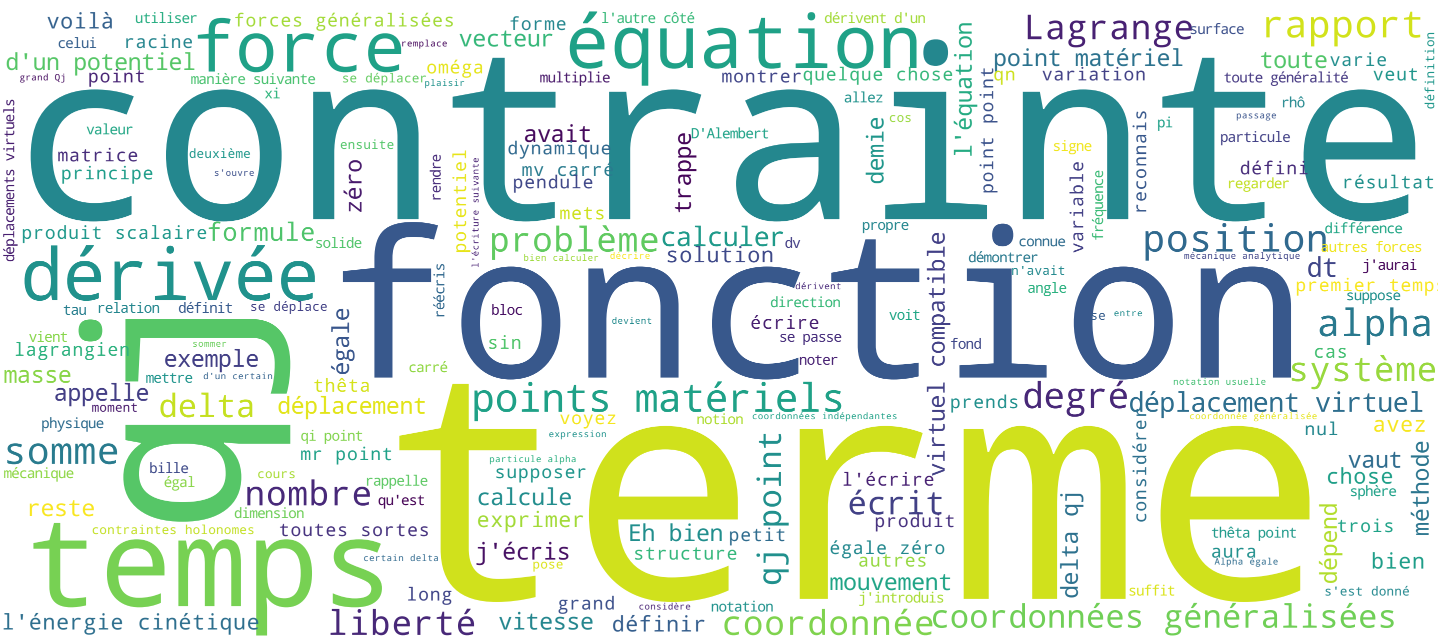
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-4-2

Méthode de Lagrange

Mécanique, cours 25.1

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

Méthode de Lagrange

- Contraintes
- Nombre de degrés de liberté
- Déplacements virtuels compatibles
- Forces généralisées
- Equations de Lagrange

Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, je vais introduire une méthode extrêmement efficace pour obtenir les équations du mouvement. Je l'appelle la méthode de Lagrange, et les équations sont connues comme les équations de Lagrange. Ce chapitre, typiquement, fait partie d'un cours qu'on appelle mécanique analytique, la mécanique analytique permet de révéler toutes sortes de structures fondamentales, importantes, de la mécanique, mais ici, ce que j'introduis, ne sert au fond que à donner une méthode pour résoudre les problèmes de mécanique que vous avons vus jusqu'à maintenant. Dans un premier temps, on va considérer un système mécanique avec des contraintes simples, on va voir combien le système a de degrés de liberté, on va devoir définir ce qu'on appelle un degré de liberté, on va voir les déplacements virtuels compatibles avec les contraintes du problème, cela va nous permettre de définir ce que je vais appeler des forces généralisées, on aura des coordonnées généralisées, on aura des forces généralisées, et enfin on va voir les équations de Lagrange, qu'on va pouvoir appliquer à toutes sortes de situations.

