RÉGIMES TRANSITOIRES

CIRCUIT RLC SÉRIE - SOLUTIONS

LEÇON 14

Électrotechnique II

Yves PERRIARD & Paolo GERMANO

Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

Search MOOC

Video

Bonjour, lors de la leçon précédente nous avons traité le cas le plus complet d'un circuit RLC série. Nous avons posé les équations qui permettront de trouver les solutions pour l'expression du courant. Selon le signe du discriminant, les solutions de l'équation caractéristique qui est du 2ème degré trois différentes solutions sont possibles. Lors de cette leçon, nous allons développer ces trois solutions nous allons débuter par un rappel des résultats essentiels obtenus à la leçon précédente et ensuite, nous allons développer les trois solutions pour l'expression du courant qui sont des solutions, dites, *suramorties" "oscillatoires amorties" et à "amortissement critique".

Notes

Summary

0m 04s

SAUT DE TENSION AUX BORNES D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- **Rappel de la solution :**

$$i(t) = A_1 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right) \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \omega$$

$$i(t) = A_1 e^{-\frac{R}{2L} t} \cdot \left(e^{\omega t} - e^{-\omega t} \right)$$

- **Rappel des conditions initiales en $t = 0$: $i(0) = 0$ et $u_c(0) = 0$**

Pour $t = 0$: $U = L \cdot \frac{di}{dt}$

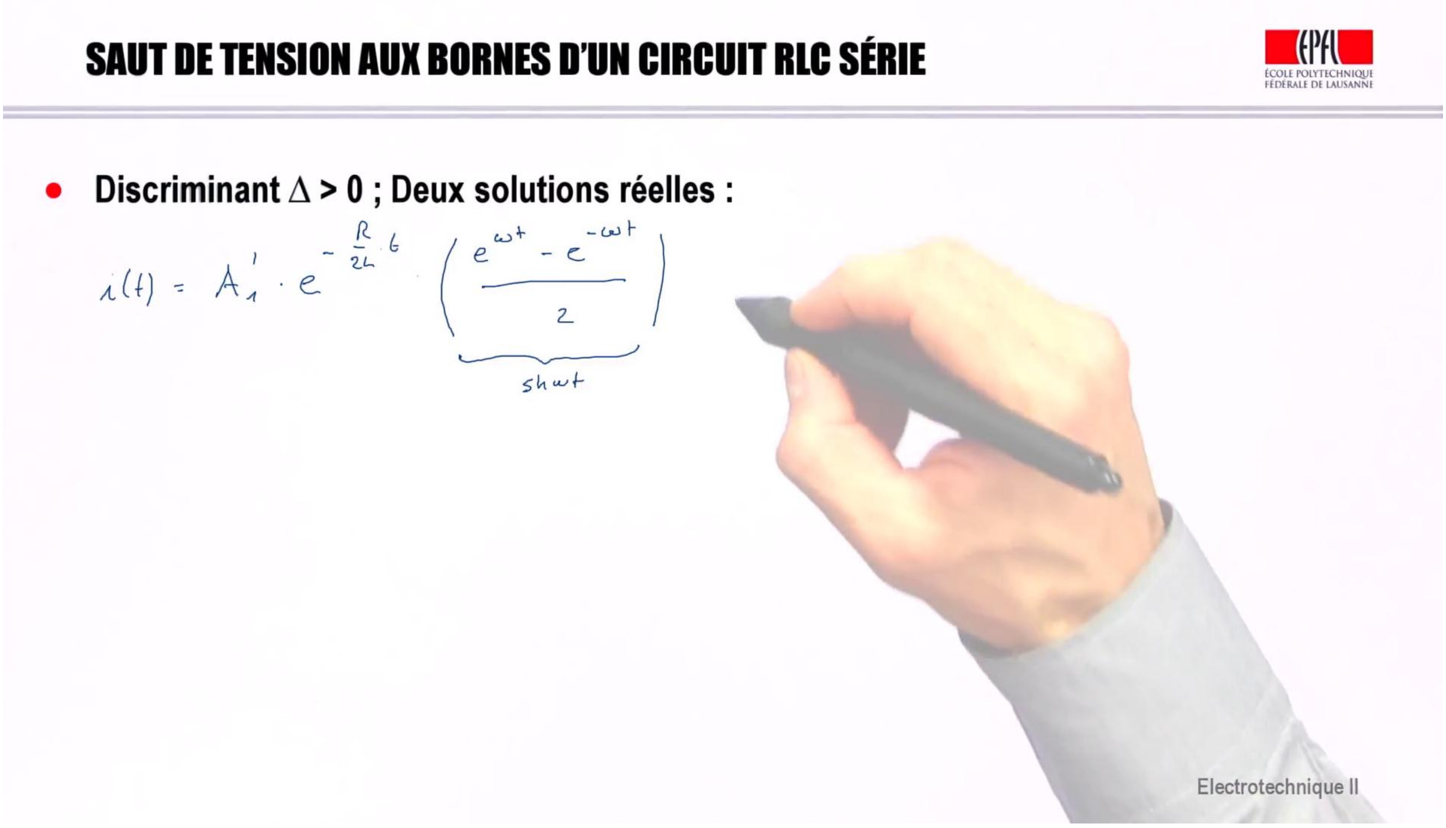
Electrotechnique II

Les expressions du courant que nous avions obtenues étaient de la forme i(t) est égal à une constante multipliée par une somme d'exponentielles. où λ_1 et λ_2 sont les solutions de l'équation caractéristique du 2ème degré que l'on peut écrire, pour simplifier l'écriture par -R/2L ± ω. L'expression de λ_1 et λ_2 étant une somme de deux termes qui vont se retrouver ici, dans l'exponentielle. et