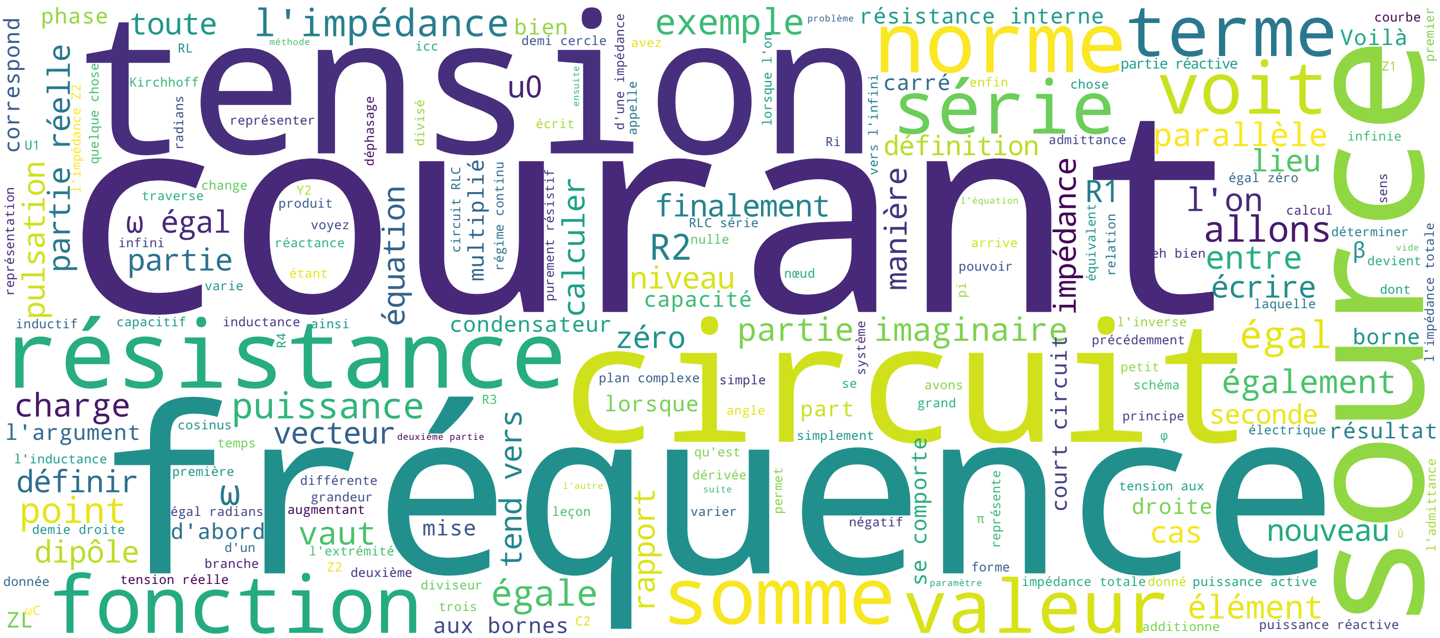
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

LEÇON 20

Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Paolo GERMANO
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés



Search MOOC

Video

EPFL

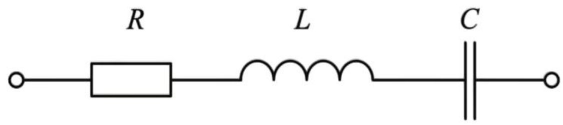
Bonjour. Bienvenue à cette nouvelle leçon du cours d'électrotechnique. Jusqu'à présent nous avons étudié plusieurs aspects d'un circuit électrique mais toujours avec une alimentation soit en régime continu, en DC, ou à une certaine fréquence, éventuellement à plusieurs fréquences mais simultanées, c'était le cas du principe de superposition. Nous allons voir comment se comporte un circuit sur toute une gamme de fréquences. Aujourd'hui nous allons commencer par définir ce qu'est un lieu géométrique, ensuite nous allons voir comment se comporte une impédance alors qu'on varie un de ses paramètres, en l'occurrence ici, la fréquence, nous allons voir un exemple, et finalement on va s'intéresser au courant dans le circuit, parce que si l'on change l'impédance le courant va également changer, nous allons donc calculer le courant en fonction de la fréquence.

Notes

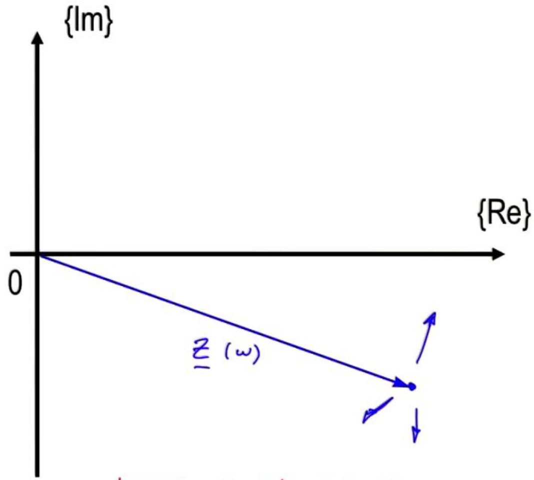
Summary

0m 03s

Lieux géométriques



$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



Déf. : Lieu complexe relatif à une grandeur complexe quelconque :
Lieu ou (courbe) décrit par l'extrémité du vecteur représentant cette grandeur lorsqu'on fait varier un paramètre du réseau (ω)

