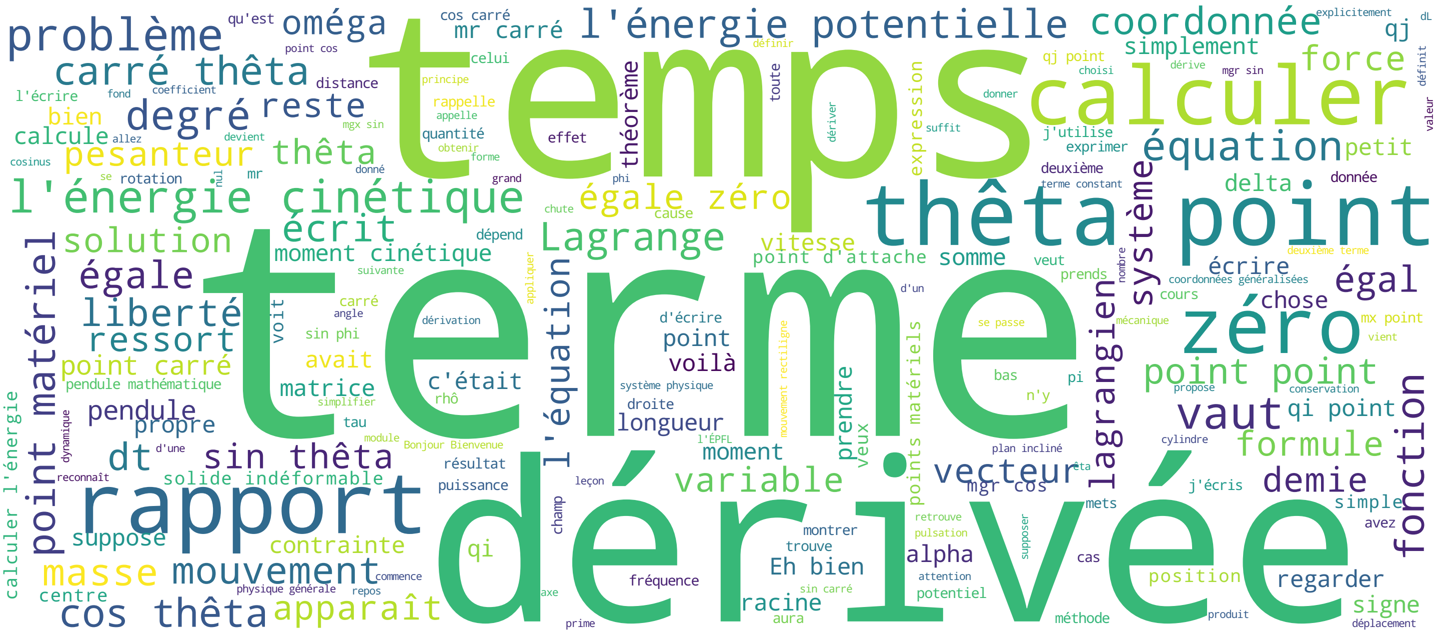
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-4-3