en sachant que l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles. on peut réécrire l'équation pour le courant, de la façon suivante I(t) égal à la constante multipliée par l'exponentielle de (-R/2L) * t multiplié par la somme des deux exponentielles. On rappelle encore que les conditions initiales au temps t = 0 étaient que le courant au temps t = 0 est égal à 0 et que la tension aux bornes du condensateur au temps t = 0 est égal à 0, le condensateur est initialement vide. Pour t = 0 on avait U = L * (di/dt).

Notes

Summary

0m 46s



Si on considère le cas où le discriminant est plus grand que 0 on tombe sur deux solutions réelles. et dans ce cas l'équation du courant plus s'écrire, légèrement modifiée, comme étant i(t) qui est égal à une constante multipliée par une première exponentielle multiplié par la somme des exponentielles e^ωt - e^(-ωt) divisé par deux où l'on reconnaît cette expression comme étant celle d'un sinus hyperbolique. On peut donc écrire cette équation de façon plus légère et on a que A' multiplié par e^((-R/2L) * t) multiplié par sinus hyperbolique de ωt.

Notes

Summary

2m 23s

SAUT DE TENSION AUX BORNES D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE

- **Discriminant $\Delta > 0$; Deux solutions réelles :**

$$i(t) = A_1' \cdot e^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \underbrace{\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right)}_{sh\,\omega t} = \underbrace{A_1' \cdot e^{-\frac{R}{2L}\cdot t}}_{f} \cdot \underbrace{sh\,\omega t}_{g}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot A_1' \cdot \left[-\frac{R}{2L} \cdot \underbrace{e^{-\frac{R}{2L}\cdot t}}_{1} \cdot \underbrace{sh\,\omega t}_{0} + \omega \cdot \underbrace{e^{-\frac{R}{2L}\cdot t}}_{1} \cdot \underbrace{ch\,\omega t}_{1} \right]$$