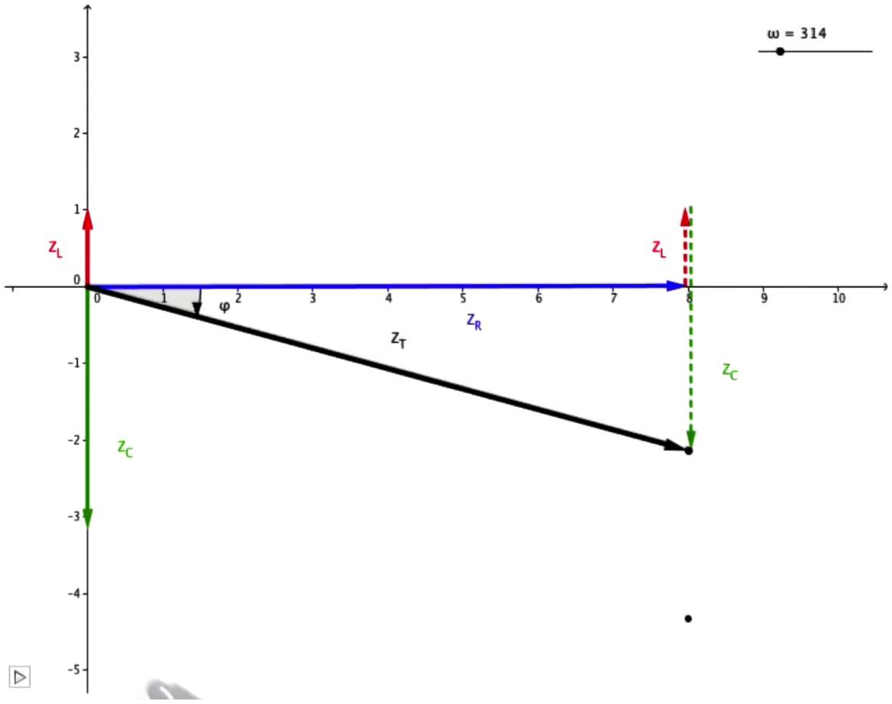
Nous commençons donc par une définition, la définition du lieu complexe. On appelle lieu complexe relatif à une grandeur complexe quelconque, ici ce sera l'impédance Z, donc une grandeur complexe quelconque, le lieu, ou la courbe, la trajectoire, décrite par l'extrémité du vecteur représentant cette grandeur lorsqu'on fait varier un paramètre du réseau, généralement c'est la pulsation, la fréquence, mais ce pourrait être également la résistance, l'inductance ou le condensateur. Et nous on s'intéressera aujourd'hui uniquement à la pulsation. Pour un circuit donné, par exemple ce circuit RLC série, on peut écrire l'expression de son impédance totale qui a une partie réelle et une partie imaginaire. On peut la représenter sur le plan complexe. On a ici Z. Z de ω. Et on aimerait savoir comment varie cette extrémité du vecteur Z lorsqu'on déplace, lorsqu'on modifie la fréquence. Pour un circuit donné, alimenté par une source alternative, le but est donc de calculer la courbe parcourue ici par l'impédance totale lorsqu'on fait varier la fréquence.

Notes

Summary

0m 52s

Lieux géométriques



Electrotechnique I

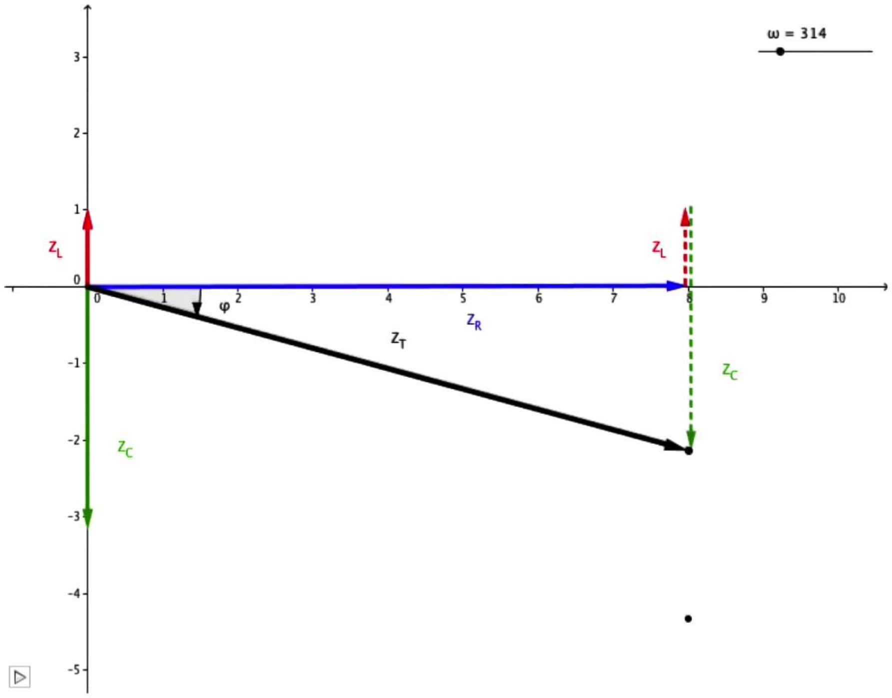
Alors dans l'exemple donné, le circuit RLC série, on est face à trois composantes, parce qu'il y a trois éléments. On a l'impédance ZR qui est égale à R, qui ne dépend pas de la fréquence. On a la composante ZL ici. ZL qui est égal à jωL. Et la dernière composante ZC. ZC est égal à -j(1/ωC). Les deux impédances ZL et ZC sont dépendantes de la fréquence ZC, l'inverse de la fréquence, et ZL est proportionnel à la fréquence. Pour avoir l'impédance totale du circuit on va sommer, vu qu'elles sont en série, ces trois impédances. Donc la somme de ces trois impédances, par les propriétés de l'addition vectorielle, on a cette première impédance ZR à laquelle on va additionner ZL, qui est représentée ici, on additionne et on additionne encore ZC qui est négatif pour obtenir l'impédance totale. Cette impédance totale a une norme et un angle, un déphasage, par rapport à l'axe réel et l'extrémité de ce vecteur est donc donné ici pour une fréquence de, par exemple ici, ω égal 200 radians par seconde. Si maintenant on change cette valeur de fréquence et qu'on l'augmente, voilà, on est ici à ω égal 314 radians par seconde. On voit que ZL a augmenté légèrement, linéairement avec ω parce ZL c'est ωL.