Méthode de Lagrange, applications

Mécanique, cours 25.2

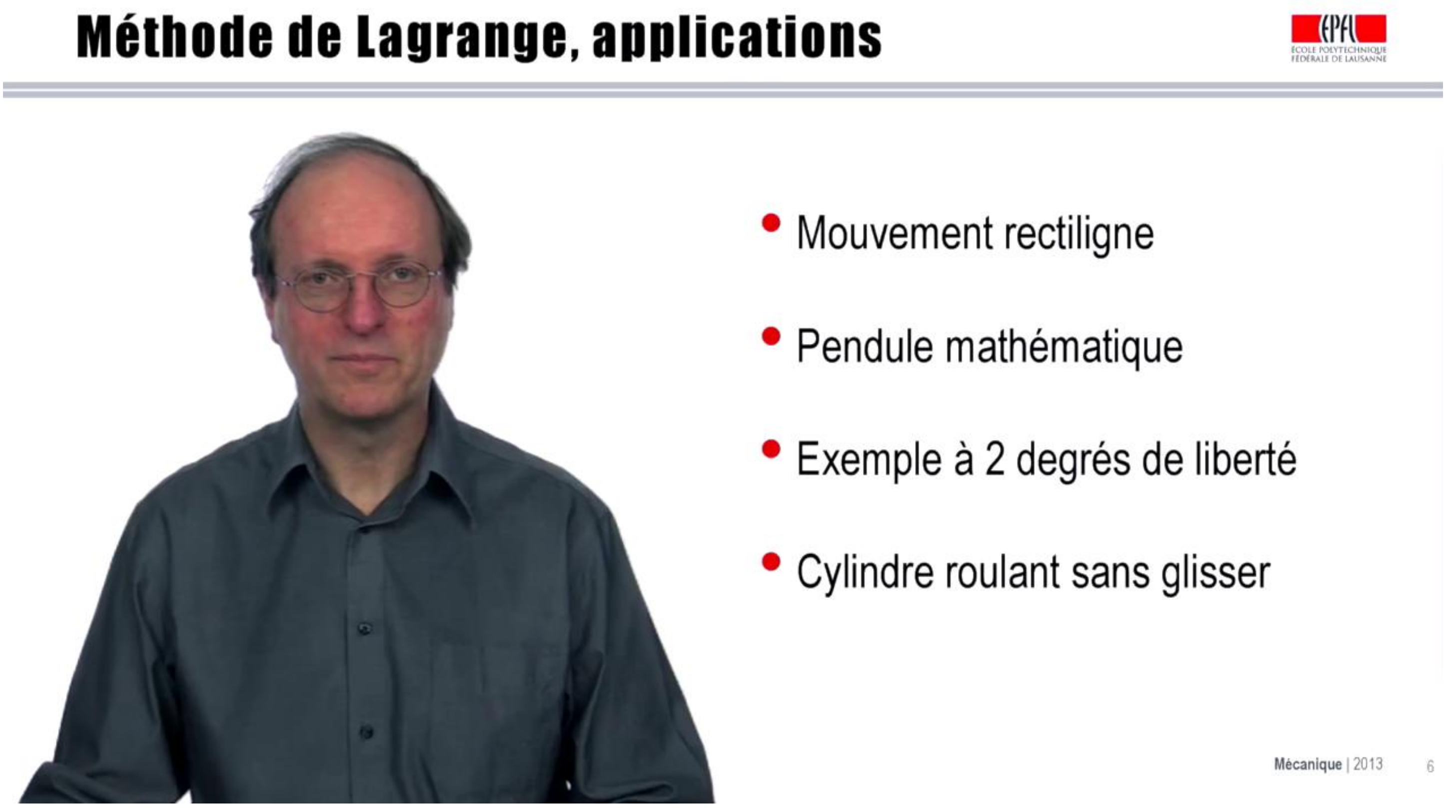
Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL



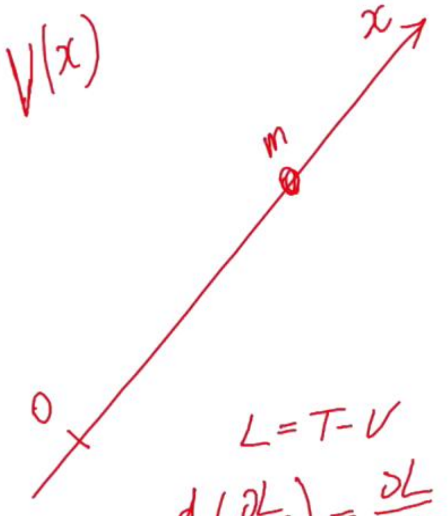
Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, je vais montrer comment on applique les équations de Lagrange à des problèmes de points matériels ou de solides indéformables. Je vais d'abord considérer un mouvement rectiligne, ensuite je vais regarder le pendule mathématique, donc un mouvement qui se définit par un angle, ensuite je vais regarder un problème avec deux degrés de liberté, et on terminera avec un problème de mécanique du solide indéformable.