En $t = 0$

$$A_1' = \frac{U}{\omega L}$$

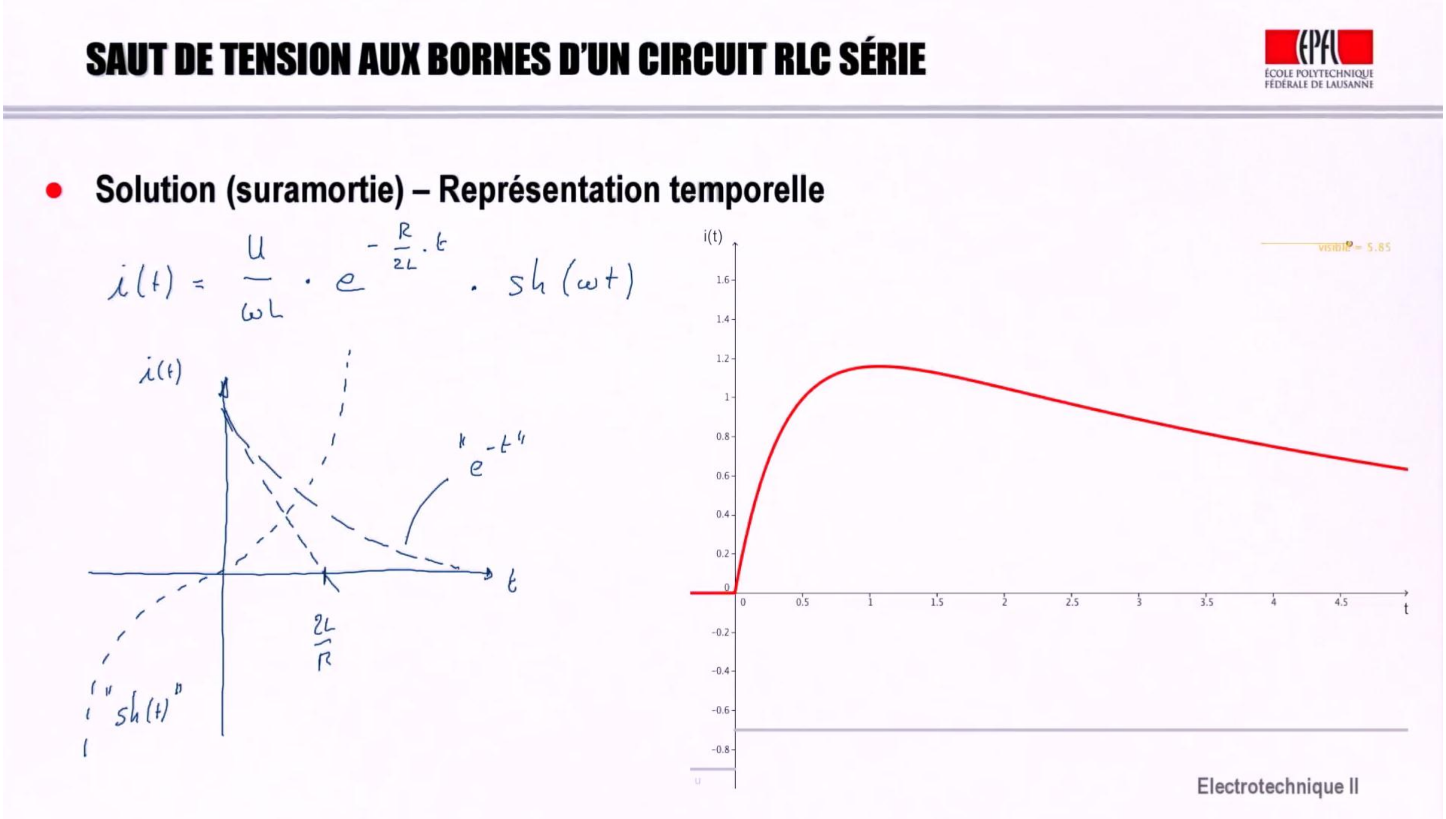
Electrotechnique II

La condition initiale que l'on a décrite tout à l'heure et qui nous donnait l'équation suivante : U = L*(di/dt) nous permet de réécrire avec la dérivée du courant, l'expression suivante en sachant que l'expression du courant et composée du produit de deux fonctions, une première fonction f et une deuxième fonction g et en sachant que la dérivée d'un produit de fonction est égale à la somme f ' * g + f * g' on arrive à une expression un petit peu plus lourde, mais qui s'écrit : L*A_1' multiplié par la dérivée de la fonction f, c'est la fonction elle-même multipliée par la dérivée interne moins R sur 2L multipliée par l'exponentielle -R/2L * t multipliée par la fonction g c'est-à-dire, le sinus hyperbolique de ωt plus la fonction f exponentielle de -R/2L * t multipliée par la dérivée de la fonction sinus hyperbolique qui est un cosinus hyperbolique de ωt multipliée par la dérivée interne si on applique cette condition au temps t = 0 ce terme tombe sur 1 ce terme devient 1 egalement celui-ci 0 et celui-ci 1 on arrive donc à une expression relativement simple qui nous permet de dire que A_1' = U/ωL Donc au final on peut écrire que l'expression du courant en fonction du temps comme étant le produit d'une constante, la constante qu'on vient de calculer U/ωL multipliée par une exponentielle d'exposant -R/2L * t multiplié encore par le sinus hyperbolique de ωt.

