ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

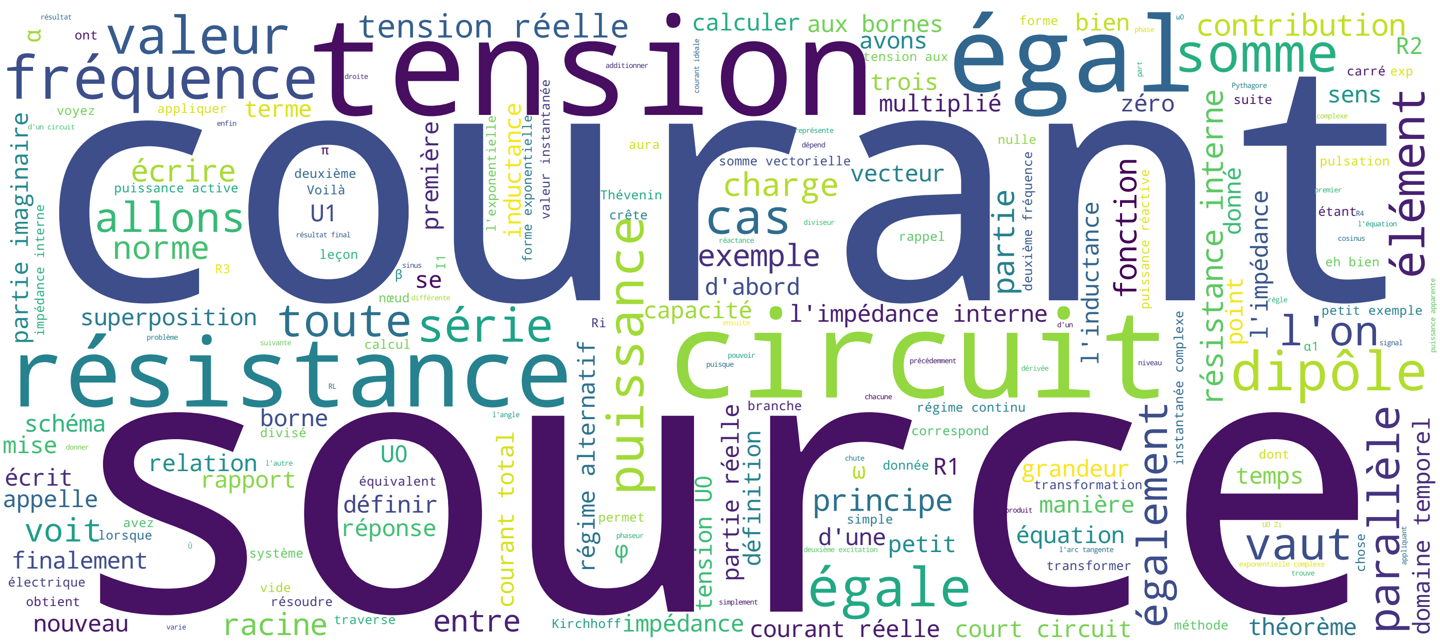
MÉTHODES EN RÉGIME ALTERNATIF

THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON – PRINCIPE DE SUPERPOSITION

LEÇON 16

Électrotechnique I

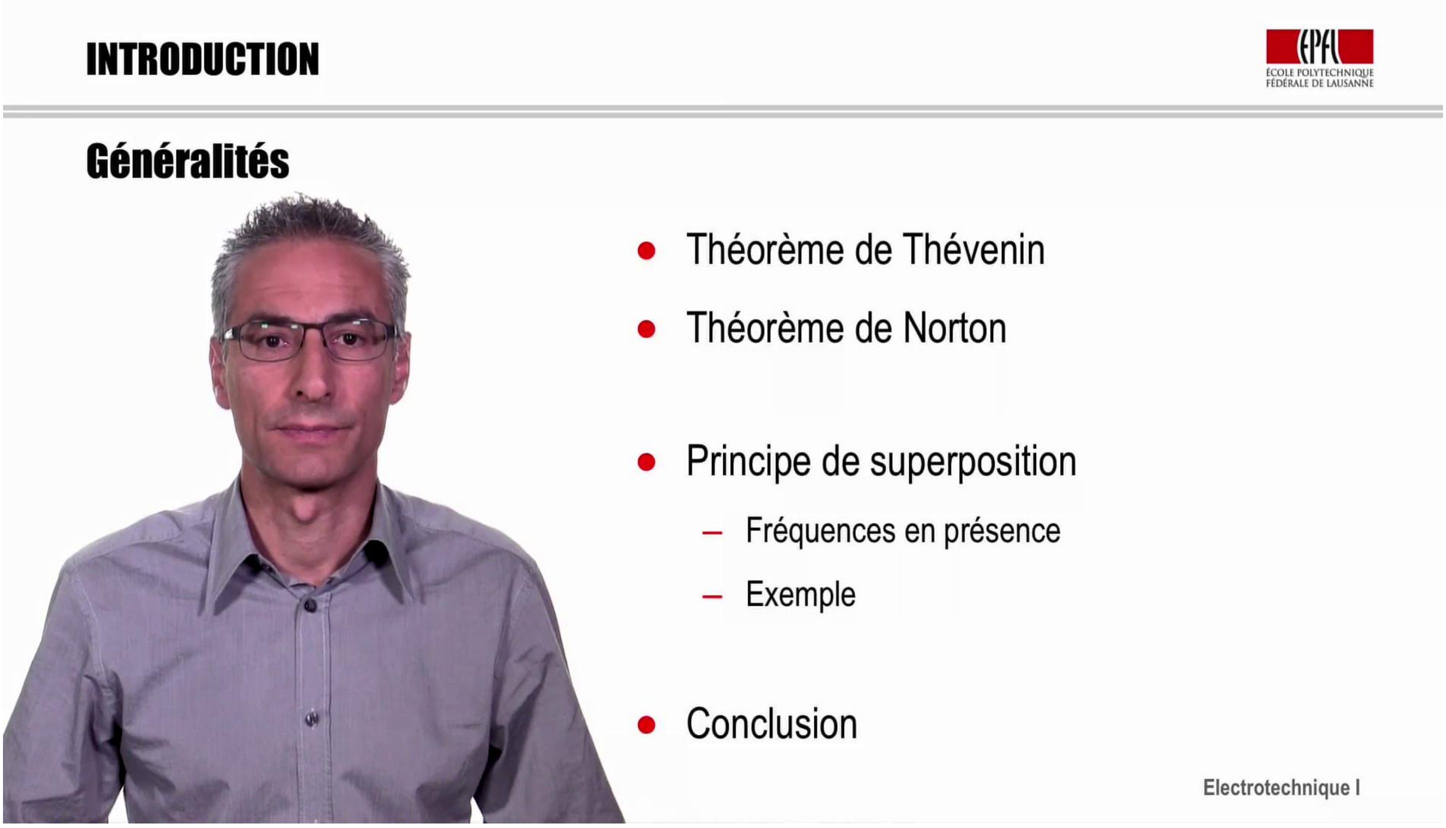
Yves PERRIARD & Paolo GERMANO
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés



Search MOOC

Video

EPFL

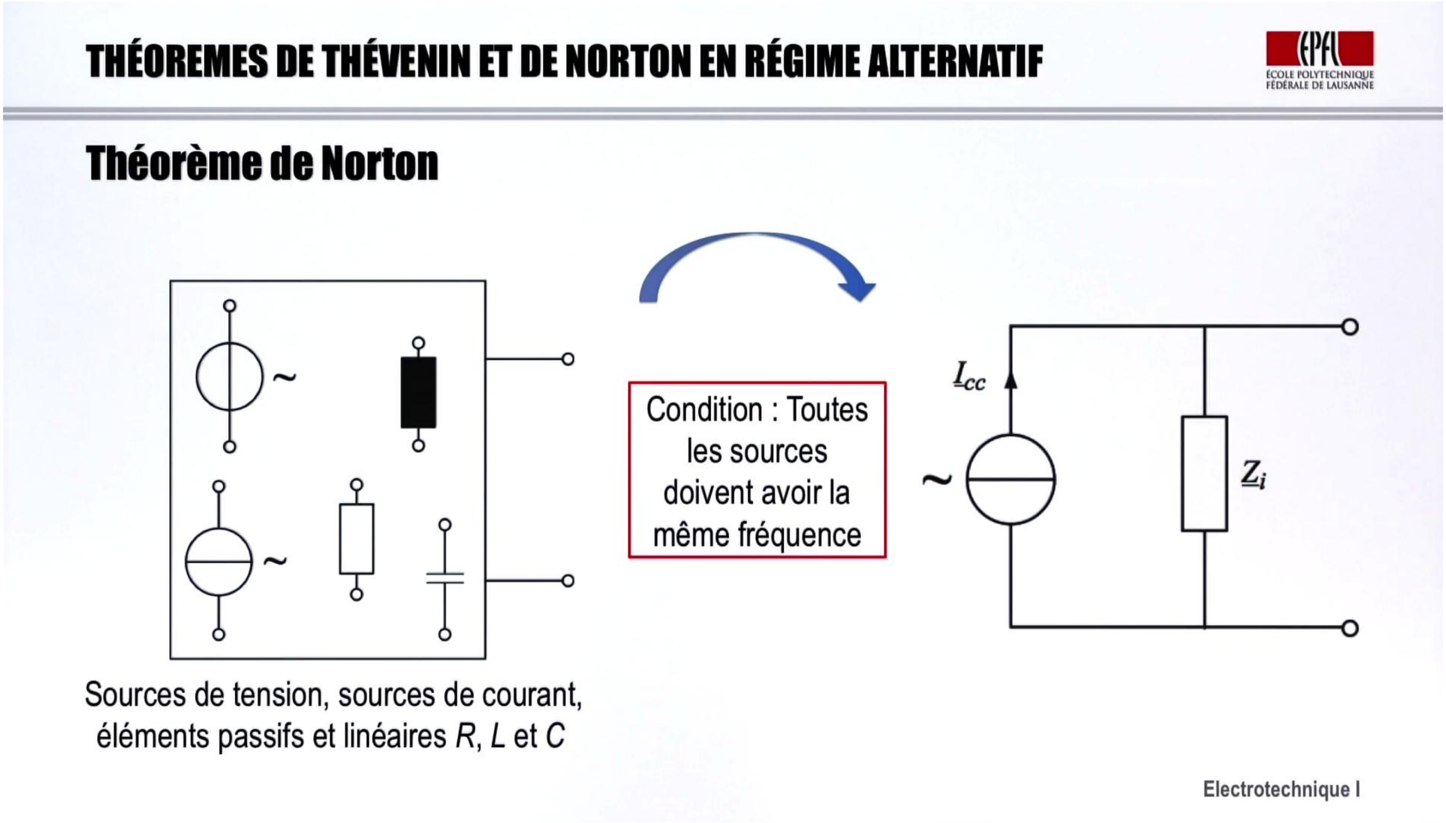


Bonjour, bienvenue à cette nouvelle leçon du cours d'électrotechnique. Aujourd'hui nous allons parler de deux méthodes que nous avions développées en régime continu et que l'on va adapter pour le régime alternatif. Dans un premier temps, nous allons tout d'abord voir le théorème de Thévenin et le théorème de Norton appliqués à un circuit alimenté en régime alternatif. Dans un deuxième temps, nous allons voir sous quelles conditions on peut appliquer le principe de superposition en régime alternatif et nous donnerons un petit exemple.