Notes

Summary

0m 03s

Définition : contraintes

N points matériels

positions : $\boldsymbol{r}_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, N$

contraintes exprimables sous la forme d'un ensemble de k équations :

$$
\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) &= 0 \\
f_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) &= 0 \\
&\vdots \\
f_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) &= 0
\end{aligned}
$$

k : le nombre de contraintes

dites : "holonômes"

Ces contraintes peuvent dépendre explicitement du temps

Je commence avec les contraintes. Alors, voilà le problème que je me pose. J'ai N points matériels. Je repère la position de ces grands N points matériels avec le vecteur r alpha. Alpha égale un à N, c'est la notation qu'on a utilisée jusqu'à maintenant pour un système de points matériels. Maintenant, j'imagine que mon système est tel que j'ai des contraintes géométriques que je peux exprimer de la manière suivante. Vous voyez ici une série d'équations, ce sont des fonctions des positions r un, r deux, r N, des N points matériels, cette fonction peut être aussi fonction du temps, et j'ai k, équation de ce type-là. Grand N, c'est le nombre de points matériels, k, c'est le nombre de contraintes. Quand on a des contraintes qui s'expriment ainsi par des relations fonctionnelles des positions seulement, on dit qu'on a des contraintes holonomes. On pourrait avoir des contraintes sur les vitesses, ce serait différent, que ce qu'on a ici. Ici on a ce qu'on appelle dans la littérature des contraintes holonomes. Encore une fois, ces contraintes peuvent dépendre explicitement du temps, il faut ici voir une nuance, on va supposer une certaine dynamique à ce système de N points matériels.

Notes

Summary

1m 27s

Définition : contraintes

N points matériels

positions : $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, N$

contraintes exprimables sous la forme d'un ensemble de k équations :

$$
\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) &= 0 \\
f_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) &= 0 \\
&\vdots \\
f_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) &= 0
\end{aligned}
$$

k : le nombre de contraintes

dites : "holonômes"

Ces contraintes peuvent dépendre explicitement du temps

Mécanique | 2013 15

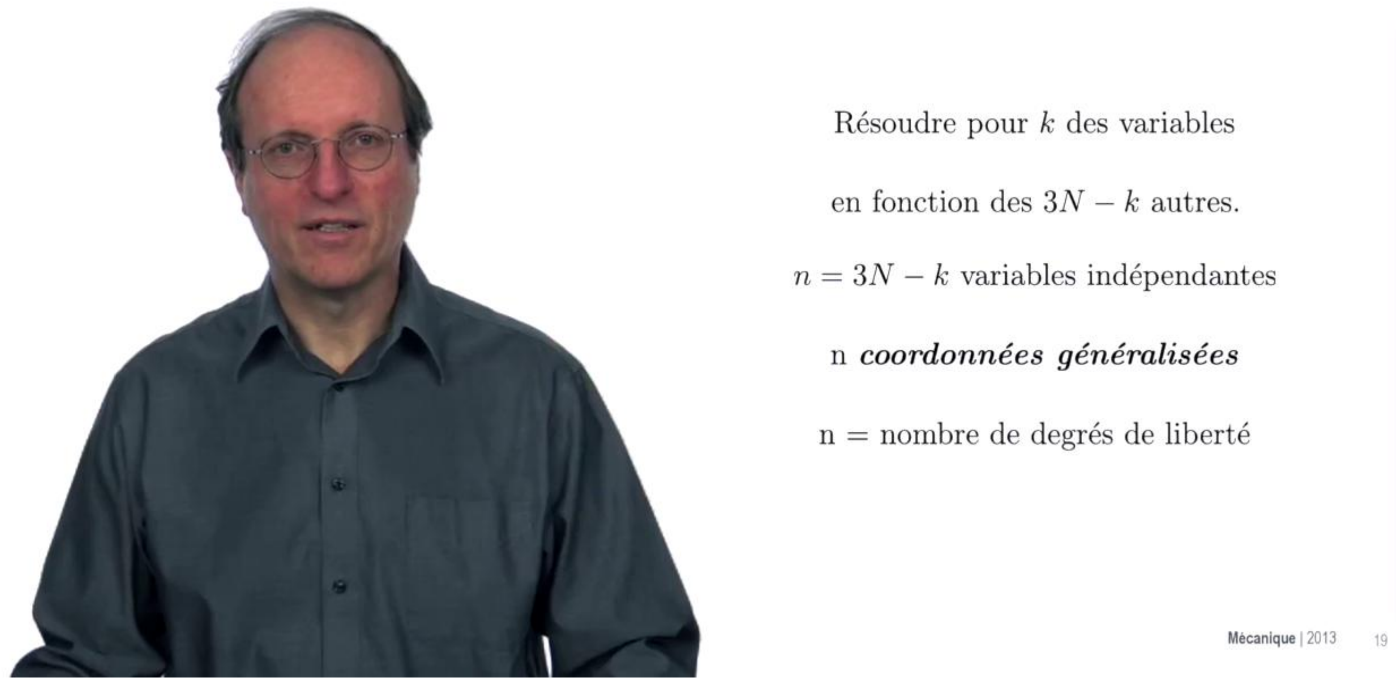
Donc r un, r deux, r N vont dépendre du temps, ça c'est ce qu'on appelle une dépendance implicite du temps, mais on peut avoir une fonction explicite du temps, qui est représentée ici par le fait que le temps devient une variable explicite de cette fonction-là. Par exemple, on a vu le problème de la bille qui est astreinte à se déplacer dans un anneau et l'anneau tourne autour d'un axe vertical, là on un exemple de contrainte qui dépend du temps, explicitement.