Notes

Summary

3m 19s



C'est donc le produit de deux fonctions. Si je les représente séparément sur un graph. On a, tout d'abord une exponentielle décroissante deux constantes de temps 2L/R quelque chose donc de type exponentiel décroissant multiplié par un sinus hyperbolique de ωt qui a cette allure. Sinus hyperbolique en fonction du temps pour être rigoureux du point de vue mathématique, on peut vérifier que la solution reste bornée lorsque t tend vers l'infini. Et le produit des deux donne la fonction du courant. Donc si l'on soumet un circuit RLC dont les valeurs de R, L et C sont telles que le discriminant sous la racine de la solution du de l'équation du deuxième degré est plus grande que 0 alors on obtient une évolution temporelle du courant, qui est le produit de ces deux fonctions et qu'on va voir sur quoi la vidéo qui suit. Voilà, on voit d'abord une augmentation du courant, et puis une diminution.

Notes

Summary

6m 02s

SAUT DE TENSION AUX BORNES D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE

- **Discriminant $\Delta < 0$; Deux solutions imaginaires :**

$$\omega = j \cdot \omega'$$

$$i(t) = A_1'' \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{j\omega' t} - e^{-j\omega' t}}{2j} \right)}_{\sin \omega' t} = A_1' \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \sin \omega' t$$