Notes

Summary

0m 03s

Mouvement rectiligne, force conservative



$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Mécanique | 2013 7

Je commence avec le mouvement rectiligne. Il faut vous imaginer un point matériel astreint à se déplacer sur un axe. Alors je vais, comme d'habitude, me donner un axe cartésien qui est porté par la droite sur laquelle se déplace le point matériel, et je vais désigner par x la coordonnée de ce point matériel. Il est très facile d'obtenir l'énergie cinétique. Je vous rappelle que on a L qui vaut T moins V, et ce qu'on doit calculer, c'est d sur dt de d de L sur d de qi point qui est égal à d de L sur d de qi. Donc on doit calculer L, on doit d'abord calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Alors pour l'énergie potentielle, on va supposer qu'on a un V de x quelconque qui est donné.

Notes

Summary

0m 38s

Mouvement rectiligne, force conservative

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \text{la quantité de mouvement}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F \qquad \text{la force}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{x} = F$$

Mécanique | 2013 13

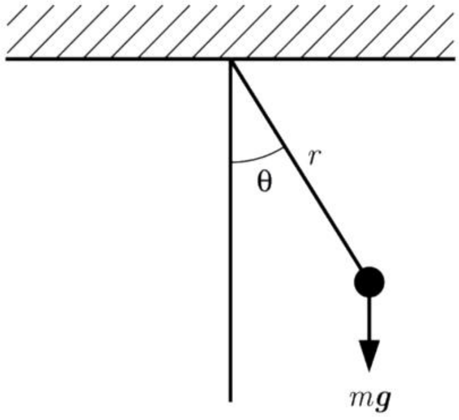
Alors, on a L qui vaut l'énergie cinétique, une demie de mx point carré, moins l'énergie potentielle V de x. Et on doit calculer d de L sur dq point, ici, c'est d de L sur d de x point, c'est mx point, et on constate tout de suite que on a ici la quantité de mouvement. On doit calculer d de L sur d de q, ici, c'est d de L sur d de x. Ici, je me fais référence à la notation générale. Ici, c'est pour ce cas particulier, ma coordonnée q, c'est x, la coordonnée cartésienne du point matériel. Et L, c'était moins V, donc j'ai moins dV sur dx. Et j'ai, reconnaît ici, la force. Et maintenant, l'équation de Lagrange me dit d sur dt de ce terme-là, est égal à ça. Eh bien, on voit qu'on est en train d'écrire mx point point égale F. On a tout simplement écrit la loi F égale ma pour ce problème. Passons maintenant à un pendule mathématique.

Notes

Summary

1m 56s

Pendule mathématique



$$L = T - V = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + m g r \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

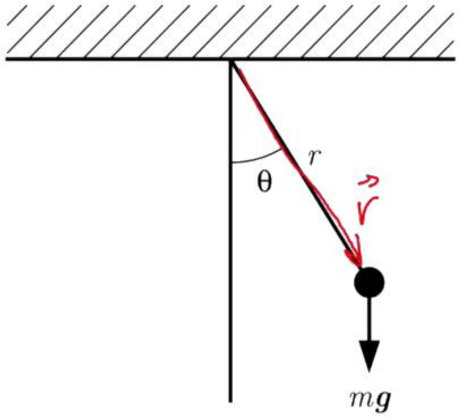
Alors voilà, vous avez cette droite qui définit la verticale, un fil sans masse, une masse au bout de masse m, dans le champ de la pesanteur, une force mg. Et je vais simplement calculer L égal T moins V. Pour l'énergie cinétique, il faudra considérer la vitesse. Alors la vitesse, elle est donnée en module par r thêta point. Et par conséquent, si je, j'exprime mon lagrangien L T moins V, j'ai ici une demie de mr carré thêta point. Pour l'énergie potentielle, eh bien, je dois calculer si je mets le zéro de l'énergie potentielle quand le point matériel est au plus bas, ce qui me faut, c'est cette distante-là qui vaut r moins r cos thêta. Et l'énergie potentielle V sera mgr un moins cos thêta. Maintenant, j'ai ici un terme constant. Qu'est-ce qu'on fait de notre lagrangien? On va en calculer des dérivées, donc les termes constants, ils nous servent à rien. Je vais l'enlever. Et L, c'était moins V, donc je dois prendre moins ce terme. Ça fera plus mgr cos thêta. Et maintenant, qu'est-ce que je dois faire? Je veux appliquer, je le répète, d sur dt de d de L sur d de qi point ou égal d de L sur d de qi. Alors, faisons-le. Je calcule d de L sur d de thêta point, j'ai mr carré thêta point.