Notes

Summary

2m 37s

Lieux géométriques



Electrotechnique I

ZC, elle, a diminué parce que son expression est 1/ωC, et donc le résultat final, la somme de ces trois vecteurs, donne un nouveau point ici pour ω égal 314 radians par seconde, un nouveau point qui correspond à une nouvelle norme et un nouveau déphasage de l'impédance par rapport à l'axe réel.

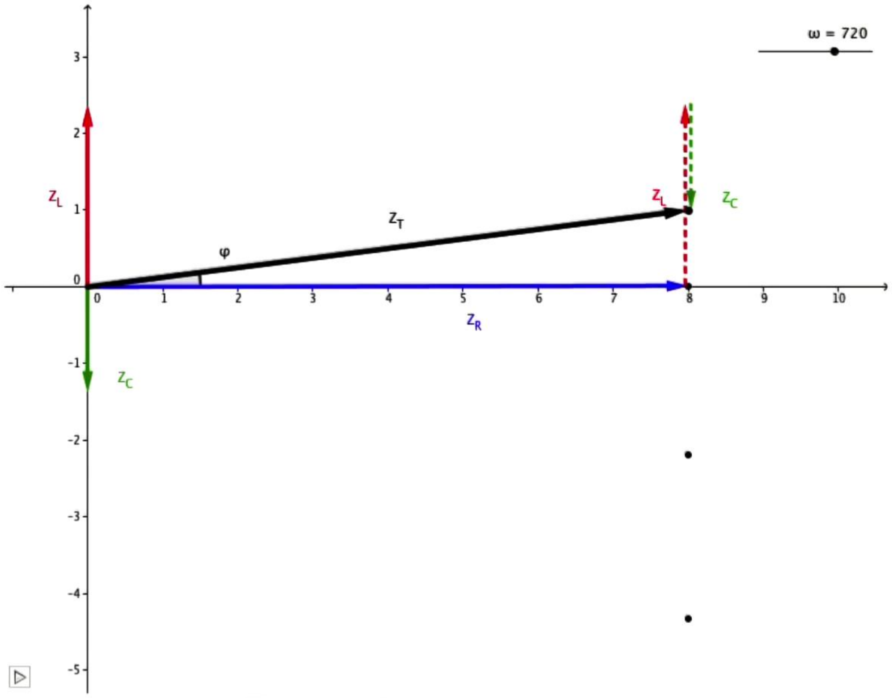
Notes

Summary

4m 29s

COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL

Lieux géométriques



Electrotechnique I

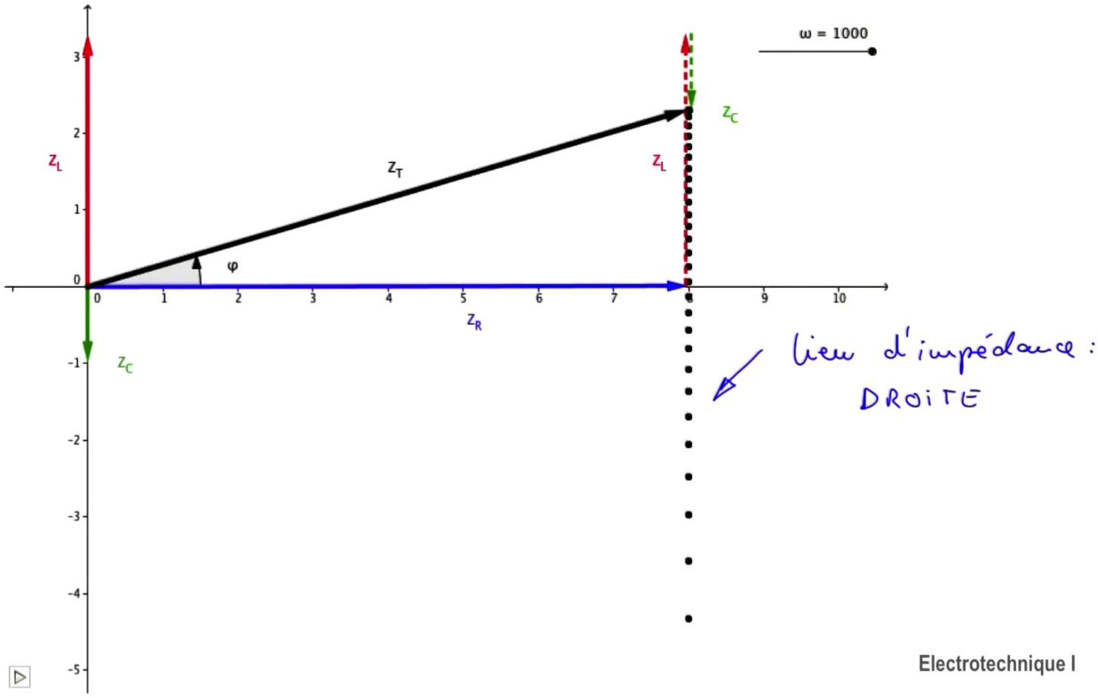
Si on augmente encore la fréquence, voilà on a augmenté encore une fois la fréquence ou la pulsation, cette fois-ci on est à 550 radians par seconde. On voit que ZL a encore augmenté et ZC diminué pour arriver à une valeur telle que les deux se compensent mutuellement et on se retrouve ici avec une impédance totale, ce point-là ici, à 550 radians par seconde, une impédance totale qui est purement résistive. On traitera ce cas particulier dans la leçon prochaine. En augmentant encore la fréquence, cette fois-ci on a ω qui est à 720 radians par seconde par exemple, donc ZL est devenu plus grand que ZC. Donc la nature de l'impédance est devenue inductive, avec une partie réactive positive, alors que jusqu'à présent elle était capacitive.