En $t = 0$

$$A_1'' = \frac{U}{\omega' L}$$

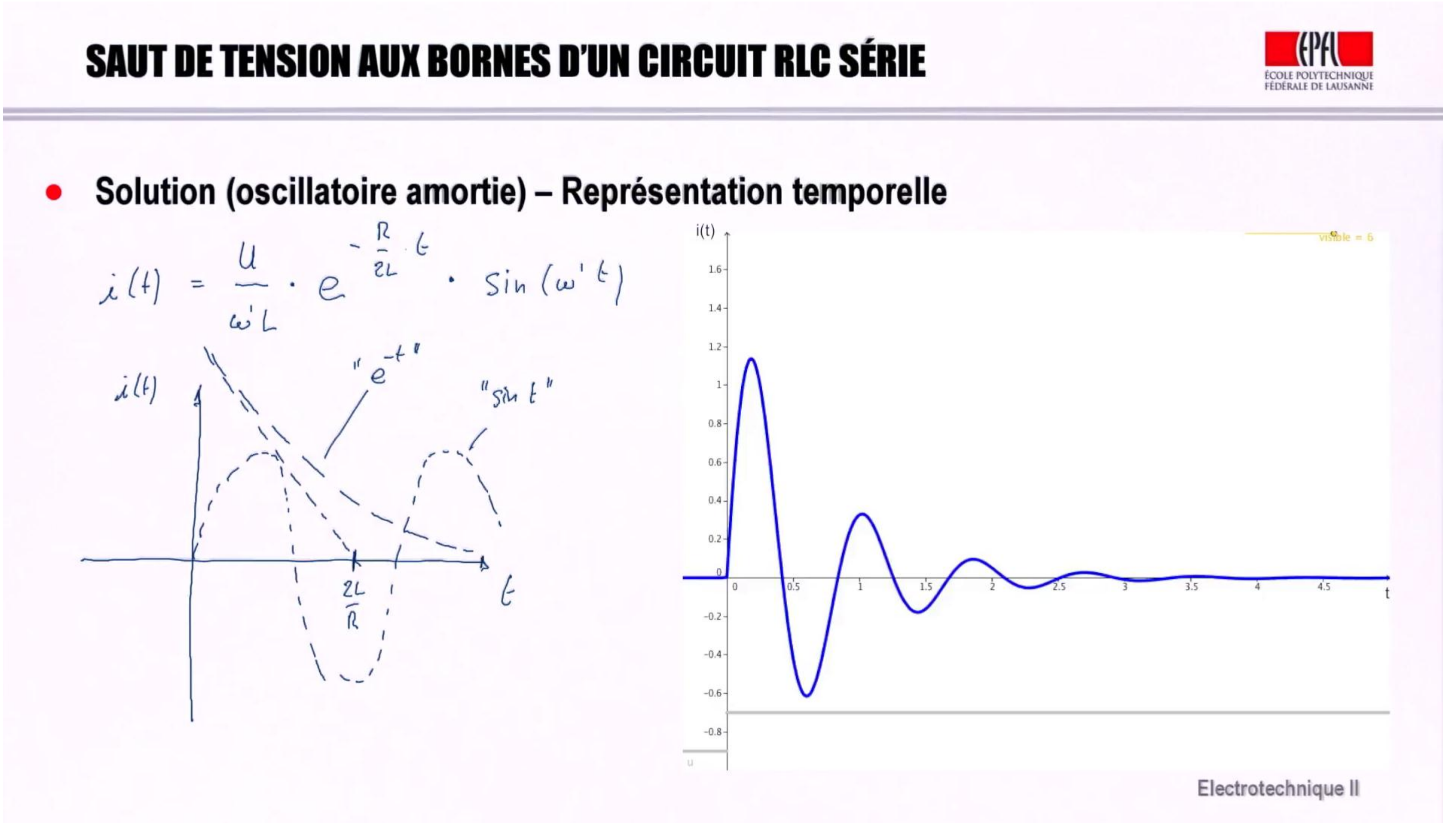
Electrotechnique II

Dans le cas où le discriminant est plus petit que 0 on obtient deux solutions imaginaires. Si l'on pose l'expression suivante ω = j*ω' on peut réécrire l'équation du courant qui se transforme comme suit. i(t) est égal à une deuxième constante A_1" multipliée par l'exponentielle de -R/2L fois t multipliée par la somme des deux exponentielles divisée par 2j où on reconnaît ici, l'expression d'un sinus de ω't. Et donc on peut réécrire cette équation de manière un petit peu plus légère, comme étant A_1" multiplié par l'exponentielle de -R/2L* t multipliée par un sinus ω't. De nouveau, au temps t = 0 les conditions initiales identiques que dans le cas prédédent font que nous obtenons la constante d'intégration A_1", comme étant égal à U sur ω'L.

Notes

Summary

7m 17s



Alors, à nouveau, au final, on peut réécrire l'expression temporelle du courant comme étant le produit de la constante qu'on vient de déterminer ω'L multipliée par une fonction exponentielle dont l'exposant vaut -R/2L * t et, cette fois-ci, multipliée par une fonction sinusoïdale sin(ω't). Si l'on représente ces deux fonctions séparément sur un graph temporelle on a tout d'abord une sinusoïde d'une certaine amplitude multipliée par une fonction exponentielle décroissante, dont ceci de type sinusoïdal ceci à nouveau de type exponentiel exposant décroissant avec sa constante temps de 2L/R et, de nouveau, si l'on soumet ce circuit RLC dont les valeurs R, L et C sont telles que le discriminant sous la racine de la solution de l'équation du 2ème degré est plus petit que 0 alors, le courant dans le circuit évolue de la manière suivante, telle que sur la vidéo. On a un sinus dont l'amplitude décroit exponentiellement.

Notes

Summary

8m 49s

- **Discriminant Δ = 0 ; Une solution réelle :**

$$i(t) = \frac{U}{\omega L} \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \operatorname{sh} \omega t$$