Notes

Summary

3m 12s

Pendule mathématique



$$L = T - V = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$ le moment cinétique

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$$

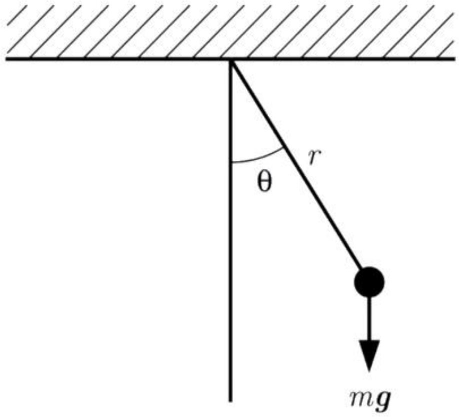
Peut-être faire attention ici, on a souvent, très souvent calculé des dérivées par rapport au temps, c'est pas ce qu'on est en train de faire ici. Ce que c'est, ce symbole signifie, c'est calculer la dérivée de L par rapport à la variable thêta point. Vous considérez thêta point comme une variable, et vous dérivez cette expression-là de L. Donc vous n'avez que mr carré thêta point. Il est pas question écri, ici d'écrire autre chose que ça. On a besoin, oh, pardon, on reconnaît dans ce terme-là le moment cinétique, donc on voit, on va, on va poindre ici ce qui va se passer, n'est-ce pas? Quand je calcule d de L sur d de thêta, je doit rivé, dériver ça par rapport à thêta. Ça fait moins mgr sin thêta. Eh bien, et la formule finale me dit que la dérivée de ça par rapport au temps, c'est la dérivée du moment cinétique, ma donnée est moins mgr sin thêta. Donc on aimerait bien que ce terme-là soit la projection sur la normale du moment de la pesanteur. Alors en effet, on a un vecteur r, si on faisait de la mécanique newtonienne habituelle, on aurait définit le vecteur r comme ça. On aura un moment r cross F qui tend à diminuer l'angle thêta, et c'est pour ça que il y a le signe moins qui apparaît ici.

Notes

Summary

5m 27s

Pendule mathématique



$$L = T - V = \frac{1}{2}\, mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$ le moment cinétique

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$$ le moment de force

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\sin\theta$$

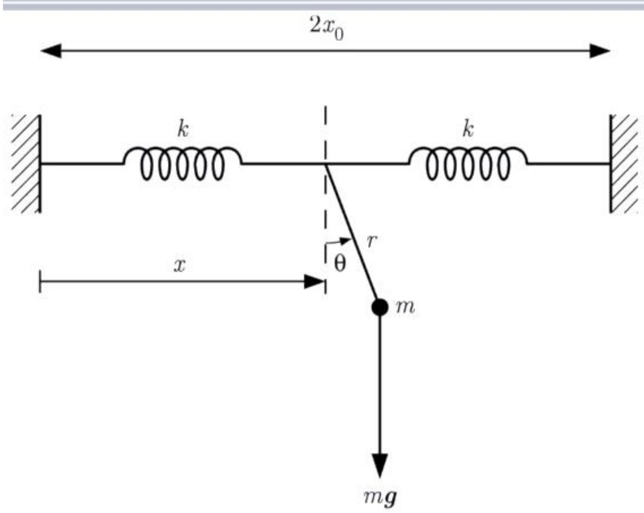
Donc encore une fois, pour Lagrange, il faut calculer dérivée de ça par rapport au temps, et ça doit être égale à ça. Pardon, j'ai le moment de force. Et donc, quand je dis que la dérivée de ça par rapport au temps, est égale à ça, j'ai simplement, en divisant par mr carré, le thêta point point qui vaut moins moins g sur r sin thêta, c'est la formule qu'on avait. Donc, c'est le résultat qu'on aurait obtenu si on avait appliqué le théorème du moment cinétique. Ce qui faut reconnaître dans la puissance de la méthode, c'est que pour un système physique donné, on s'attache à calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, et après on a plus que à faire des dérivées. Et on n'a plus besoin de décider si on va appliquer le théorème du moment cinétique ou le théorème, la, la, la deuxième loi de Newton, puisqu'ici on a un point matériel. Tout ce fait automatiquement par le choix des coordonnées généralisées qu'on s'est donné.

