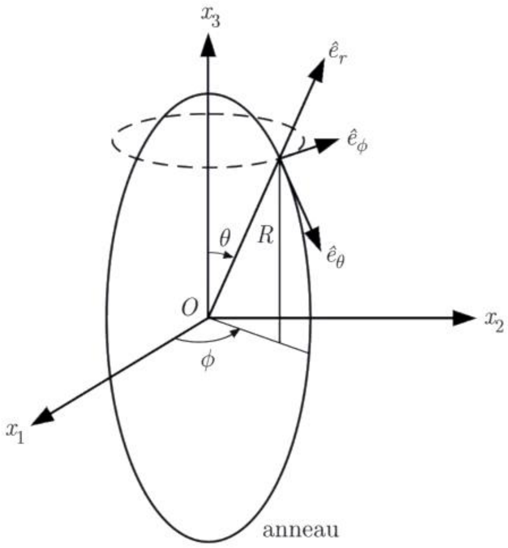
Mécanique | 2013 33

Alors maintenant on va examiner la stabilité des équilibres. Ce qu'on va faire, c'est qu'on va supposer que, par rapport à une position d'équilibre, on crée une petite déviation, et on va regarder s'il y aura une force qui va ramener l'angle vers la position d'équilibre, ou il y a une force qui plutôt tend à aller encore plus en-dehors de l'équilibre. Donc on fait une petite variation de l'angle d'équilibre, qu'on appelle, qu'on note delta thêta, et on va regarder ce que les équations du mouvement nous disent. Voilà, je rappelle l'équation du mouvement, et on va prendre un delta thêta petit. Alors, je commence avec la position thêta e égale zéro, c'est là en-haut. Alors nous, par notre intuition on connaît déjà la réponse, cet équilibre est toujours instable, alors on va le vérifier. Je vais écrire, à la place de thêta point point, j'ai delta thêta point point, et puis, quand je fais ces termes de l'autre côté du signe égale, alors j'ai le sinus thêta qui vaut à peu près thêta, le cos thêta qui vaut à peu près un, et ici j'ai un sinus thêta qui vaut thêta, je regroupe les termes, et j'ai ceci. Oméga carré est positif, g sur R est positif, Ce coefficient de thêta est positif, on a donc une équation du mouvement qui nous dit que delta thêta ne va qu'augmenter.

Notes

Summary

8m 32s



Petites oscillations autour de l'équilibre : $\theta = \theta_e + \delta\theta$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

équation dynamique au 1er ordre en $\delta\theta \ll 1$

$\theta_e = 0 \qquad \delta\ddot{\theta} = \left(\omega^2 + \dfrac{g}{R}\right)\delta\theta \qquad$ toujours instable

$\theta_e = \pi$

$\theta = \pi + \delta\theta \quad \cos(\pi + \delta\theta) \approx -1 \quad \sin(\pi + \delta\theta) \approx -\delta\theta$

$\delta\ddot{\theta} = -\left(\dfrac{g}{R} - \omega^2\right)\delta\theta \qquad$ stable si $|\omega| < \omega_c$

instable si $|\omega| > \omega_c$

Mécanique | 2013 38

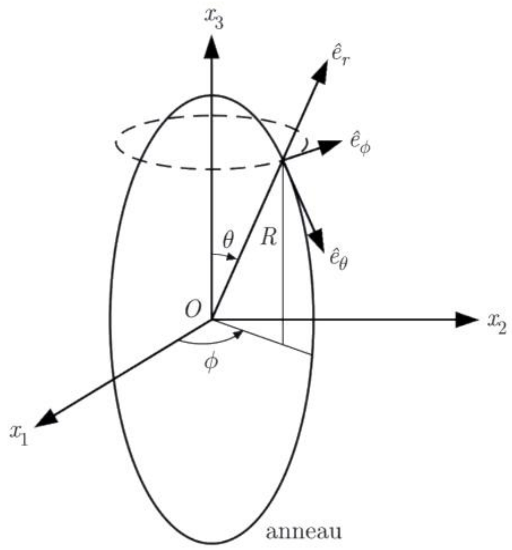
C'est donc un équilibre instable. Prenons maintenant thêta e égale pi, la deuxième solution qu'on avait trouvé, thêta e égale pi, c'est là en bas. Alors on pourrait s'attendre à ce que là, on ait un équilibre stable. En tout cas, à petite vitesse, on doit trouver un équilibre stable. Faisons le calcul, maintenant on écrit que thêta, c'est thêta e, plus une petite variation, c'est l'expression générale qu'on a ici pour le cas particulier où thêta e vaut pi. Le cosinus autour de pi, on va le prendre égal à moins un, et le sinus eh bien si vous regardez votre fonction sinus autour de pi, vous avez moins delta thêta. L'équation du mouvement, en mettant ces développements limités, prend la forme que voici. Alors on voit maintenant que si oméga est petit, et en fait oméga est plus petit que racine de g sur R, c'est la valeur critique, ici on a moins un terme positif, on a donc une équation d'oscillateur harmonique, et on a un équilibre stable, si maintenant oméga carré est plus grand que g sur R, ceci devient positif et c'est instable. Ça correspond à ce qu'on a observé quand on augmente la vitesse angulaire, donc le phi point, on finit par trouver que la bille ne reste pas là en-haut, elle part de côté. Donc je répète, on a un oscillateur harmonique pour autant que oméga soit assez petit, et si oméga est en-dessus de la valeur critique, cet équilibre devient instable.