Notes

Summary

3m 09s

Définition : nombre de degrés de liberté



Alors maintenant je définis cette notion extrêmement importante en mécanique lagrangienne, la notion de degrés de liberté. On retrouve d'ailleurs cette notion dans toutes sortes de domaines de la physique. Ici, on s'est donné k contraintes. Et on avait N points matériels, donc on avait trois N coordonnées pour représenter les positions de ces N points matériels, on peut choisir d'exprimer k de ces trois N coordonnées en fonction des autres. Il nous reste à ce moment-là trois N moins k coordonnées indépendantes. Ce nombre trois N moins k de coordonnées indépendantes qu'il faut, et qui suffisent à décrire la position du système de points matériels, ce nombre que j'ai noté petit n, c'est ce qu'on appelle le nombre de degrés de liberté. On va utiliser des coordonnées généralisées, n, petit n coordonnées généralisées, pour définir la position des points matériels du système. Prenons un exemple. Vous avez un point matériel, un seul, astreint à se déplacer sur une sphère. Il faut deux angles pour définir la position de ce point matériel, donc on aura deux degrés de liberté. Si maintenant ce point matériel est attaché à un fil, de longueur fixe, sans masse, qui est accroché au pôle Nord, de cette sphère, alors vous n'avez plus que un degré de liberté.

Notes

Summary

3m 42s

Définition : nombre de degrés de liberté

Résoudre pour k des variables

en fonction des $3N - k$ autres.

$n = 3N - k$ variables indépendantes

n ***coordonnées généralisées***

n = nombre de degrés de liberté

Mécanique | 2013 19

Votre point matériel se déplace toujours sur une surface à deux dimensions, la sphère, mais il suffit d'un seul angle, il suffit d'une coordonnée généralisée pour décrire la position du point matériel. Donc dans ce cas, le deuxième cas, on dira que n vaut un.

Notes

Summary

5m 41s

Définition : coordonnées généralisées

$$(q_1, \ldots, q_n)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\
\boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{r}_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{r}_N &= \boldsymbol{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)
\end{aligned}$$

Positions de N points matériels
données par n coordonnées généralisées

Mécanique | 2013 22

Alors, maintenant la notation usuelle, c'est de noter ces coordonnées, pourquoi généralisées? Parce que ça peut être ou bien une distance, ou bien un angle. La notation usuelle c'est de les noter q un à qn. Et maintenant les positions de nos grands N points matériels, sont données comme des fonctions des coordonnées généralisées, et du temps, le temps pouvant apparaître explicitement dans ces fonctions. Pour vous souvenir un peu mieux de cette notation, si vous pensez à un solide, le nombre de degrés de liberté d'un solide, on l'a vu, c'est entre un et six. Le nombre de points matériels qui définissent ce solide peut lui être beaucoup, beaucoup plus grand. Donc j'ai utilisé grand N pour le nombre de points matériels, petit n pour le nombre de degrés de liberté. Prenons un exemple de contraintes qui dépend du temps.