Notes

Summary

4m 56s

Lieux géométriques



Electrotechnique I

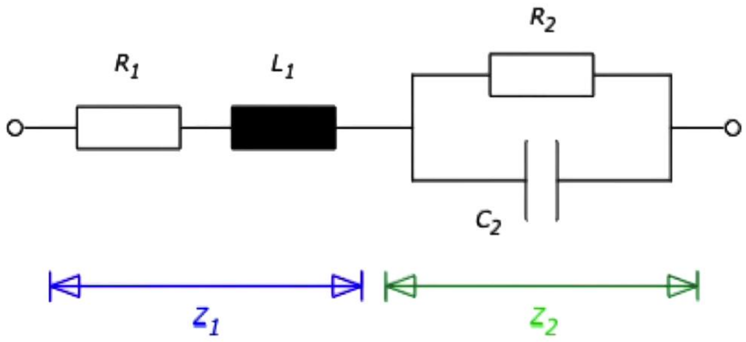
Et en augmentant encore la fréquence on arrive à l'impédance totale, ZT qui est cette fois-ci encore plus inductive que précédemment et on voit notre lieu, c'est-à-dire la courbe décrite par l'extrémité du vecteur Z en fonction de la fréquence, qui se dessine. Je refais la représentation mais pour beaucoup plus de valeurs de ω et on voit que le lieu de notre impédance qui est un circuit RLC série est finalement une droite. Cette droite va de moins l'infini à plus l'infini sur l'axe imaginaire, lorsque la pulsation est nulle on a en effet un terme 1/ωC qui tend vers l'infini et lorsque la fréquence est infinie on a le terme ZL qui vaut ωL et qui tend également vers l'infini.

Notes

Summary

5m 55s

Lieux géométriques
Exemple



$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1+\omega^2 C_2^2 R_2^2} + j\cdot\omega\left[L_1 - \frac{C_2 R_2^2}{1+\omega^2 C_2^2 R_2^2}\right]$$

Electrotechnique I

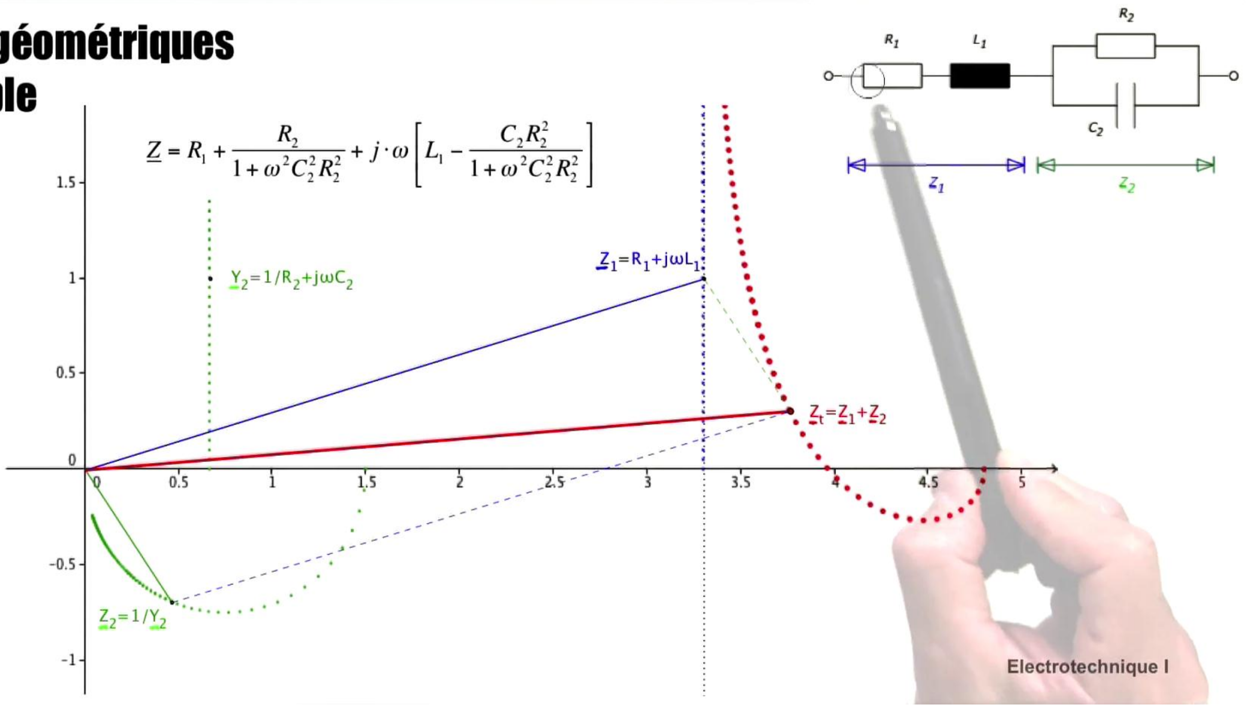
Voilà, on va traiter un cas concret. On va prendre cet exemple de circuit où l'on voit qu'on a une résistance en série avec une inductance, le tout mis en série avec une résistance en parallèle avec un condensateur. Donc on va définir cette première partie comme étant Z1 et cette deuxième partie comme étant Z2. Ces deux impédances, Z1 et Z2, sont en série. Voilà, on peut écrire l'impédance équivalente de tout ce circuit, de toutes ces impédances mises en série. On voit qu'on a un terme qui correspond à Z1 avec sa partie, ici, résistive, R1, et la partie réactive, jωL1. Ensuite pour la partie de Z2, vous pouvez vous référer au tableau que l'on vous avait donné dans les leçons précédentes, mais on peut réécrire la partie réelle, ici, de cette impédance comme étant ceci plus la partie réactive qui est égale à jω fois ce terme-là. Et donc maintenant, on aimerait calculer ou déterminer le lieu de l'impédance Z lorsque l'on fait varier la pulsation, la fréquence, ω. Le résultat on vous le donne au slide suivant.