Notes

Summary

0m 03s

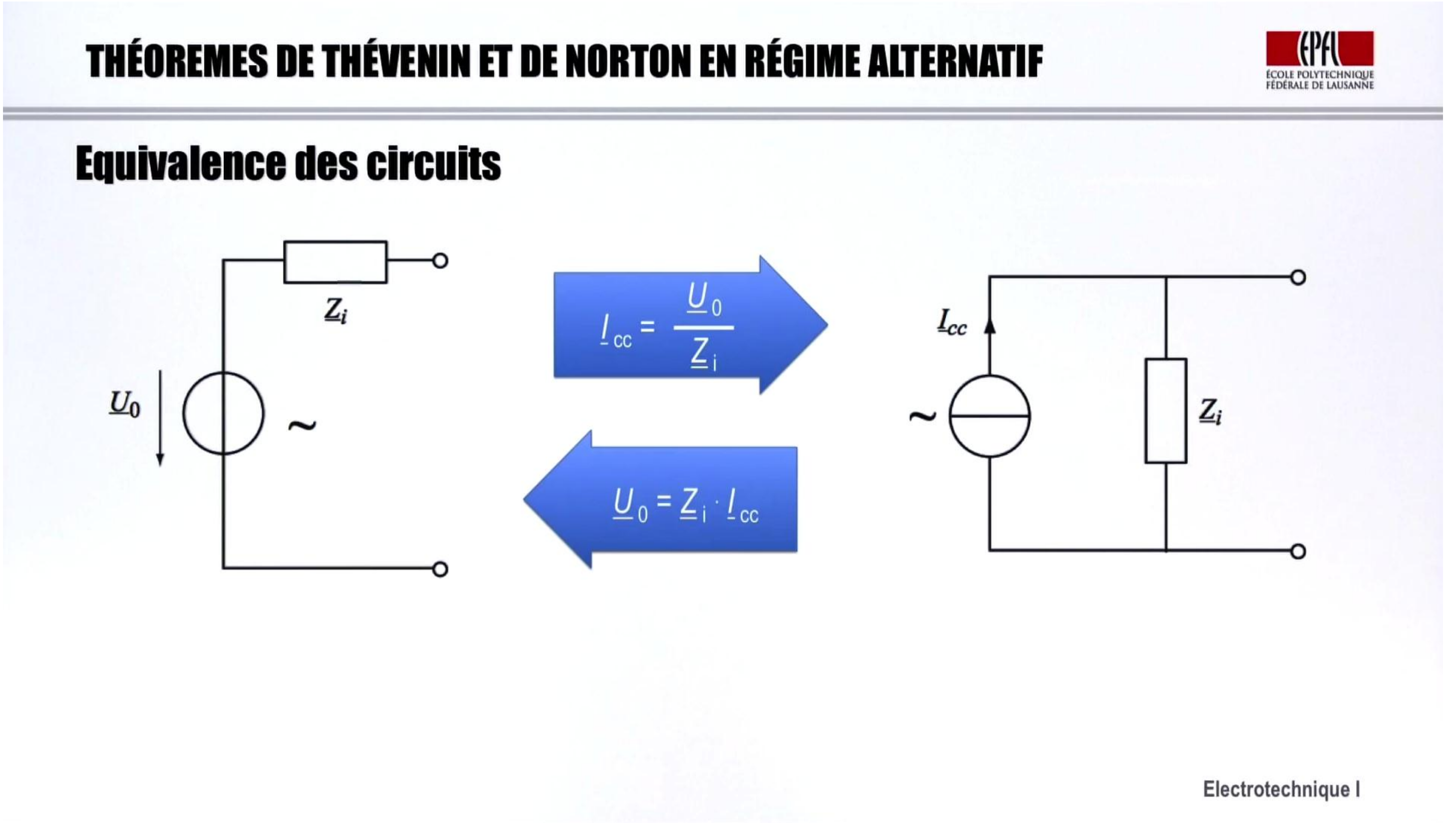


Pour rappel, le théorème de Thévenin énonce que tout dipôle, ici on a un exemple de dipôle avec des éléments à l'intérieur et on a ici les deux pôles. Donc tout dipôle peut être remplacé par une source de tension réelle, donc une source de tension idéale, mise en série avec une impédance interne. Une source de tension réelle lorsque la tension U0, ici, est la tension à vide du dipôle et que l'impédance interne Zi correspond au rapport de la tension à vide et du courant de court-circuit. Donc Z, ici, est égal à U0 la tension à vide divisée par le courant du court-circuit lorsqu'on court-circuite le dipôle. De même, le théorème de Norton énonce que tout dipôle peut être remplacé par une source de courant réelle, donc ici une source de courant idéale, mise en parallèle avec une impédance interne. Donc une source de courant réelle où le courant Icc, ici, est le courant de court-circuit du dipôle et que l'impédance interne est identique à celle de la source de tension réelle U0 qui est égale à Zi*Icc. La condition pour que le théorème de Thévenin et le théorème de Norton soient applicables est que toutes les sources qui sont dans le dipôle doivent avoir la même fréquence.

Notes