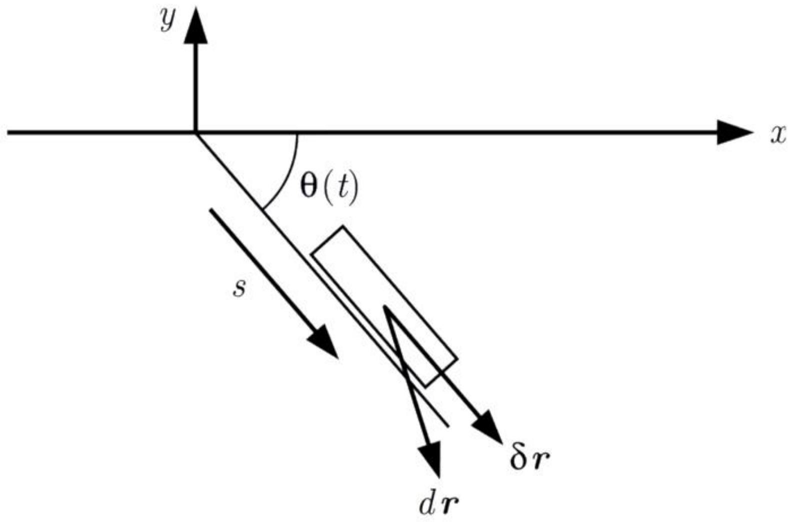
Notes

Summary

6m 03s

Exemple de contrainte dépendant du temps

déplacements virtuels compatibles avec les contraintes



$\delta \boldsymbol{r}(t)$

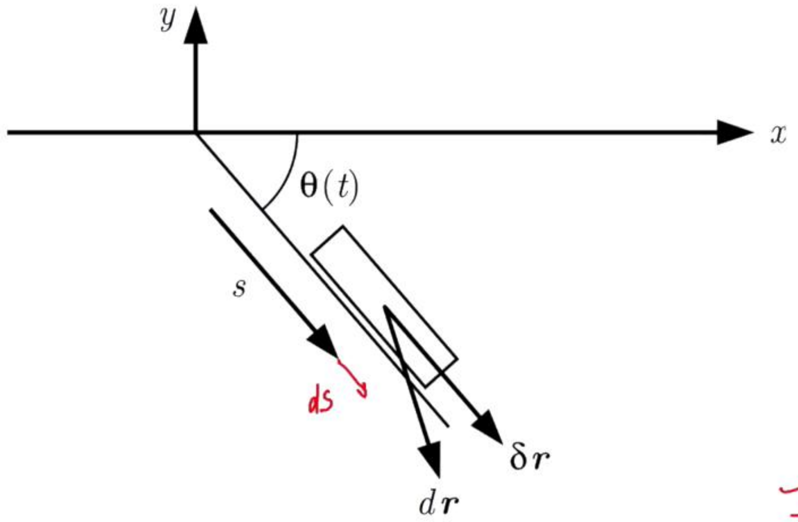
Je vous invite à considérer la situation suivante. On imagine, que ceci est une horizontale, et qu'il y a une trappe qui s'ouvre dans ce plancher. Ici, vous avez la trappe. Et ici j'ai défini l'angle et je suppose ici que j'ai quelque chose comme fois t, avec a une constante, donc j'ai une équation horaire qui est fixée. Quel est le nombre de degrés de liberté de ce problème? Alors, je m'excuse. Ici, au lieu d'un point matériel j'ai un bloc. Ça, c'est l'objet donc je veux étudier la dynamique. Combien de degrés de liberté j'ai pour ce bloc? Eh bien, il y en a un. On se déplace dans un plan vertical, ça c'est un espace à deux dimensions, mais la coordonnée thêta étant fixée, il y a que ce déplacement marqué par la coordonnée s, qui est notre coordonnée généralisée. Et maintenant je pose la question suivante: quel est le déplacement que j'aurais, je parle d'un déplacement virtuel, quel est le déplacement que j'aurais, si le bloc se déplaçait le long de la contrainte quand j'enlève le mouvement de la contrainte? Eh bien je l'ai noté ici delta r. c'est un glissement le long de cette trappe. Ça, j'appelle le déplacement virtuel compatible avec les contraintes.

Notes

Summary

7m 02s

Exemple de contrainte dépendant du temps



déplacements virtuels compatibles avec les contraintes

$$\delta \boldsymbol{r}(t)$$

$$\neq \boldsymbol{v}dt$$

si les contraintes dépendent du temps

$$x = s\cos(at) \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \cos(at)$$

$$y = -s\sin(at) \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -\sin(at)$$

$\vec{r}$

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds$$

Quand on a une contrainte comme cette trappe, qui s'ouvre, ce déplacement virtuel delta r, n'est pas la même chose que vdt, ça serait dr, marqué ici. Pourquoi? Parce que dans un temps dt, il y a bien un déplacement du bloc le long de la trappe, mais il y a aussi le fait que la trappe descend. Donc on a un d de r qui est distinct du delta r. Pour rendre les choses plus concrètes, examinons les coordonnées de position x et y, x et y étant les coordonnées ici de, du centre de masse de ce bloc. Alors je vais écrire x égale s cos at, où at c'est la valeur de l'angle thêta, en fonction du temps, et y égale moins sin at. Si maintenant je calcule la dérivée de x par rapport à s, vous avez cos at. Si je calcule la dérivée de y par rapport à s, j'ai moins sin at. Et vous voyez que ici on a cos at moins sin at, c'est un vecteur unité dans cette direction-là, donc dans la direction du déplacement. Donc, quand je prends un vecteur r comme ceci, et maintenant je calcule d de r. Ici, j'ai calculé d de r sur d de s. J'ai un vecteur dans la direction tangente à la contrainte. Et donc, si je multiplie par ds, si j'ai un déplacement ds comme ceci, alors j'obtiens mon delta r. Donc, on voit comment on calcule un delta r dans ce cas-là, qui est donc un déplacement virtuel compatible avec les contraintes.