Notes

Summary

7m 07s

Exemple à 2 degrés de liberté



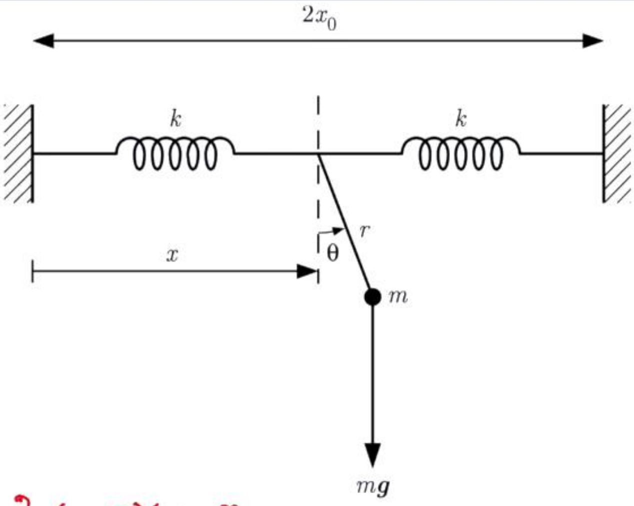
$$V = \frac{1}{2}\,k(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\,k(x-x_0)^2 - mgr\cos\theta$$

Je vous propose maintenant de regarder un problème avec deux degrés de liberté. Voilà le système physique. Il y a un point matériel ici, dans le champ de la pesanteur. C'est un pendule, et ce point d'attache, on suppose qu'il glisse sur une ligne horizontale, et il est retenu par deux ressorts. On suppose que x zéro, c'est la longueur au repos du ressort, que l'espacement en ces deux murs, c'est deux fois x zéro. Vous allez voir, c'est pour simplement rendre les écritures plus propres que j'ai pris, j'ai fait cette hypothèse qui ne fait que simplifier les écritures. Combien de degrés de liberté? Eh bien ici, on a deux degrés de liberté, parce qu'il ne suffit pas de donner l'inclinaison thêta du pendule. Il faut encore savoir où est ce point d'attache. Et ce point d'attache n'est pas imposé, il va suivre une certaine dynamique qui est imposée par les ressorts. Donc il faut deux degrés de liberté, on doit choisir x et r. Si maintenant je calcule l'énergie potentielle, alors, si je prends le ressort, ceci, c'est la longueur x. Pour le ressort à gauche, c'est simple, on a une demie de k fois l'élongation, c'est x moins x zéro au carré, c'est ce que j'ai écrit ici.

Notes

Summary

8m 12s



$2x_0 - x - x_0$

$x_0 - x$

$$V = \frac{1}{2}\,k(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}\,k(x - x_0)^2 - mgr\cos\theta$$

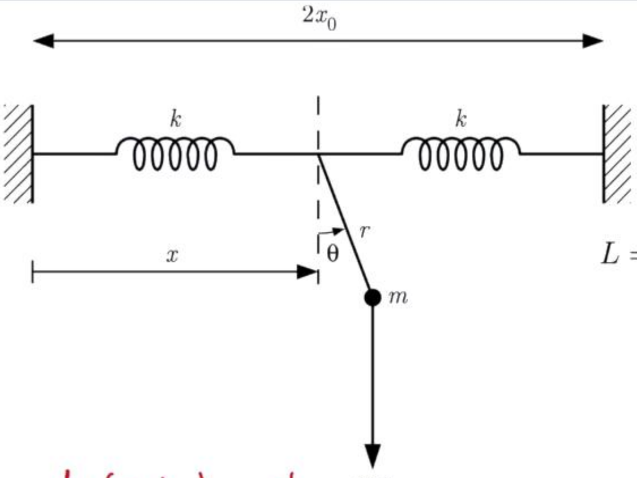
Pour le deuxième ressort, j'ai au fond un allongement qui vaut deux x zéro, cette distance-là, moins x ça me fait cette longueur-là, et à ça, il faut soustraire la longueur au repos du ressort. Donc j'enlève encore moins x zéro. Je me retrouve donc avec x zéro moins x, et quand on l'élève au carré on peut l'écrire x moins x zéro au carré, c'est le deuxième terme. Pour la pesanteur, on a la même chose pour le pendule mathématique, on a un mgr cos thêta, négatif, le potentiel c'est moins mgr cos thêta, j'ai enlevé le terme constant qu'on mettait d'habitude dans la formule.