Summary

0m 35s

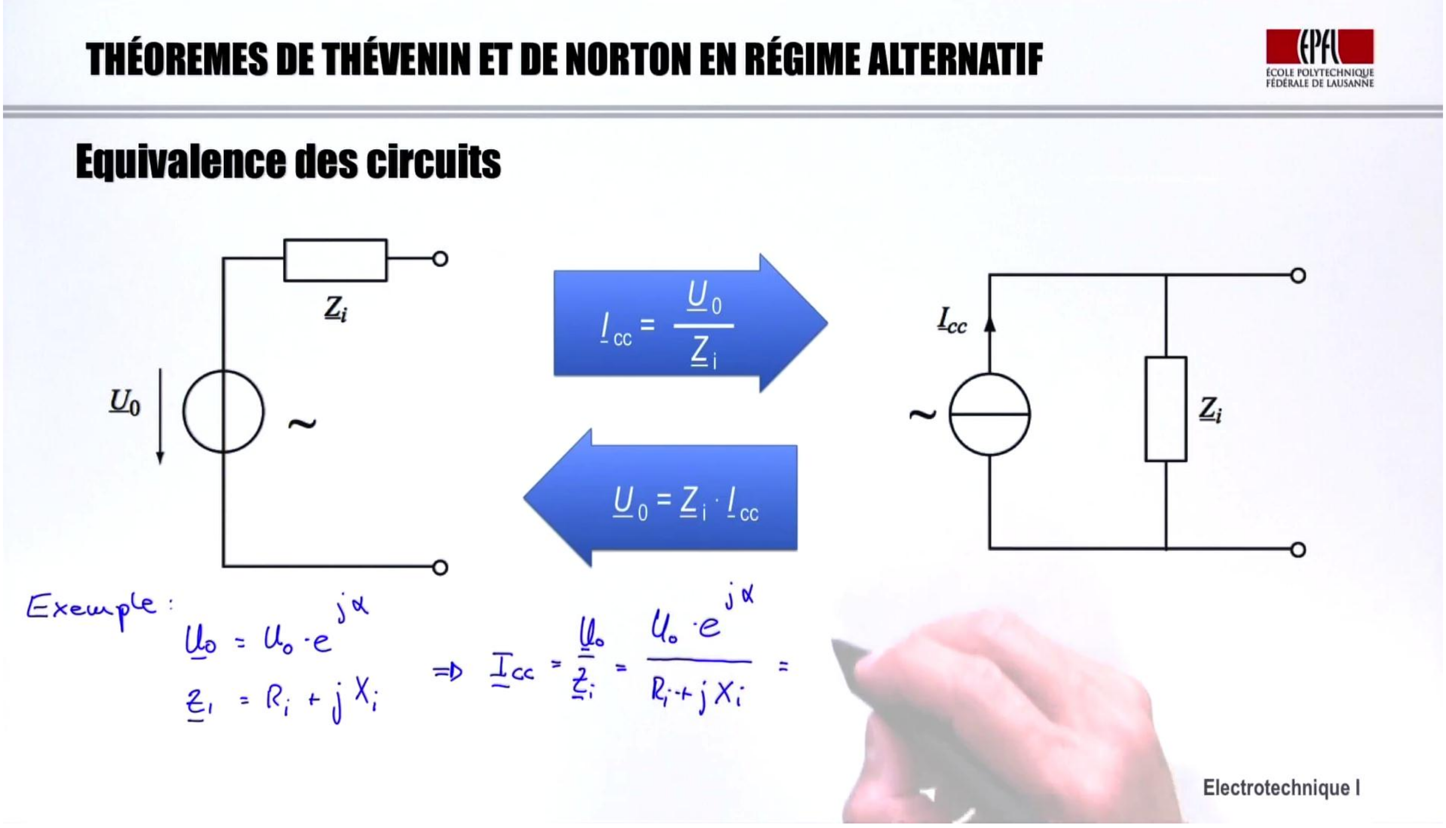


Si le dipôle est équivalent à une source de tension réelle ou à une source de courant réelle, alors il y a également une équivalence entre une source de tension réelle et une source de courant réelle. Si l'on remplace le dipôle, ou le circuit, par cette source de tension réelle, ou une partie du circuit par cette source de tension réelle, on obtient l'équivalence en appliquant cette relation, c'est-à-dire que la source de courant idéale est égale au rapport de la tension à vide U0 divisée par l'impédance interne et l'impédance interne, qui est en série avec la source de tension, vient ici en parallèle avec la source de courant. L'opération inverse, c'est-à-dire que si on isole dans le circuit ou si on remplace le circuit, ce dipôle, on trouve l'équivalence de source de courant réelle en source de tension réelle en remplaçant la tension U0 par le produit Zi*Icc. Et on remplace l'impédance interne parallèle par une impédance interne série. Comme on l'a démontré en régime continu, on peut également déterminer l'impédance interne en supprimant toutes les sources de tension et en calculant l'impédance vue de l'extérieur, l'impédance du dipôle, et on obtient ainsi l'impédance interne.