pour $\omega t \to 0$: $\operatorname{sh} \omega t \to \omega t$

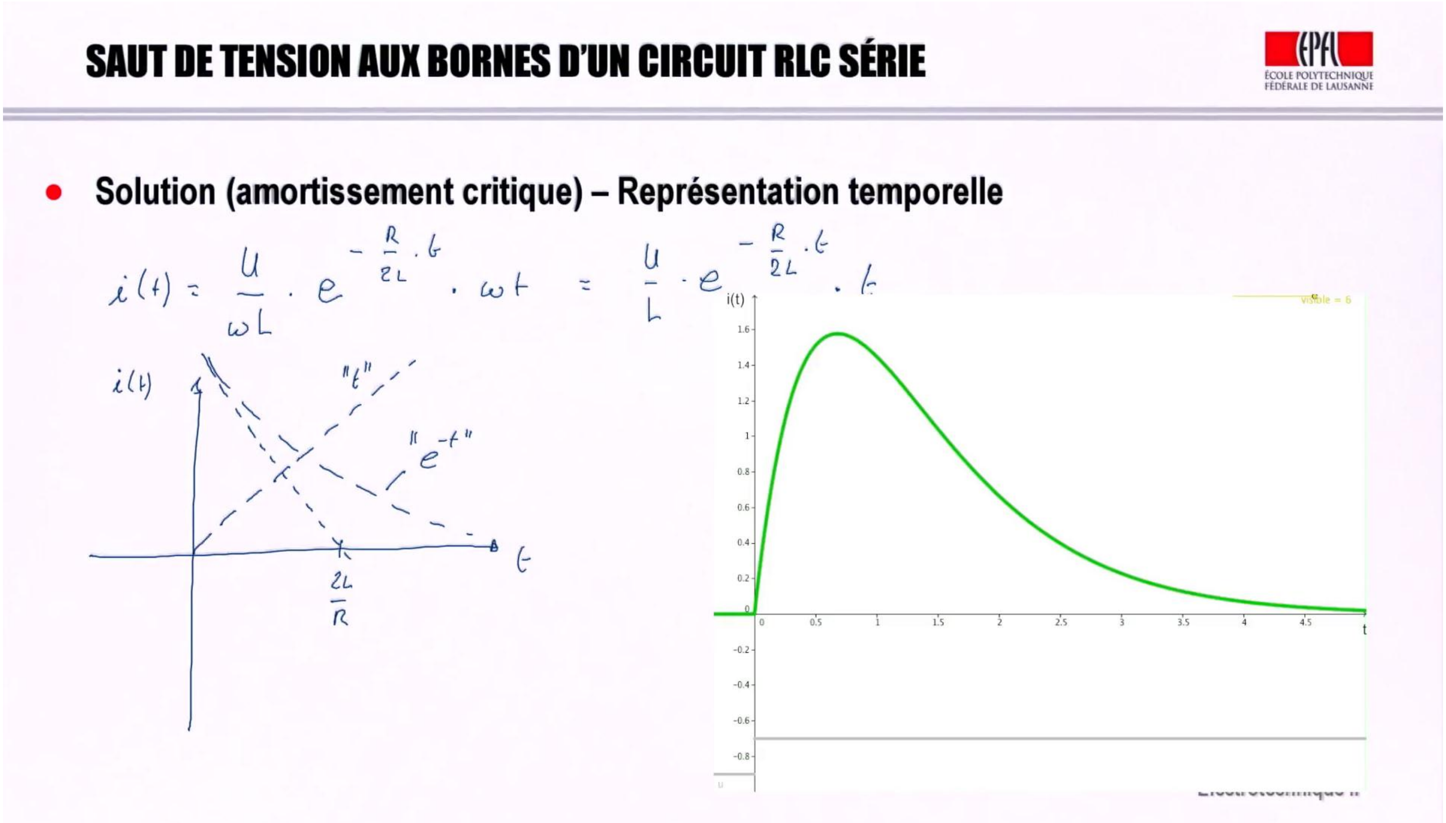
Electrotechnique II

Le dernier cas, est le cas où le discriminant sous la racine est égal à 0 dans tel cas, nous avons une seule solution réelle pour ω. Dans ce cas limite, la solution peut être obtenue à partir de l'une ou l'autre des deux solutions. Nous allons prendre la 1ère que nous avions trouvé. i(t) qui est égal à U sur ωL, multiplié par l'exponentielle multiplié par le sinus hyperbolique de ωt. Et lorsqu'on passe à la limite, c'est à dire ω tend vers 0, on peut remplacer la fonction sinus hyperbolique par son premier terme de la série de Taylor qu'on ne démontrera pas ici, mais pour ωt tendant vers zéro on a que le sinus hyperbolique de ωt tend vers ωt.