Notes

Summary

9m 50s

Exemple à 2 degrés de liberté



$$V = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - mgr\cos\theta$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x + r\sin\theta \\ -r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta \\ +r\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgr\cos\theta - k(x-x_0)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$q_i : x , ($

Mécanique | 2013 27

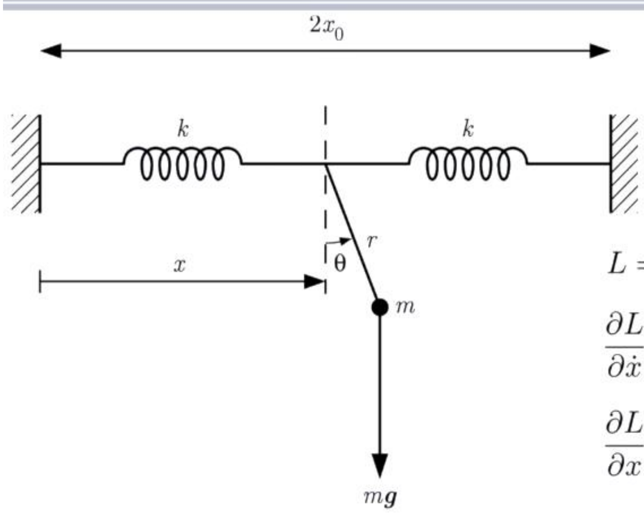
Pour l'énergie cinétique, c'est un peu délicat, c'est souv, toujours la cinématique qui fait, cause le plus de travail, alors je vais simplement écrire que le vecteur position c'est x plus cette distance-là, r sin thêta, dans la direction verticale, je vais écrire un moins r cos thêta, je dérive par rapport au temps pour obtenir la vitesse, c'est tout simplement ceci, et, maintenant, je suis prêt à calculer l'énergie cinétique, et carrément je peux écrire le lagrangien, j'ai ce terme au carré, x point au carré, il est là, j'ai ici un un demi de m r carré thêta point carré cos carré thêta, mais là j'ai la même chose en sin carré thêta, cos carré thêta plus sin carré thêta égal un, il ne reste plus que ça, là j'ai le double produit, qui donne ces termes, je dois calculer L, c'était moins v, donc je dois prendre moins ce terme, et moins ces deux termes qui sont identiques, ça fait moins k fois x moins x zéro au carré. Et maintenant qu'est-ce qu'il faut faire? Alors, rappelons-le encore une fois. Lagrange c'est d sur dt, de d de L sur d de qi point, moins d de L sur d de qi égale zéro. Donc je dois maintenant qi, c'est une fois c'est x, et une fois c'est thêta.

Notes

Summary

10m 58s

Exemple à 2 degrés de liberté



$$V = \frac{1}{2}\,k(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\,k(x-x_0)^2 - mgr\cos\theta$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x + r\sin\theta \\ -r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta \\ +r\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgr\cos\theta - k(x-x_0)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\big(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta\big) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + mr\dot{x}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2k(x-x_0) \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}r\dot{\theta}\sin\theta - mgr\sin\theta$$

$$m\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos\theta - mr\dot{\theta}^2\sin\theta + 2k(x-x_0) = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} + mr\ddot{x}\cos\theta + mgr\sin\theta = 0$$