Notes

Summary

8m 49s

Définition : déplacements compatibles

$$\delta \boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha(q_1 + \delta q_1, \ldots, q_n + \delta q_n, t) - \boldsymbol{r}_\alpha(q_1, \ldots, q_n, t)$$

$$\delta \boldsymbol{r}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \, \delta q_j$$

Comment est-ce qu'on va faire pour définir le déplacement virtuel compatible avec les contraintes en toute généralité? Eh bien, on va considérer le vecteur position de la particule alpha quand les variables, les coordonnées généralisées q un, qn sont augmentées d'un certain delta q un, delta qn. Et on fait la différence avec la position de la particule alpha quand on est à une position donnée par q un et qn. Encore une fois, si on n'avait que une coordonnée qui varie, comme la coordonnée s pour le problème de la trappe. On a juste ici, la, la, s qui varie d'un certain delta s, et on compare avec le r qu'on a quand delta s égale zéro. Et ça, ça nous donne le déplacement virtuel compatible. Mais ici, on a plusieurs, on suppose dans toute généralité, qu'on a un déplacement qui est défini par plusieurs coordonnées généralisées. Et donc, si ces déplacements sont infinitésimaux, je peux écrire ce delta r de la manière suivante : je calcule la dérivée d de r sur d de qj, et j'aurais pu écrire j égal un à n, le nombre de degrés de liberté. Et je multiplie par delta qj. Au fond, pour calculer cette différence, je regarde la variation quand q un varie, la variation quand, variation de la position quand q un varie, quand q deux varie, quand qn varie. Et je l'exprime avec cette règle de développement limité qu'on connaît bien maintenant.

Notes

Summary

11m 11s

Principe de d'Alembert

décomposition $\boldsymbol{F}^{tot} = \boldsymbol{F}^{cont} + \boldsymbol{F}$

d'abord : un seul point matériel

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{cont} - m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

$\delta\boldsymbol{r}$ virtuel compatible avec les contraintes

$$\left(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{cont}\right) \cdot \delta\boldsymbol{r} - m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0$$

hypothèse $\boldsymbol{F}^{cont} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0$

Maintenant, je vais m'attacher à faire une description de la dynamique où je supprime les forces de contrainte. On verra à la fin de la théorie, que on peut très bien calculer les contraintes par la méthode de Lagrange, mais dans un premier temps, on va s'attacher à les supprimer. Donc, je vais faire une décomposition des forces. Je vais supposer que j'ai des forces de contrainte et d'autres forces. J'utilise le symbole, simplement F pour toutes les autres forces, et donc les forces totales. C'est les forces de contrainte, plus toutes les autres forces F. Maintenant, j'écris pour un seul point matériel F égale ma, et ici, j'ai écrit force moins masse fois l'accélération égale zéro. Je considère un déplacement virtuel compatible avec les contraintes, et je multiplie l'équation de Newton par cette multiplication, donc c'est produit scalaire par ce vecteur de déplacement virtuel compatible avec les contraintes, comme ceci. Et dans cette équation-là, j'ai un produit scalaire des forces de contraintes fois les déplacements virtuels. Alors, vous vous souvenez qu'on avait dit que les forces de contrainte sont des forces normales à la courbe ou à la surface qui définit la contrainte.

Notes

Summary

13m 12s

Principe de d'Alembert

décomposition $\boldsymbol{F}^{tot} = \boldsymbol{F}^{cont} + \boldsymbol{F}$

d'abord : un seul point matériel

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{cont} - m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

$\delta \boldsymbol{r}$ virtuel compatible avec les contraintes

$$\left(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{cont}\right) \cdot \delta \boldsymbol{r} - m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$$

hypothèse $\boldsymbol{F}^{cont} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$

$$\left(\boldsymbol{F} - m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \delta \boldsymbol{r} = 0$$

pour un système de points matériels

$$\sum_{\alpha} \left(\boldsymbol{F}_{\alpha} - m_{\alpha}\frac{d\boldsymbol{v}_{\alpha}}{dt}\right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_{\alpha} = 0$$

Mécanique | 2013 39

Sinon, ce serait une autre physique que cette force décrirait. Donc, on a ce produit scalaire des forces de contrainte des déplacements virtuels qui est nul. Alors il nous reste ceci : ça c'est pour un moint matériel, et si on a plusieurs points matériels, il suffit de sommer sur tous les points matériels. On a une expression de la dynamique qui est plus complexe qu'avant, mais on a quelque part simplifié le problème parce que on a enlevé toutes les forces de contrainte.