Notes

Summary

7m 04s

Lieux géométriques
Exemple



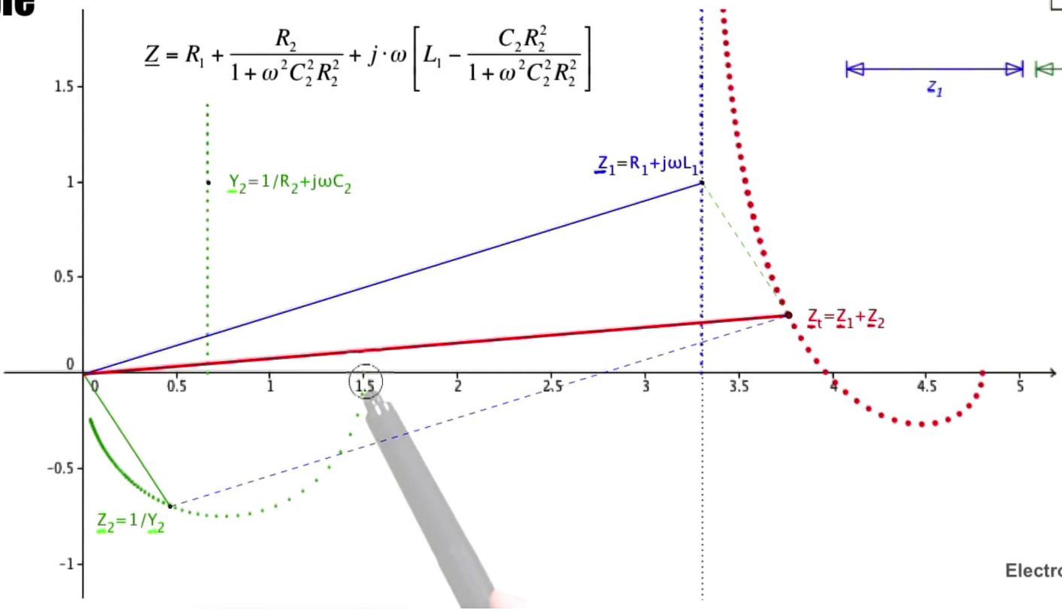
On a ici ce résultat que je vais commenter. Donc on représente ici l'impédance Z1 et l'impédance Z2. La première impédance ici, Z1, elle est donnée par, ici, ce Z1 qui a une partie réelle et une partie imaginaire, c'est ce terme R1 plus jωL1. Une petite remarque à cause du logiciel que j'utilise qui n'a pas la possibilité d'écrire les soulignés, on a en fait pour écrire correctement cette équation, on doit souligner ici le Y2, le Z2 fois toutes les impédances, également celles-ci pour être correct. Donc je disais que le lieu de cette première partie ici de l'impédance Z1, qui correspond à ce terme R1 et à ce terme jωL1, on le retrouve ici effectivement si on fait varier la fréquence de zéro à l'infini. Ce terme ne change pas, on a toujours R1 qui est ce point-là, et l'impédance va augmenter au fur et à mesure qu'augmente la fréquence, c'est le terme jωL1, donc le lieu de cette impédance ici, d'une résistance et d'une inductance en série, c'est une demie-droite qui tend de zéro vers j infini.

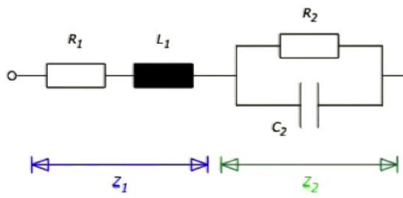
Notes

Summary

8m 30s

Lieux géométriques
Exemple





Electrotechnique I

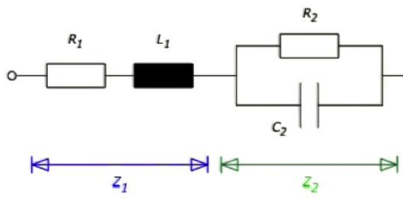
Maintenant pour la deuxième partie du circuit, l'impédance Z2 ici, on peut avantageusement utiliser les admittances, parce que l'on sait que les admittances en parallèle s'additionnent, et ça nous permet de décrire le lieu de Y2, c'est-à-dire que Y2 c'est la somme de ces deux admittances, l'admittance de R2 elle est ici, c'est 1/R2, c'est l'inverse, et l'admittance de C2 c'est jωC2 et on voit que ce terme-là, ces deux termes, sont tout à fait analogues à ces deux termes-là, quelque chose de constant pour le cas réel, on a ce terme ici, 1/R2, et on additionne un terme imaginaire qui est proportionnel à la fréquence. Ça nous donne également un lieu, ici, qui est une demie-droite qui va de j nul jusqu'à j infini. Alors on peut faire la démonstration mathématique mais on ne va pas le faire ici. Faire la démonstration mathématique que l'inverse d'une droite dans le plan complexe, donc qui va de j0 jusqu'à j infini, de la partie imaginaire nulle jusqu'à une partie imaginaire infinie, c'est un demi-cercle. Donc l'image ou l'inverse d'une demie-droite, c'est un demi-cercle qui part de cette valeur-là pour ω égal zéro et qui tend vers cette valeur-là.