Mécanique | 2013 33

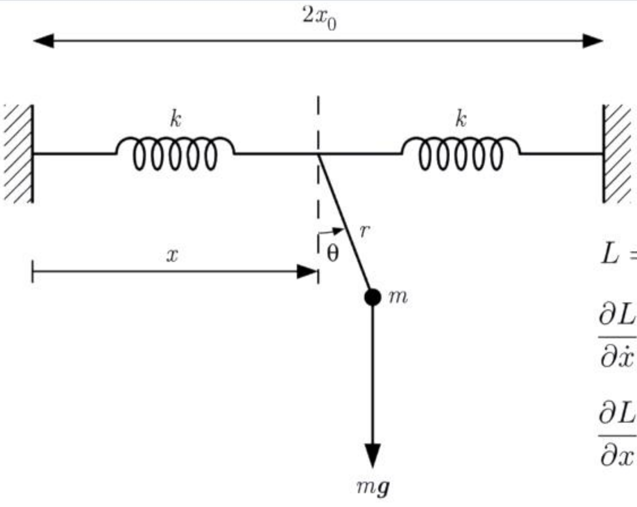
Donc il faut faire ce programme de dérivation deux fois. Allons-y. Je calcule d de L sur d de x point. x point apparaît ici, mais il apparaît là aussi. Donc j'ai ces deux termes. Je dois calculer d de L sur d de x, qui apparaît juste là, le x. Donc là la dérivée est toute simple. Et maintenant je dois faire la dérivée par rapport au temps de ce terme-là, moins ce terme-là égale zéro. Ça me donne ceci. En effet, j'ai un x point point. Il est là. J'ai un r thêta point point cos thêta, il est là. J'ai moins r thêta point carré sin thêta, il est là. Moins ce terme, plus deux k, x moins x zéro égale zéro. J'ai un problème à deux degrés de liberté, donc je dois faire les dérivées maintenant par rapport à thêta et thêta point, d de L sur d de thêta point, il y a un terme ici, mais il y en a un deuxième qui vient de là. C'est ce que j'ai écrit là. Le deuxième terme. Je dois calculer d de L sur d de thêta, thêta intervient ici et là, il y a deux termes, ils sont là. Et maintenant, je dois dériver ceci par rapport au temps. Alors, et je dois faire moins ça, égale zéro. Alors il reste plus que ça, pourquoi?

Notes

Summary

12m 50s

Exemple à 2 degrés de liberté



$$V = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - mgr\cos\theta$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x + r\sin\theta \\ -r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta \\ +r\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgr\cos\theta - k(x-x_0)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + mr\dot{x}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2k(x-x_0) \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}r\dot{\theta}\sin\theta - mgr\sin\theta$$

$$m\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos\theta - mr\dot{\theta}^2\sin\theta + 2k(x-x_0) = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} + mr\ddot{x}\cos\theta + mgr\sin\theta = 0$$

Mècanique | 2013 33

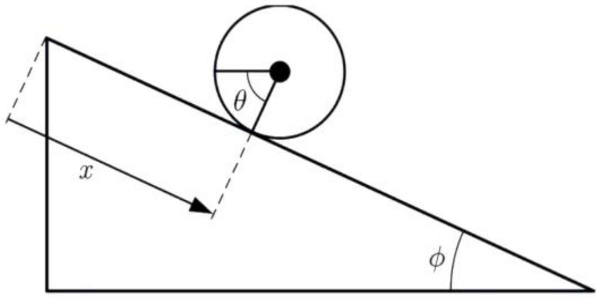
Parce que ici j'ai un mr x point point cos thêta, que j'ai écrit, mais il y a un mr x point thêta point sin thêta, avec un signe moins, celui-là, doit venir, mais c'est moins dL sur d thêta, donc il aura un signe plus, ces deux s'annulent, et il ne reste plus que ce terme-là, il est là. Et j'en ai terminé de ce problème, j'ai écrit les équations du mouvement pour ce problème avec deux degrés de liberté.