Notes

Summary

10m 21s

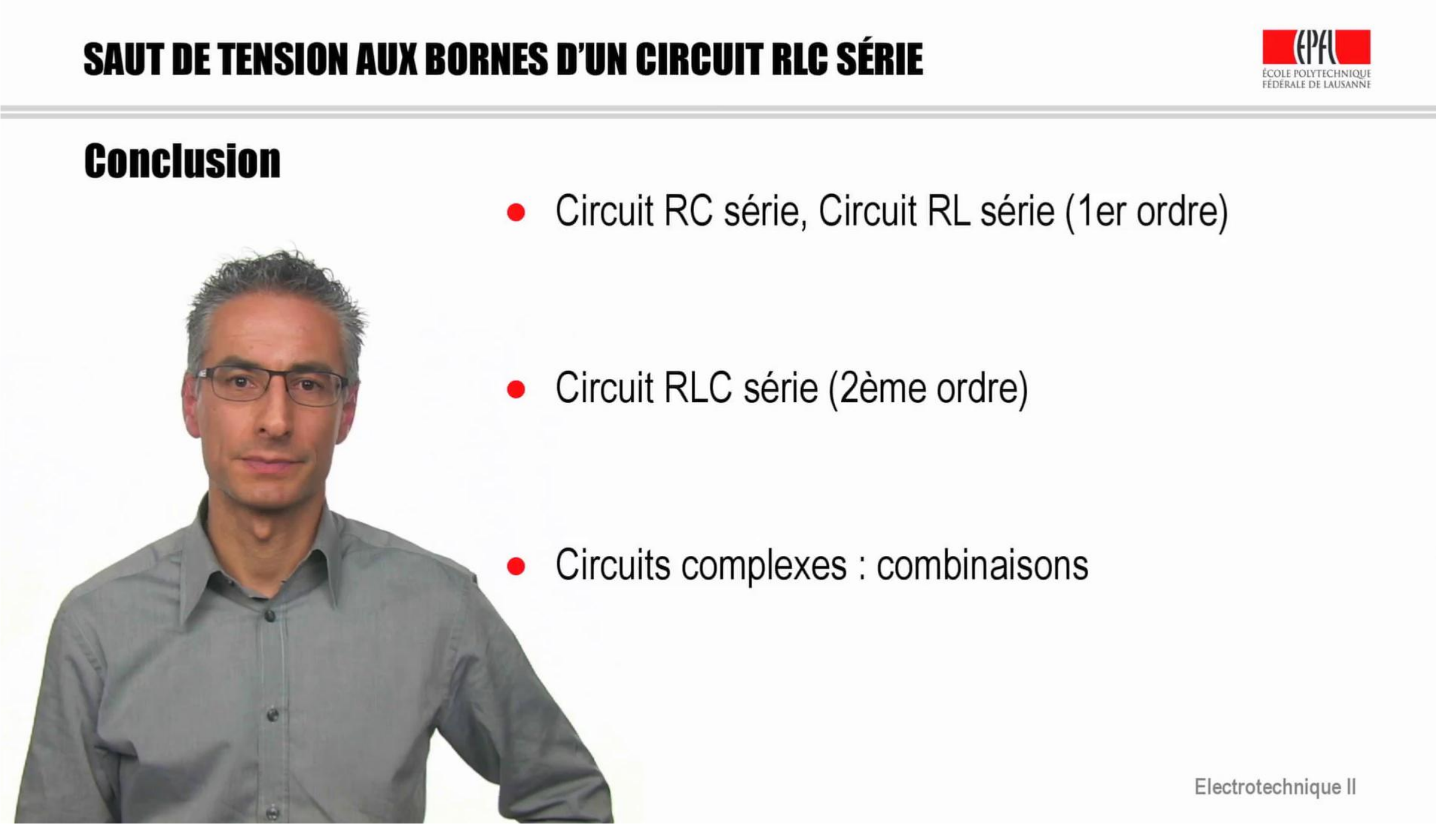


La solution à amortissement critique peut être écrite sous la forme i(t) qui est égal à a la constante U/ωL multipliée par l'exponentielle de -R/2L * t multipliée par ωt. Et ceci, on peut la simplifier en U/L multiplié par l'exponentielle de -R/2L * t multipliée par t, Ce sont deux fonctions temporelles dont l'une est une exponentielle décroissante à nouveau avec sa constante de temps 2L/R multipliée (ceci est l'exponentielle à exposant négatif) multipliée par une fonction t qui est une simple droite. A nouveau, si l'on soumet un circuit RLC série dont les valeurs R, L et C sont telles que le discriminant sous la racine de la solution de l'équation du 2ème degré est égal à 0, alors on obtient l'évolution du courant suivante. Elle ressemble fortement à la première solution, mais de nature différente.

Notes

Summary

11m 26s



Voilà, nous avons traité les cas RC et RL, dont l'équation différentielle du 1er ordre, découle sur des solutions exponentielles. On à traité le cas RLC, le plus complet, qui donne des équations différentielles du 2ème ordre, et donc trois types de solutions différentes. Pour les circuits les plus complexes il faut savoir que ce sont les combinaisons de ces cas, et que donc, ils se traitent de la même manière.

Notes

Summary

12m 51s