Notes

Summary

14m 42s

Définitions : forces généralisées

$$\sum_\alpha \left(\boldsymbol{F}_\alpha - m_\alpha \frac{d\boldsymbol{v}_\alpha}{dt} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = 0$$

$$\boldsymbol{F}_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \, \delta q_j \quad = \sum_{j=1}^{n} Q_j \, \delta q_j$$

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \quad (j = 1 \cdots n)$$

Mécanique | 2013 44

Maintenant, je vais regarder dans le principe, cette équation-là est connue comme le principe de D'Alembert. Je vais dans un premier temps regarder ce terme-là des forces, produit scalaire avec les déplacements compatibles. Ça, c'est les autres forces du système, pas les forces de contrainte. Je veux regarder ces termes-là, et qu'est-ce que je fais? Je vais exprimer, je vous rappelle qu'on avait dit delta r alpha, le déplacement virtuel compatible avec les contraintes, c'était la somme sur toutes les coordonnées généralisées des dérivées, des positions dérivées par rapport à la coordonnée qj fois une petit déplacement, un petit changement delta qj de cette coordonnée. Cette formule-là, c'est celle-là que je mets ici, et je mets la somme sur j en avant. Et maintenant, j'observe que je peux faire l'écriture suivante. Je peux écrire somme sur j de ça fois delta qj. J'ai écrit grand Qj fois delta qj, où ce grand Qj, c'est ce qu'on appelle la force généralisée, cette, cette somme sur les points matériels alpha égale un à grand N de ces produits-là.

Notes

Summary

15m 17s

Cinétique

$$\sum_\alpha \left(\boldsymbol{F}_\alpha - m_\alpha \frac{d\boldsymbol{v}_\alpha}{dt} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = 0$$

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{r} \quad = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right] \delta q_j \qquad \text{A démontrer !}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \sum_j m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \delta q_j$$

Mécanique | 2013 49

Maintenant, je reprends encore une fois mon principe de D'Alembert. Et maintenant, je vais porter mon attention sur les termes cinétiques, donc les termes avec la vitesse. Alors là, je suis un peu désolé, j'aime beaucoup ce chapitre. Vous allez beaucoup aimer cette méthode; je le sais pour avoir enseigné pendant de nombreuses années, mais le passage qui vient maintenant est un peu lourd. Alors je me propose, d'abord donner le résultat, et puis ensuite de le démontrer. Donc, ce que je vais montrer, c'est ça. Je vais montrer pour une masse, donc on va enlever les sommes sur alpha, et c'est assez compliqué, sens de taille. Je vais montrer que ce terme-là, je peux l'écrire comme ceci. Alors vous reconnaissez quelque chose de sympathique dans cette formule, c'est le une demie de mv carré, l'énergie cinétique de la particule de masse m. Vous voyez que vous avez une somme sur j, somme sur les, sur des déplacements des variations des coordonnées généralisées. Ici, j'ai réécrit m dv sur dt comme mr point point. Et maintenant, le delta r; donc je m'engage dans la démonstration de cette formule. Le delta r, j'applique sa définition, j'ai donc une somme sur j qui vient.

Notes

Summary

16m 49s

$$\sum_\alpha \left(\boldsymbol{F}_\alpha - m_\alpha \frac{d\boldsymbol{v}_\alpha}{dt} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = 0$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{r} \quad = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right] \delta q_j \qquad \text{A démontrer !}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \sum_j m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \delta q_j \quad = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \left(m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \right) - m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad \boldsymbol{v} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}$$

Mécanique | 2013 53

Ensuite, je me dit que ce terme-là, je peux l'écrire comme la dérivée par rapport au temps de mr point fois ça, c'est ce que j'ai écrit ici. Mais quand j'écris cela, j'introduis bien le terme mr point point qu'on a là. Mais j'introduis aussi le terme, parce qu'on a un produit ici, donc on va avoir deux termes. Et quand j'écris ce terme, j'introduis un mr point fois le d sur dt de ça qu'on n'avait pas, donc je dois l'enlever. C'est ce que j'ai écrit ici. Ici, on a mr point, d sur dt de ça, et je l'enlève. Bon, maintenant il faut qu'on travaille sur ces termes-là et celui-là pour arriver au résultat final. Alors d'abord, je remarque que si r; on avait vu cette structure de r exprimée en fonction des coordonnées généralisées et du temps. Si r est comme ceci, alors la vitesse, pour calculer la vitesse, comme q un est une fonction du temps jusqu'à qn fonction du temps aussi. Pour calculer dr sur dt, il faut calculer dr sur d de qj fois qj point, et puis pour le dernier terme, d de r sur dt. Attention que là, on a un d rond, c'est pour dire que on fait la dérivée là où t apparaît explicitement dans cette fonction. Maintenant dans cette formule là, on se souvient que r comme c'est écrit ici est une fonction des q mais pas des q point.