Notes

Summary

2m 12s

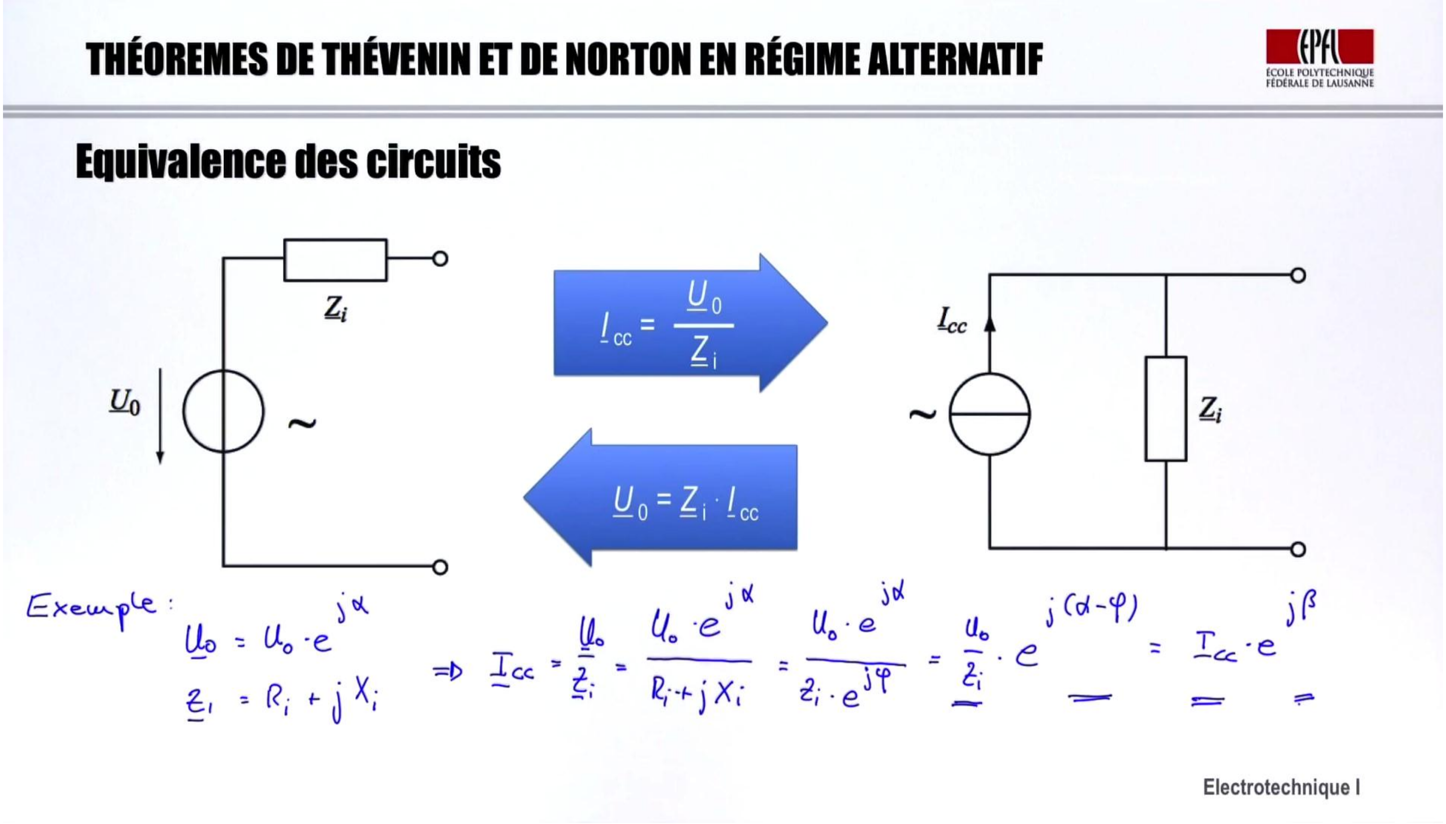


On va faire maintenant un petit exemple. Si la source de tension est égale à U0 qu'on écrit sous forme exponentielle complexe, donc une norme multipliée par un exposant exp(j α) et que l'impédance interne Zi est égale à une résistance interne plus une réactance interne Xi, le courant pour faire la transformation, le courant de court-circuit va être donné par la relation Icc = U0/Zi et c'est égal à la norme fois exp(j α) divisée par la résistance interne plus j X interne. On voit à ce niveau de développement qu'il n'est pas très aisé de résoudre cette fraction de cette sorte-là. On va donc utiliser les propriétés des exponentielles, donc on va transformer cette partie, qui est sous forme cartésienne, en une expression sous forme polaire. Donc on peut réécrire le numérateur identique exp(j α) et puis le dénominateur on va l'écrire sous forme de norme multipliée par exp(j φ), un argument, en sachant que Zi, par Pythagore, c'est la racine carrée de Ri² + Xi² et que l'argument φ est donné par l'arc tangente de la partie imaginaire, donc la réactance Xi, divisée par la résistance interne.