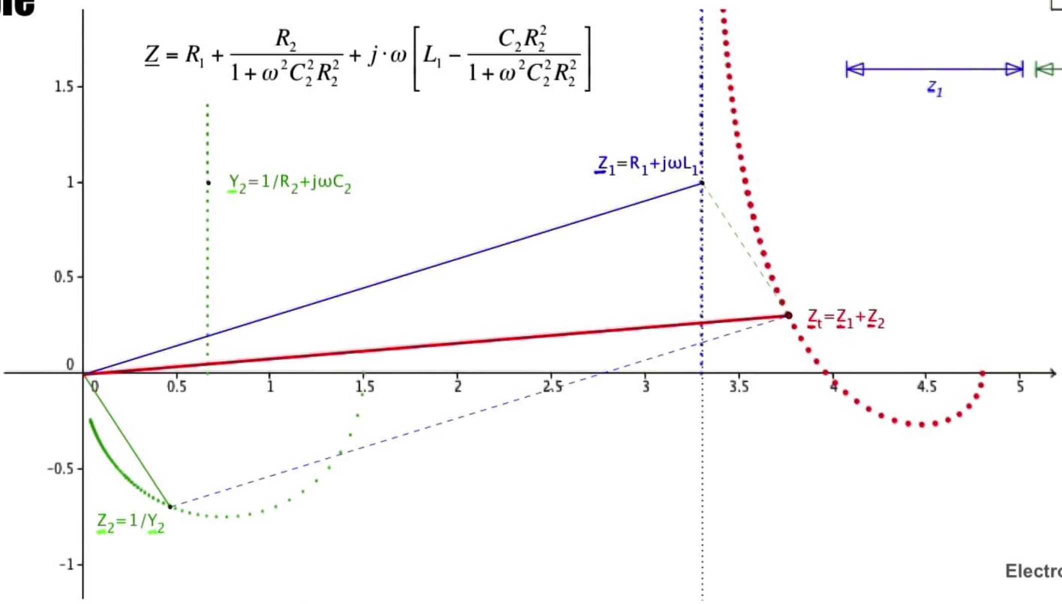
Notes

Summary

10m 01s

Lieux géométriques
Exemple





Electrotechnique I

Pour avoir le résultat final, on doit additionner cette impédance Z1, c'est ce lieu-là, et cette impédance Z2 qu'on a trouvé en faisant l'inverse de cette droite-là, c'est ce demi-cercle-là, la somme des deux, c'est cette impédance plus celle-ci, qui est ici, et qui donne ce résultat : Z1 plus Z2. La somme de ces deux impédances pour ω égal zéro, on part de ce point-là où l'on a la somme de R1 plus R2. Et en augmentant la fréquence, tout d'abord on va être négatif, c'est-à-dire capacitif, parce que à basse fréquence l'impédance Z2 est très grande, c'est capacitif. Donc on va d'abord être capacitif, on arrive à une valeur particulière où on est purement résistif et lorsque la fréquence augmente encore, on va devenir très inductif pour suivre cette courbe-là.

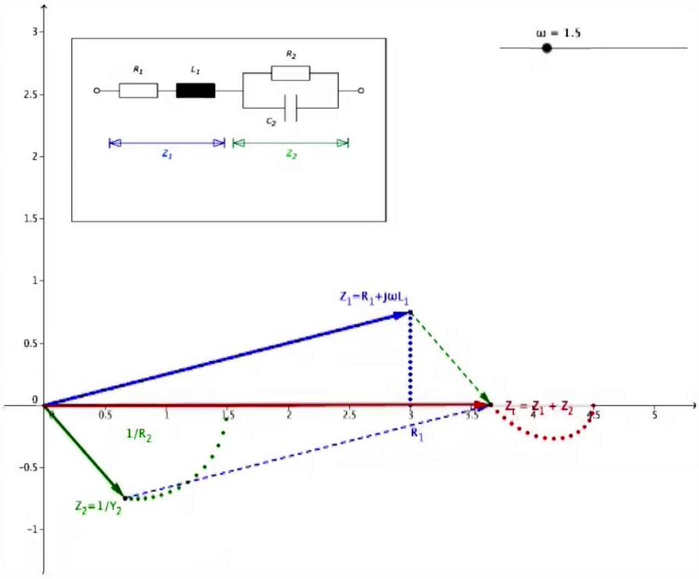
Notes

Summary

11m 31s

COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL

Lieux géométriques
Exemple animé
$0 < \omega < \omega_{max}$



Electrotechnique I

Alors on part d'une valeur d'une impédance totale pour une fréquence, une pulsation, nulle à partir de ce point-là. On a la somme en fait des deux résistances R1 et R2. Pourquoi ? Parce que jωL1 est nul et 1/ωC est infini, donc on a un circuit ouvert ici. À la place de C2 on a uniquement R1 plus R2, c'est ce point de départ.