Notes

Summary

10m 12s

Stabilité des équilibres



Petites oscillations autour de l'équilibre : $\theta = \theta_e + \delta\theta$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \qquad \cos\theta_e = \frac{-g}{\omega^2 R}$$

équation dynamique au 1er ordre en $\delta\theta \ll 1$

$$\ddot{\delta\theta} - \omega^2 \sin(\theta_e + \delta\theta)\cos(\theta_e + \delta\theta) = \frac{g}{R}\sin(\theta_e + \delta\theta)$$

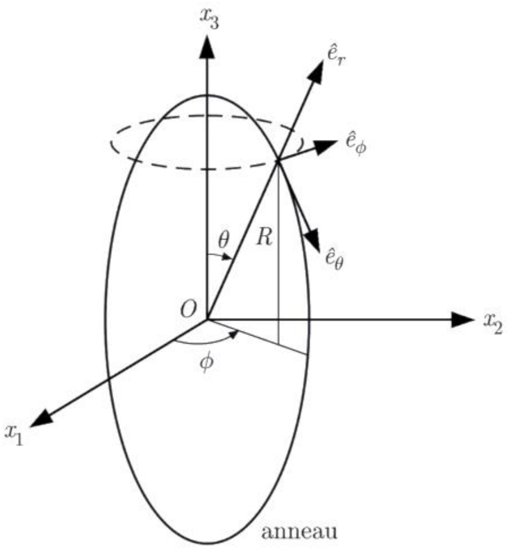
$$\ddot{\delta\theta} - \omega^2\left[\sin(\theta_e) + \delta\theta\cos(\theta_e)\right]\left[\cos(\theta_e) - \delta\theta\sin(\theta_e)\right] = \frac{g}{R}\left[\sin(\theta_e) + \delta\theta\cos(\theta_e)\right]$$

Reste encore à examiner la stabilité de l'équilibre autour de thêta e, qui est donné par cos thêta e égale moins g sur oméga carré R, alors je rappelle l'équation du mouvement. Je rappelle l'équation qui nous donne thêta e, on fait un développement limité pour un delta thêta petit, on a donc ici un sinus de thêta e plus delta thêta, pour thêta, j'écris aussi thêta e plus delta thêta, et là le sinus thêta je l'ai passé de l'autre côté du signe égale, aussi thêta e plus delta thêta. Et maintenant, j'applique la formule du développement limité, pour ces trois fonctions. Alors je l'ai déjà fait, vous savez que, au premier ordre, on a delta thêta fois la dérivée, la dérivée du sinus et le cosinus, la dérivée du cosinus, c'est moins le sinus, et ici on a aussi le cosinus. Alors là, on a deux termes qui multiplient deux termes. Il y aura quatre termes. Mais attention, avant de tout écrire, on se souvient qu'à l'ordre zéro, on a donc ce terme et celui-là, et encore celui-là de l'autre côté du signe égale. C'est exactement ces trois termes qui nous ont permis de trouver la position d'équilibre. C'était ce qu'on avait lorsque delta thêta point point égale zéro.

Notes

Summary

12m 22s



Petites oscillations autour de l'équilibre : $\theta = \theta_e + \delta\theta$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \qquad \cos\theta_e = \frac{-g}{\omega^2 R}$$

équation dynamique au 1er ordre en $\delta\theta \ll 1$

$$\delta\ddot{\theta} - \omega^2 \sin(\theta_e + \delta\theta)\cos(\theta_e + \delta\theta) = \frac{g}{R}\sin(\theta_e + \delta\theta)$$

$$\delta\ddot{\theta} - \omega^2\left[\sin(\theta_e) + \delta\theta\cos(\theta_e)\right]\left[\cos(\theta_e) - \delta\theta\sin(\theta_e)\right] = \frac{g}{R}\left[\sin(\theta_e) + \delta\theta\cos(\theta_e)\right]$$

$$\delta\ddot{\theta} - \omega^2\,\delta\theta\left[-\sin^2(\theta_e) + \cos^2(\theta_e)\right] = \frac{g}{R}\,\delta\theta\cos(\theta_e)$$