Notes

Summary

18m 24s

Cinétique

$$\sum_\alpha \left(\boldsymbol{F}_\alpha - m_\alpha \frac{d\boldsymbol{v}_\alpha}{dt} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = 0$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{r} \quad = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right] \delta q_j \qquad \text{A démontrer !}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \sum_j m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \delta q_j \quad = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\left(m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \right) - m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad \boldsymbol{v} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}(q_1 \ldots q_i \ldots q_n, t)}{\partial q_j} \right) = \sum_i \left\{ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \right\} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_j}$$

Mècanique | 2013 54

Donc, en examinant cette formule, on va dire que si je dois calculer d de v sur d de qj point, pardon, d de v sur d de qj point, ce que j'ai écrit ici, eh bien, ni ceci ni cela dépend des qj point donc tout ce qui reste c'est d de r sur d de qj. On a une drôle de formule ici dont on n'a pas l'habitude qui vient de la structure qu'on s'est donné ici. Alors, voilà que le d de r sur d de qj que j'ai là, je vais pouvoir le remplacer par d de v sur d de qj point et vous allez voir que ça, ça nous rapproche de ce résultat. Maintenant, on doit encore voir qu'est-ce qu'on fait de ceci. Alors, le d sur dt des d de r sur d de qj où j'ai explicitement mis les variables ici. Je dois calculer, maintenant, la dérivée par rapport à q un, qi, qn. J'ai écrit ici somme sur i d carré r sur dqi dqj et je somme sur i fois les qi point. Et puis, j'ai aussi le d de r sur d de qj qui est une fonction explicitement du temps. D'ailleurs je dois mettre ce terme, il est là. Maintenant, j'ai un d de qj ici et j'ai un d de qj là. Je mets en avant cette dérivée par rapport à qj et il me reste d de r sur d de qj, pardon, d de r sur d de qi, qi point et là j'ai un d de r sur d de t, ce terme là. Et là, je reconnais la vitesse.

Notes

Summary

20m 14s

Cinétique

$$\sum_\alpha \left(\boldsymbol{F}_\alpha - m_\alpha \frac{d\boldsymbol{v}_\alpha}{dt} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = 0$$

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{r} \quad = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right] \delta q_j \qquad \text{A démontrer !}$$

$$m \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \sum_j m \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \delta q_j \quad = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \left(m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \right) - m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad \boldsymbol{v} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \; \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}(q_1 ... q_i ... q_n, t)}{\partial q_j} \right) = \sum_i \left\{ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \right\} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_j}$$

Mécanique | 2013 54

Donc, j'ai d de v sur d de qj. Alors voilà un deuxième résultat un peu bizarre, d sur dt de d de r sur d de qj, ça vaut d de v sur d de qj. Ça je vais l'utiliser ici. Je réécris les résultats partiels.

Notes

Summary

22m 12s

Cinétique

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \sum_j m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\,\delta q_j \quad = \sum_j\left(\frac{d}{dt}\left(m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_j}\right) - m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\right)\right)\delta q_j$$

$$m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \sum_j\left(\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_j}\right) - m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\right)\right)\delta q_j$$

$$m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{v}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_j}\right) - m\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

$$= \sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right)\right]\delta q_j \qquad \text{cqfd}$$

Mécanique | 2013 61

Voilà le terme dont je me soucie. Ici, j'ai simplement appliqué la relation qui définit le déplacement virtuel compatible avec les contraintes. Je suis arrivé à ce résultat. Je le réécris ici où j'écris au lieu de r point point, j'écris v point. Ici je reconnais un v et ici je reconnais un v aussi. Et maintenant, ce d de r sur d de qj, je le remplace par d de v sur d de qj point, et ce terme là, je le remplace par d de v sur d de qj. Et maintenant, si je me concentre sur ce terme-là, je dois y reconnaître la dérivée par rapport à qj point de une demie de mv carré. C'est ce que j'ai écrit ici. Si vous devez faire cette dérivée par rapport à qj point, vous allez avoir une demie fois le deux fois m fois v fois la dérivée de v par rapport à qj point. C'est ce qu'il y a ici. De façon analogue là, on peut dire que ce terme-là c'est d sur d de qj de une demie de mv carré. Eh bien, j'ai le plaisir de vous dire que on a réussi à démontrer la formule que j'avais annoncée. Comme je l'avais dit au début, c'est un passage un petit peu délicat. Alors maintenant on est prêt.