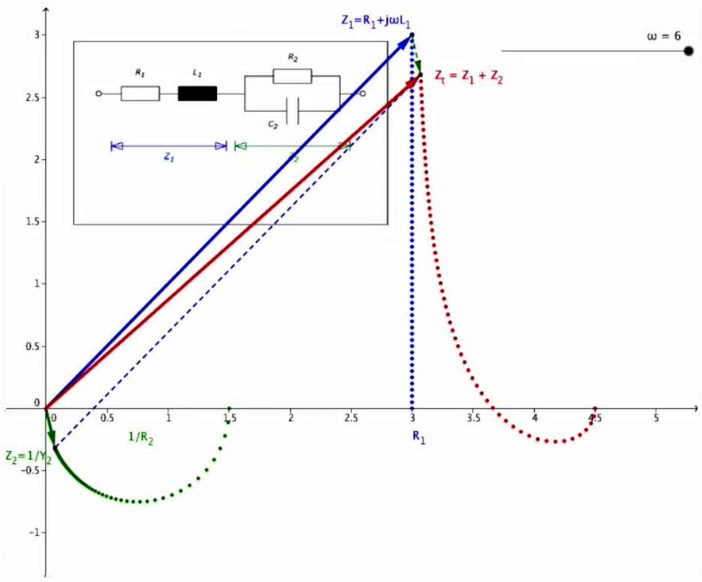
Notes

Summary

12m 37s

COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL

Lieux géométriques
Exemple animé
$0 < \omega < \omega_{max}$



Electrotechnique I

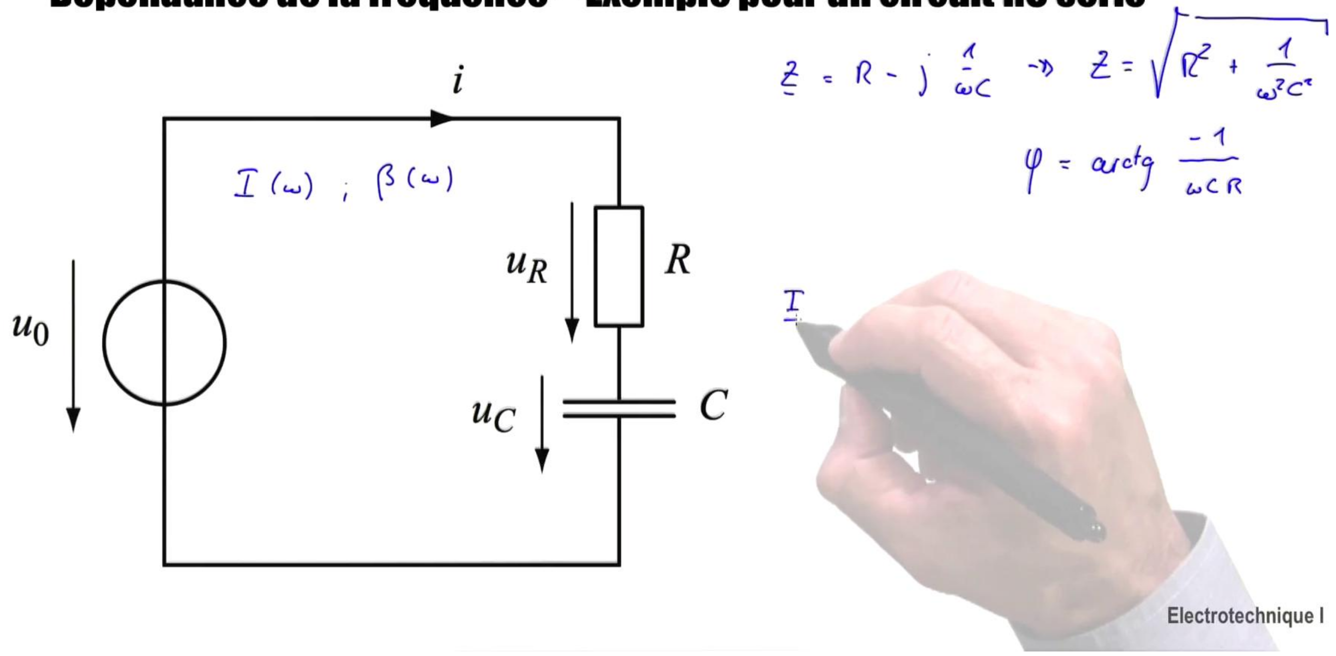
Voilà, je lance la vidéo et on voit que l'impédance est d'abord capacitive, résistive, et qu'elle devient de plus en plus inductive au fur et à mesure que la fréquence augmente.

Notes

Summary

13m 02s

Dépendance de la fréquence – Exemple pour un circuit RC série



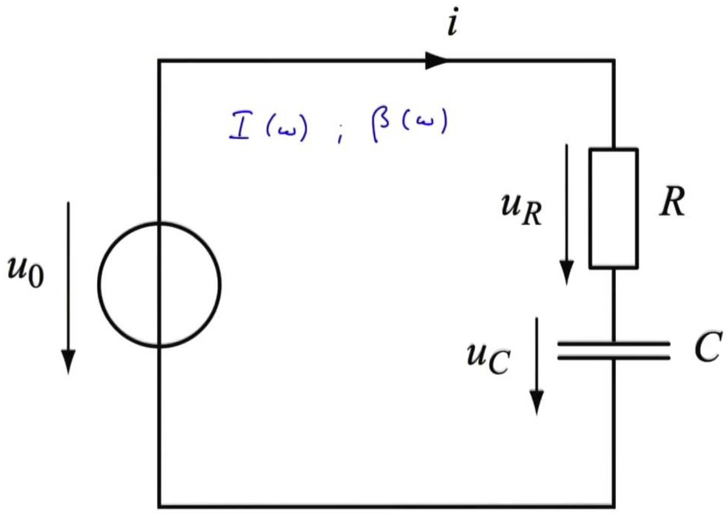
On a vu ce qui se passait au niveau de l'impédance, au niveau de sa norme, de sa phase dans le plan complexe lorsque l'on augmente la fréquence du circuit. On va maintenant, pour cet exemple donné ici, s'intéresser au courant, c'est-à-dire à sa norme et à sa phase, de nouveau en fonction de la fréquence. Donc on cherche à calculer I de ω et β, l'argument du courant. Alors pour connaître le courant qui traverse le circuit, on a besoin, en connaissant ici la tension d'alimentation u0, on a besoin de connaître l'impédance ici du circuit RC série. Donc on peut écrire que Z = R - j(1/ωC) et donc que sa norme est égale, par Pythagore, à la partie réelle au carré plus la partie imaginaire au carré. Donc on a que la norme de Z c'est $\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$. Ça c'est la norme. Maintenant le déphasage. Le déphasage φ de l'impédance, il est donné par l'arc tangente de la partie imaginaire sur la partie réelle, c'est-à-dire la partie imaginaire 1/ωC divisé par la partie réelle qui est R. Voilà, on a défini complètement ici l'impédance Z, et donc maintenant pour calculer le courant. Le courant est donné par le rapport de u0 sur Z.

Notes

Summary

13m 16s

Dépendance de la fréquence – Exemple pour un circuit RC série



$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} \rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\omega C R}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U_0}}{\underline{Z}} = \frac{U_0 \cdot e^{j\alpha}}{Z \cdot e^{j\varphi}} = \underbrace{\frac{U_0}{Z}}_{I} \cdot e^{\underbrace{j(\alpha - \varphi)}_{\beta}}$$

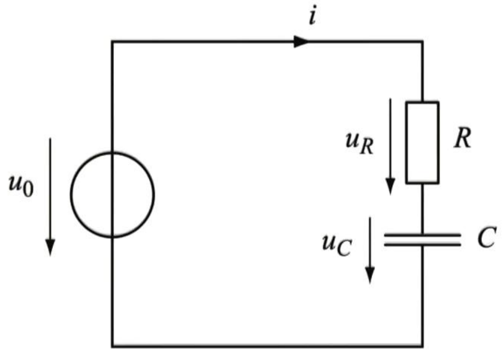
Et donc si j'exprime u0 en fonction de l'argument, on a u0 multiplié par e^jα, habituellement on pose α égal à zéro, et l'impédance Z qui est donné justement par la norme que l'on vient de calculer multiplié par e^jφ. On travaille un petit peu cette équation et on peut écrire la norme du courant, qui est u0 sur Z, multiplié par e^j(α - φ). Par identification, on a que ce terme-là c'est la norme de I et ce terme-là c'est l'argument de I, c'est β.