Notes

Summary

3m 55s

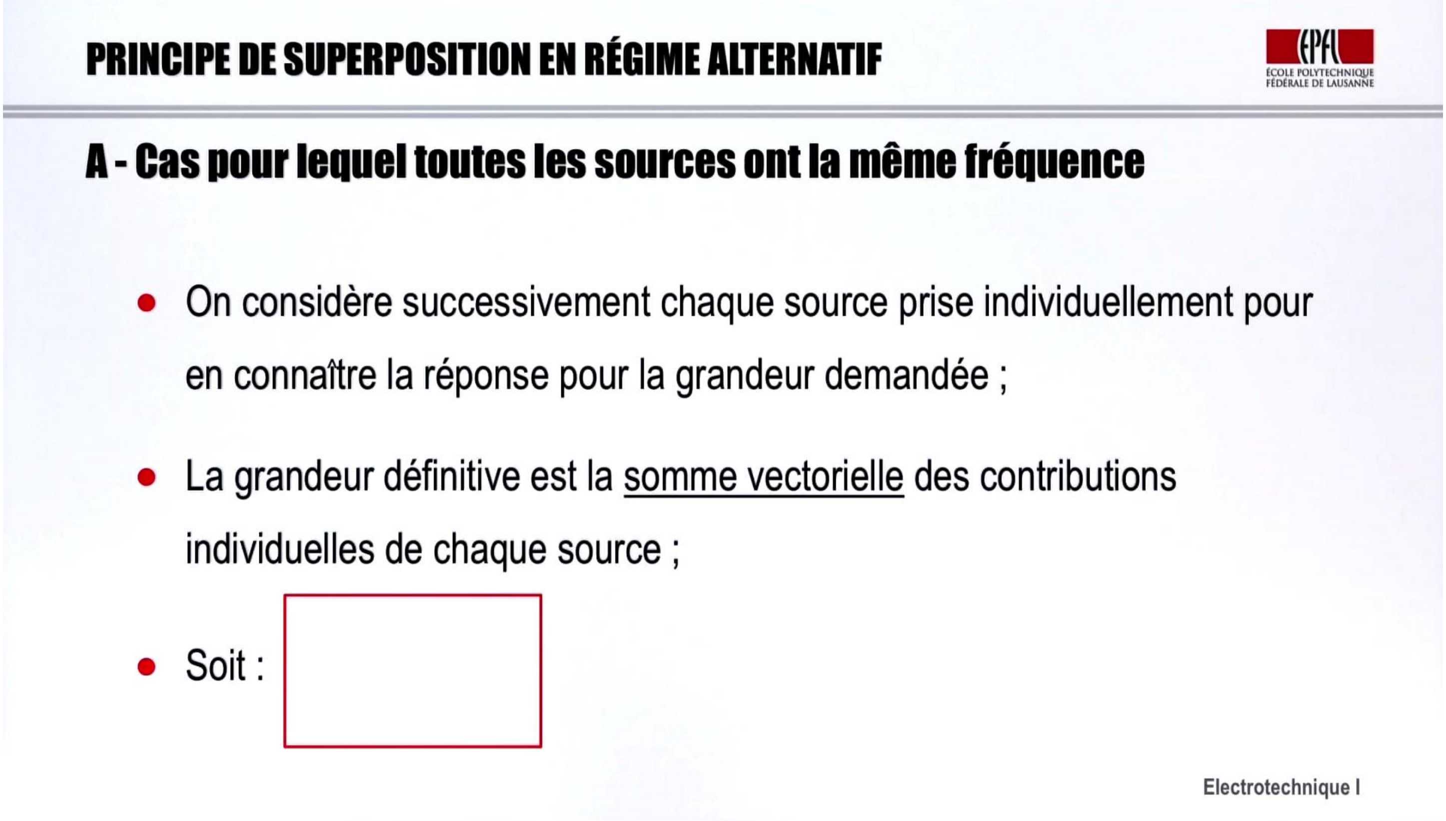


Ecrit sous cette forme, on peut simplement réécrire l'équation comme étant U0/Zi*exp(j(α - φ)) et ceci c'est l'expression du courant, c'est-à-dire Icc*exp(j β) et, par analogie, on voit que la norme de Icc c'est U0/Zi et l'argument β c'est α moins φ. Donc les opérations mathématiques doivent être effectuées en appliquant les règles du calcul complexe.

Notes

Summary

5m 57s



Dans cette deuxième partie de leçon, nous allons voir comment est-ce qu'on peut appliquer le principe de superposition en régime alternatif. Pour rappel, le principe de superposition dit que la réponse d'un circuit, c'est-à-dire un courant quelque part dans le circuit ou une tension aux bornes d'un des éléments du circuit, la réponse du circuit à une somme d'excitations est égale à la somme des réponses dues à chacune des excitations prises individuellement. Comme au régime continu, le principe de superposition est applicable mais pour autant que le système soit linéaire. Pour rappel, le terme de linéaire signifie que la valeur R d'une résistance ne varie pas avec le courant qui la traverse. Donc la relation U = R*I est toujours vérifiée. Idem pour une inductance, sa valeur L ne va pas varier avec le courant qui la traverse, elle ne sature donc pas. Et, finalement, la valeur C d'un condensateur ne varie pas en fonction de la tension qui est présente à ses bornes. On va donc traiter ces deux cas : le premier cas pour lequel toutes les sources de tension et courant ont la même fréquence. On considère successivement chaque source prise individuellement pour en connaître la réponse pour la grandeur demandée.