Notes

Summary

14m 29s

Cylindre roulant sans glisser



$$L = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + Mgx \sin\phi$$

$L(q, \dot{q}, \cancel{t})$

Mécanique | 2013 36

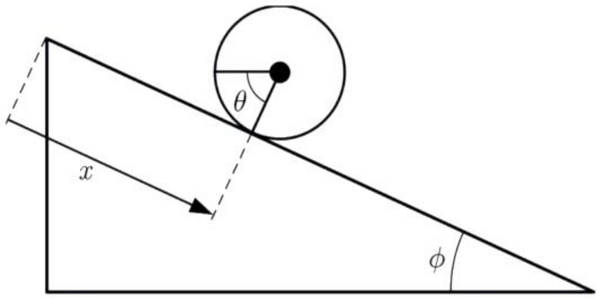
Je termine avec un problème de solide indéformable, je suppose d'examiner le problème d'un cylindre, qui descend un plan incliné. Alors, une bonne pratique de résolution de problème avec Lagrange, c'est d'écrire le lagrangien d'abord avec les variables qui nous conviennent le mieux. Et le plus simple, c'est d'écrire pour l'énergie cinétique une demie de m, x point carré, x c'est la coordonnée du centre de masse, donc là on a l'énergie cinétique qu'on aurait si toute la masse était au centre de masse, et je suppose que mon cylindre a un moment d'inertie i delta, j'utilise la variable angulaire thêta pour exprimer l'énergie cinétique de rotation du système autour de son centre de masse. Pour l'énergie, pour la, pour la pesanteur, potentielle de la pesanteur, je dois exprimer mg fois la hauteur, alors si j'écris mgx, sin phi, j'ai donc un terme comme ceci, qui est vers le bas, donc le v serait négatif, mais L c'était moins v, donc il devient plus mgx sin phi. Et maintenant, avant de me lancer dans les dérivations, je dois épurer ma formule pour que j'ai vraiment un L qui soit fonction de q, de q point, éventuellement du temps, ce n'est pas le cas ici, mais je ne veux avoir que q et q point, je ne veux pas avoir des variables auxiliaires.

Notes

Summary

15m 01s

Cylindre roulant sans glisser



$$L = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + Mgx\sin\phi$$

Roulement sans glissement : $x = R\theta$

1 degré de liberté

$$L = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2}\right) \dot{x}^2 + Mgx\sin\phi$$

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\phi}{\left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2}\right)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2}\right)\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = Mg\sin\phi$$

Mécanique | 2013 42

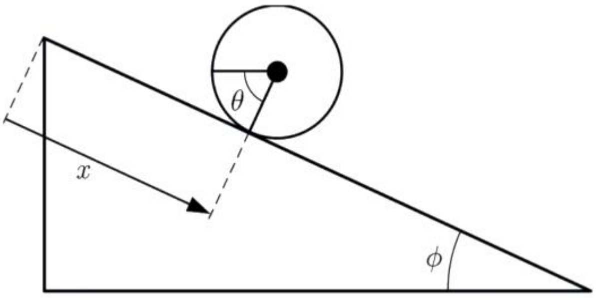
Or c'est ce que je fais, j'utilise la condition de roulement sans glissement,que je peux exprimer comme x étant égale à R fois thêta, R, j'aurais pu le noter ici, le rayon du cylindre, comme ceci, et donc j'ai x point qui vaut R thêta point, si je choisis maintenant x comme coordonnée généralisée, je dois me débarrasser du thêta point ici, parce que j'ai un degré de liberté. Alors si j'utilise la relation thêta point égale x point sur R,, j'ai ici, une fois que je mets en ordre mes termes, j'ai une demie de m, x point carré, avec le un, c'est si on avait un point matériel et ça c'est dû au fait qu'on ait on solide. Et là j'ai bien x. J'applique Lagrange, je dois calculer d de L sur d de x point, ça me donne ce terme, et après je dois calculer d de L sur d de x, là il n'y a pas de x, il n'y en a qu'un là, c'est tout simple. Et après j'écris que la dérivée par rapport au temps de ce terme-là doit être égale à ce terme-là, et je simplifie un petit peu les expressions, on trouve ceci, on trouve que tout se passe comme si on avait une chute, dans un champ constant qui vaut plus g mais g sin phi à cause de l'inclinaison du plan incliné, et puis il y a encore ce terme normalisation en-dessous, I delta divisé par un R carré qui apparaît.

Notes

Summary

16m 49s

Cylindre roulant sans glisser



$$L = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + M g x \sin\phi$$

Roulement sans glissement : $x = R\theta$

1 degré de liberté

$$L = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2}\right) \dot{x}^2 + M g x \sin\phi$$

$$\ddot{x} = \frac{g \sin\phi}{\left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2}\right)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2}\right) \dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = M g \sin\phi$$

C'est bien un terme sans unité. Et voilà un exemple d'application pour un solide indéformable, on a adopté la même approche algébrique, on a écrit L, et après on fait des dérivées.

Notes

Summary

18m 38s