Notes

Summary

22m 35s

Equations de Lagrange (1)

Pour un point matériel :

$$m\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \right) \right] \delta q_j$$

$$\boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{n} Q_j \, \delta q_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Pour un système de points matériels :

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^2$$

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

q_j indépendants $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Mécanique | 2013 69

On est parti de D’Alembert, on a ce terme-là qu'on peut exprimer de cette façon-là, on a le terme de force qu'on peut exprimer avec des forces généralisées et si on écrit simplement qu'une demie de mv carré c'est l'énergie cinétique T et l'équation de D'Alembert dit ça moins ça égale zéro donc j'ai ce terme-là moins le terme de force, somme sur j fois les delta qj égale à zéro. Et maintenant, ces coordonnées généralisées sont indépendantes les unes des autres. Je dois avoir cette équation-là quel que soit le choix que je prends pour les delta qj. Donc ce qu'il faut, c'est que le terme dans la parenthèse soit nul. Et j'ai le plaisir de vous annoncer que ça c'est la première forme des équations de Lagrange. Si maintenant vous avez plusieurs particules, il faut ajouter dans tout ce que j'ai fait des sommes sur alpha. Vous ferez apparaître l'énergie cinétique, la somme des une demie de m alpha, v alpha au carré, somme sur toutes les particules. Et, on l'avait déjà vu, pour la force généralisée il suffit de sommer ces termes-là sur tous les alphas. Et, la formule revient à la même chose et vous avez la même conclusion: les équations de Lagrange de premier type.

Notes

Summary

24m 09s

Equations de Lagrange (2)

Forces conservatives :

$V(x_{\alpha 1}(q_1, \dots q_n), x_{\alpha 2}(q_1 \dots q$

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \qquad Q_j^{pot} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial V(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j} \qquad V = \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha$$

Mécanique | 2013 72

Maintenant, je vais particulariser un problème où toutes les forces dépendent d'un potentiel. Alors écrivons-le. On va supposer que ces forces-là, toutes dérivent d'un potentiel. Alors, je vais simplement ajouter le terme pot pour dire qu'on a maintenant des dérivées, des forces généralisées qui dépendent, dérivent d'un potentiel. Le F dérive d'un potentiel, ça veut dire si je l'écris en coordonnées cartésiennes que je dois calculer d de v sur d de x, alpha i, i c'est la ième coordonnée, i va de un à trois. Et puis, ici, on a d de xi sur d de qj. C'est ce que j'ai écrit ici. Et maintenant vous reconnaissez dans cette expression quelque chose qu'on voit souvent. On a d de v sur d de x, d de x sur d de qj. Donc, tout se passe comme si on avait un d de v sur d de qj. C'est ce que j'ai noté ici avec le signe moins, la force c'est moins le gradient du potentiel, où le v, évidemment, c'est la somme sur tous les potentiels. Pour rendre les choses plus explicites, je peux faire l'écriture suivante. Je dis v est une fonction de x alpha un et x alpha un c'est une fonction de q un jusqu'à qn, n nombre de degré de liberté. Puis on a x alpha deux, fonction de q un, qn et cetera.

Notes

Summary

25m 44s

Equations de Lagrange (2)

Forces conservatives :

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \qquad Q_j^{pot} = -\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial V(q_1,\ldots,q_n)}{\partial q_j} \qquad V = \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0$$

lagrangien : $L = T - V$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Mécanique | 2013 76

Et maintenant, je veux calculer d de v sur d de q un, par exemple. Alors, q un paraît ici et là partout ailleurs donc il faut bien calculer d de v sur d de x alpha un fois d de x alpha un sur d de q un. C'est ce genre de terme qu'on a ici. Maintenant, je peux reprendre mon équation de Lagrange et je vais mettre un q de cette forme-là. Vous voyez que ce terme, mon moins dv sur d de qj, je peux l'introduire ici, il passe de l'autre côté du signe égale, il change de signe donc ça devient plus, d de v sur d de qj. Maintenant, le potentiel ne dépend en aucun cas des q point. C'est impossible d'avoir un potentiel qui dépend des vitesses. Donc je peux gratuitement rajouter le v dans ce terme-là et j'ai l'équation qui a cette structure-là. Alors je définis ce qu'on appelle le lagrangien, L qui vaut T moins V et mon équation de Lagrange prend cette forme-là. Vous pourriez vous poser la question, qu'est-ce qui se passe si on a des forces qui dérivent du potentiel et des forces qui dépendent pas? Alors, celles qui dérivent pas d'un potentiel, celles qui dérivent d'un potentiel on peut faire cet exercice-là, passer de l'autre côté. Et, pour les autres, on les laisse ici.

Notes

Summary

27m 40s

Equations de Lagrange (2)

Forces conservatives :

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \qquad Q_j^{pot} = -\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial V(q_1,\ldots,q_n)}{\partial q_j} \qquad V = \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0$$

lagrangien : $L = T - V$ $\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

Avec des forces non-conservatives en plus : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$

Mécanique | 2013 77

Et donc on a, en toute généralité, un L qui est défini pour toutes les forces qui dérivent du potentiel et ici les forces généralisées, NC pour non conservatives, celles qui ne dérivent pas d'un potentiel. Voilà, vous avez toutes les formes possibles des équations de Lagrange et maintenant il faut encore voir comment on applique cette méthode à toutes sortes de problèmes de mécanique. C'est ce qu'on va faire dans le module suivant.

Notes

Summary

29m 30s