Notes

Summary

6m 40s

A - Cas pour lequel toutes les sources ont la même fréquence

- On considère successivement chaque source prise individuellement pour en connaître la réponse pour la grandeur demandée ;
- La grandeur définitive est la somme vectorielle des contributions individuelles de chaque source ;
- Soit : $\boxed{\underline{X}_{tot} = \sum_{j=1}^{n} \underline{X}_j}$ Rem. : $\underline{U}$ ✓ $\underline{I}$ ✓ P ✗ (fonction quadratique)

$P_1 = R\,I_1^2$

$P_2 = R\,I_2^2$

mais $P_{tot} = P_1 + P_2 \neq R(I_1 + I_2)^2 = R(I_1^2 + \underline{2I_1I_2} + I_2^2)$

Electrotechnique I

La grandeur définitive est la somme vectorielle des contributions individuelles de chaque source. Donc pour une grandeur qu'on appelle X ici, la grandeur Xtot c'est la contribution, la somme vectorielle de chacune des contributions de chaque source. La grandeur X dans cette équation peut être soit une tension soit un courant mais en aucun cas une puissance. Pourquoi ? Parce que la puissance est une fonction quadratique et donc non linéaire, donc le principe de superposition ne s'applique pas au cas des puissances. On peut en faire la démonstration, c'est-à-dire que si on écrit la puissance P1 qui serait dissipée dans la résistance R due à la source 1, cette puissance vaudrait R*I1². La puissance P2 qui serait la puissance dissipée dans la résistance due à la source 2, vaudrait R*I². Mais la puissance totale n'est pas égale à ceci, pourquoi ? Parce que Ptot, qui est la somme des deux puissances, n'est pas égale à R fois le courant total I1 + I2 au carré. Pourquoi ? Parce que cette dernière expression peut être développée ainsi... où il apparaît ce double produit, ici, qui fait que pour les puissances le principe de superposition ne s'applique pas.

Notes

Summary

8m 06s

PRINCIPE DE SUPERPOSITION EN RÉGIME ALTERNATIF

B - Cas pour lequel toutes les sources n'ont pas la même fréquence

- On regroupe les sources par fréquence ;
- Pour chaque groupe de fréquence, on applique la méthode vue au cas A
- Une somme vectorielle de contributions pour chaque fréquence :

  $f_1 \rightarrow \underline{X}_{\text{tot } 1}$, $f_2 \rightarrow \underline{X}_{\text{tot } 2}$, $f_n \rightarrow \underline{X}_{\text{tot } n}$

- L'addition des sommes vectorielles des contributions doit se faire dans le domaine temporel :