Notes

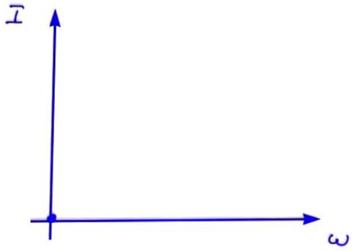
Summary

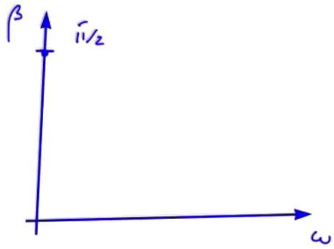
15m 02s

Dépendance de la fréquence – Exemple pour un circuit RC série



$\omega = 0 \Rightarrow I = 0 \qquad \beta = \pi/2$





$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad ; \quad \beta = -\varphi = \text{atg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

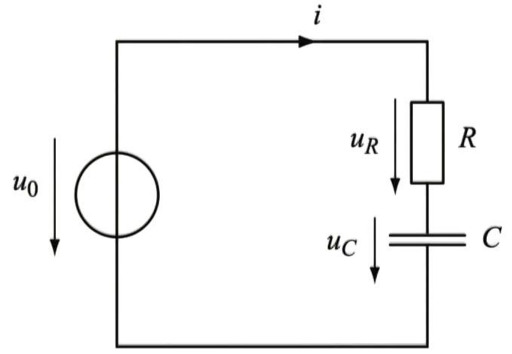
On peut exprimer la norme de I, on développe. On a que I c'est u0, la tension d'alimentation, divisé par la norme de Z, c'est-à-dire $R^2 + (1/\omega^2C^2)$, et l'angle β, l'argument du courant, il est donné par -φ, c'est-à-dire arc tangente de 1/ωRC. On va analyser maintenant ces deux fonctions, la norme de I et l'argument de I en fonction de ω et on va les représenter dans un plan ω et la grandeur qu'on aimerait représenter. On va tout d'abord représenter la norme de I en fonction de ω. Et l'argument de I en fonction de ω. Pour une pulsation ω égal zéro, on a que I est égal à zéro. Pourquoi ? Parce que ce terme devient très, très grand et donc le rapport u sur quelque chose de très grand est égal à zéro. Donc pour une pulsation nulle, on a une norme du courant qui part de ce point-là. Au niveau de la phase, on a que β est égal à pi sur deux. Pourquoi ? Parce que le vecteur ZC est infini du moment que ω égal zéro, donc la norme de C est infinie et donc on a un angle de moins pi sur deux et comme β est égal à moins φ, on part de cette valeur qui vaut pi sur deux pour une fréquence nulle. À l'opposé, lorsque la pulsation est infinie, le courant tend vers une valeur qui vaut u0/R.

Notes

Summary

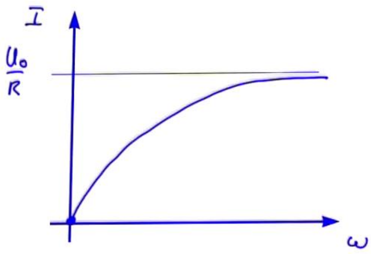
15m 47s

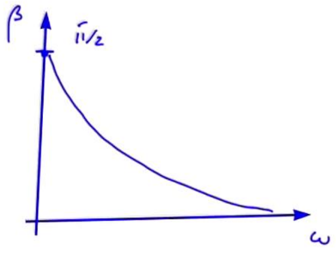
Dépendance de la fréquence – Exemple pour un circuit RC série



$\omega = 0 \Rightarrow I = 0 \qquad \beta = \pi/2$

$\omega = \infty \Rightarrow I = \frac{U_0}{R} \qquad \beta = 0$





$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \; ; \; \beta = -\varphi = \operatorname{atg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Electrotechnique I

On voit ceci dans cette équation. La pulsation étant infinie, ce terme est égal à zéro et on a donc u0/√R², c'est u0/R. Le courant pour ω égal infini tend vers u0/R. Entre deux, on va augmenter de cette façon-là. Pour l'argument du courant, β à l'infini vaut zéro. Pourquoi ? Parce que pour une valeur infinie, le condensateur se comporte comme un court-circuit et donc ce terme-là tend vers zéro. La courbe de l'argument part donc de pi sur deux et tend vers zéro pour ω égal infini. Nous avons complètement défini le comportement du courant qui traverse le circuit en fonction de la fréquence au niveau de la norme et au niveau de l'argument. Donc un condensateur en régime continu se comporte comme une impédance infinie, donc pas de courant. On est à ce point-là. Et un condensateur à fréquence infinie se comporte comme un court-circuit et donc on a uniquement une partie résistive.

Notes

Summary

18m 06s

Nous avons défini et construit le lieu géométrique d'une impédance, ici en fonction de la fréquence, mais on aurait pu également le faire en fonction de R, L ou C par exemple si on voulait tenir compte du vieillissement des composants où R, L ou C peuvent changer, ou en fonction de la charge qui serait mise sur ce circuit. On a vu qu'un circuit pouvait changer de nature selon la fréquence à laquelle il est alimenté, donc soit capacitif, purement résistif ou inductif, et qu'il y a une valeur particulière pour laquelle il est purement résistif, c'est ce que nous verrons lors de la prochaine leçon. On a vu qu'il était possible de supprimer la partie réactive d'une impédance mais que ceci ne pouvait ce faire qu'à une seule fréquence donnée. Par voie de conséquence, on peut supprimer également la puissance réactive dans un circuit en combinant l'élément L et l'élément C. Finalement, on a vu que si l'impédance Z change avec la fréquence, eh bien le courant également change avec la fréquence, on a montré comment il évoluait au niveau de sa norme et au niveau de son déphasage en fonction de la fréquence. Merci de votre attention.

Notes

Summary

19m 28s