$$\delta\ddot{\theta} = -\omega^2\sin^2(\theta_e)\,\delta\theta$$

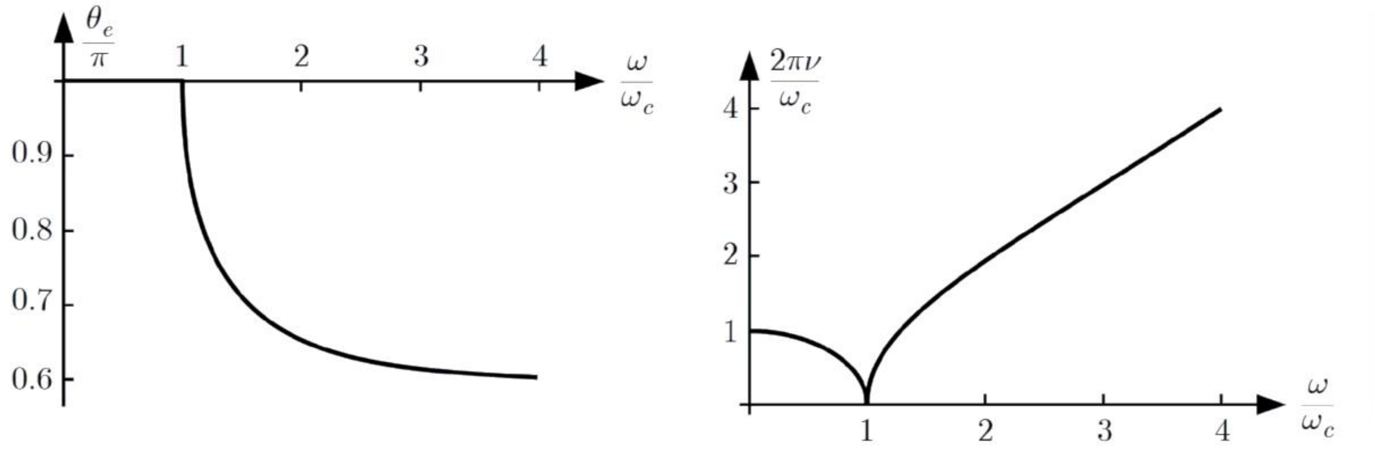
Donc, par définition de thêta e, ce terme fois ce terme, combiné avec ce terme, s'annule. Maintenant on a les termes du deuxième ordre. Quand je multiplie ce terme par ce terme, j'ai un terme en delta thêta carré, on les néglige. Donc il me reste ceci: avec un cos carré thêta e, un signe carré thêta e. Maintenant cos carré thêta e, ou si vous voulez le signe carré thêta e on peut le déduire de ceci, avec la trigonométrie élémentaire. Et lorsque je fais le calcul, et que j'utilise pour ces thêta e ce terme, il se trouve que tout se simplifie, tout se nettoie, et il ne reste plus que ceci. Donc, là on a, ça c'est une constante, donc ici on a encore une fois l'équation d'un oscillateur harmonique pour la variable delta thêta, mais il faut se souvenir que cette solution-là elle n'existe que si cette expression-là a un sens. Et on a discuté les conditions, la condition notoire c'était que oméga soit au-dessus de la valeur critique racine de gi sur R. Et quand cette solution existe, alors on a un oscillateur harmonique, et ce terme-là nous donne la pulsation au carré de l'oscillateur harmonique. Bon, je résume la situation par un graphique, qui est le plus intéressant, et c'est là que j'introduis la notion de mode mou.

Notes

Summary

13m 59s

Mode “mou” de la bille dans l’anneau en rotation



Mécanique | 2013 48

Je fais un graphe ici de l'angle d'équilibre thêta e divisé par pi, donc quand on est au fond de la glissière, en bas, on est à un, thêta e égale pi, et si on est ici j'ai l'axe des oméga normalisés par la valeur critique oméga c, ce qu'on a trouvé, c'est que l'équilibre stable était à thêta e égale pi, jusqu'à une valeur critique. Et à partir de là, hop, la bille part avec un angle plus petit que pi, donc remonte dans la glissière. Et ce qui est très intéressant, c'est que si je rapporte ici les résultats qu'on a obtenus pour la pulsation, deux pi nu, c'est la pulsation de l'oscillateur harmonique qu'on a trouvé au voisinage des positions d'équilibre, je la normalise par le même oméga c, alors ce que je trouve, c'est que lorsque on augmente la vitesse de rotation de la glissière, cette fréquence où la pulsation des petites oscillations diminue, à la valeur critique de oméga, elle devient nulle, et après elle augmente à nouveau. Il y a beaucoup de situations physiques où on a quelque chose comme cela, c'est-à-dire un, ce qu'on appelle un mode mou, un système oscillatoire, qui passe à travers un comportement critique, et au voisinage du comportement critique, la fréquence naturelle des oscillations devient très petite.

Notes

Summary

15m 45s