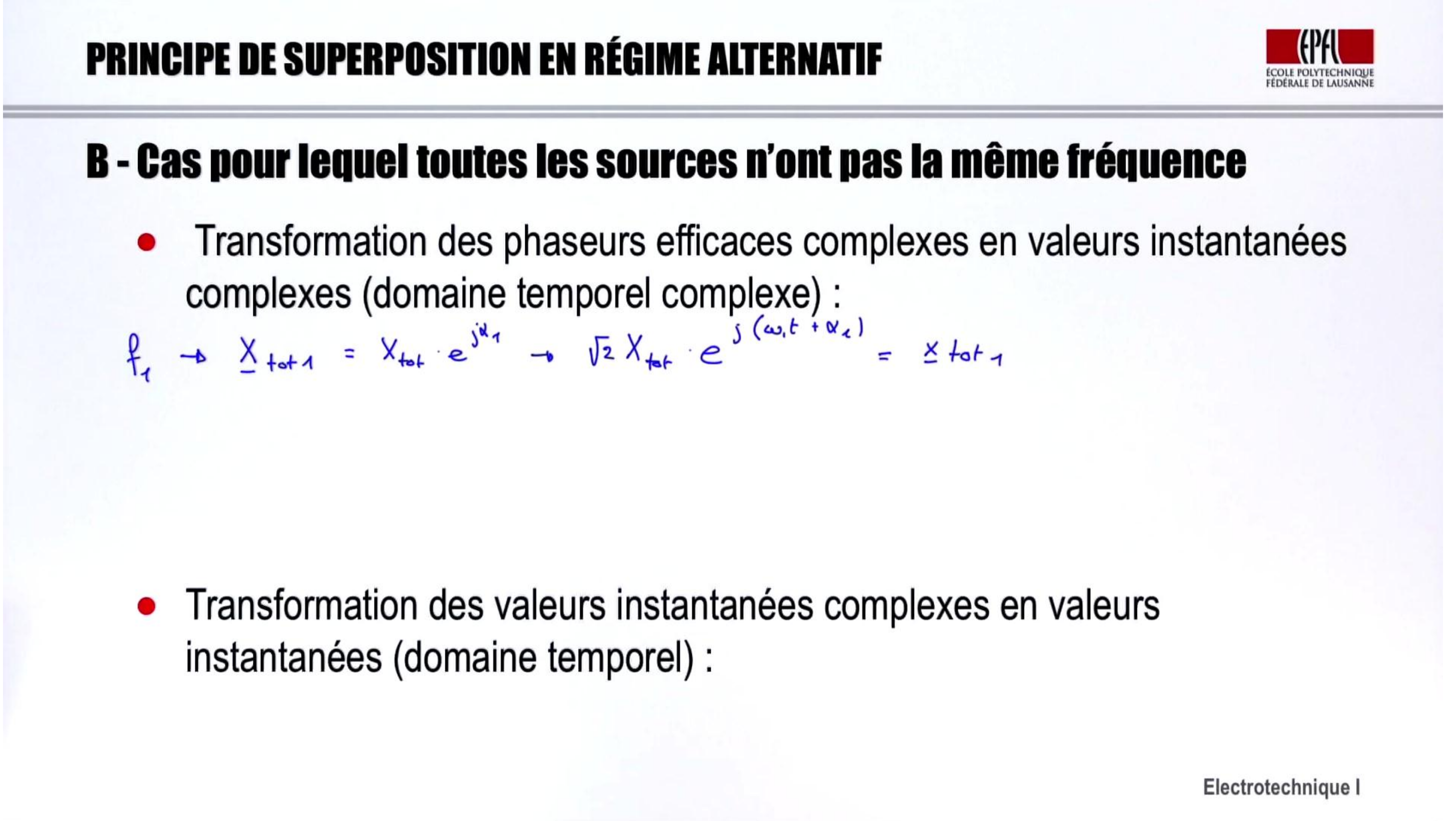
Electrotechnique I

On traite maintenant un deuxième cas. C'est le cas pour lequel toutes les sources de tension ou de courant n'ont pas la même fréquence et la méthode est la suivante : on va tout d'abord regrouper les sources par fréquence, c'est-à-dire qu'on prend toutes les sources qui ont la même fréquence et on va les mettre ensemble et pour chaque groupe de fréquence, on va appliquer la méthode vue au cas A. Et donc on aura une somme vectorielle de contributions pour chaque fréquence, c'est exprimé ici. Pour la première fréquence on a une première contribution des sources à cette fréquence et pour cette deuxième fréquence, on a de nouveau une somme de contributions, ainsi de suite pour toutes les fréquences. Finalement, l'addition des sommes vectorielles, de ces sommes ici, des contributions doit se faire, finalement, dans le domaine temporel.

Notes

Summary

10m 14s



Cette transformation dans le domaine temporel on va la faire maintenant, on va traiter juste un cas un peu simple, un cas général où il n'y aurait que deux fréquences en jeu. Pour la première fréquence f1, on va avoir une somme de toutes les contributions qu'on appelle Xtot1, que je peux écrire sous forme exponentielle complexe donc avec une norme : Xtot*exp(j α1) et je vais transformer ce phaseur efficace complexe en valeur instantanée complexe, dans le domaine temporel complexe. La norme qui est ici sous forme efficace, je vais prendre sa valeur de crête, c'est à dire racine de 2 fois Xtot, multiplié par exp(j), on réintroduit la pulsation ω1, ω1 fois t plus α1, et ceci c'est égal à petit x, x minuscule, parce que ça dépend du temps, xtot1. Idem pour la deuxième fréquence qu'on a identifiée où on a la somme des contributions Xtot2 sous forme exponentielle complexe efficace qu'on peut écrire sous forme Xtot2 -- pardon ici j'ai oublié le 1 -- multiplié par exp(j α2), qu'on transforme en valeur instantanée complexe c'est-à-dire racine de 2 fois Xtot2 -- pardon j'ai à nouveau oublié le 1 ici - donc la valeur de crête multipliée par exp(j ω2*t + α2) et ceci c'est égal à xtot2.

Notes

Summary

11m 10s

B - Cas pour lequel toutes les sources n'ont pas la même fréquence

- Transformation des phaseurs efficaces complexes en valeurs instantanées complexes (domaine temporel complexe) :

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \rightarrow \underline{X}_{tot1} = X_{tot_1} \cdot e^{j\alpha_1} \rightarrow \sqrt{2}\, X_{tot_1} \cdot e^{j(\omega_1 t + \alpha_1)} = \underline{x}_{tot1} \\ f_2 \rightarrow \underline{X}_{tot2} = X_{tot_2} \cdot e^{j\alpha_2} \rightarrow \sqrt{2}\, X_{tot_2} \cdot e^{j(\omega_2 t + \alpha_2)} = \underline{x}_{tot2} \end{array}\right\} \underline{x}_{final} = \underline{x}_{tot_1} + \underline{x}_{tot_2}$$

$$\underline{x}_{final} = \sqrt{2}\, X_{tot_1} \cdot e^{j(\omega_1 t + \alpha_1)} + \sqrt{2}\, X_{tot_2} \cdot e^{j(\omega_2 t + \alpha_2)}$$

- Transformation des valeurs instantanées complexes en valeurs instantanées (domaine temporel) :

$$x_{final} = \sqrt{2}\, X_{tot_1} \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{2}\, X_{tot_2} \cdot \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

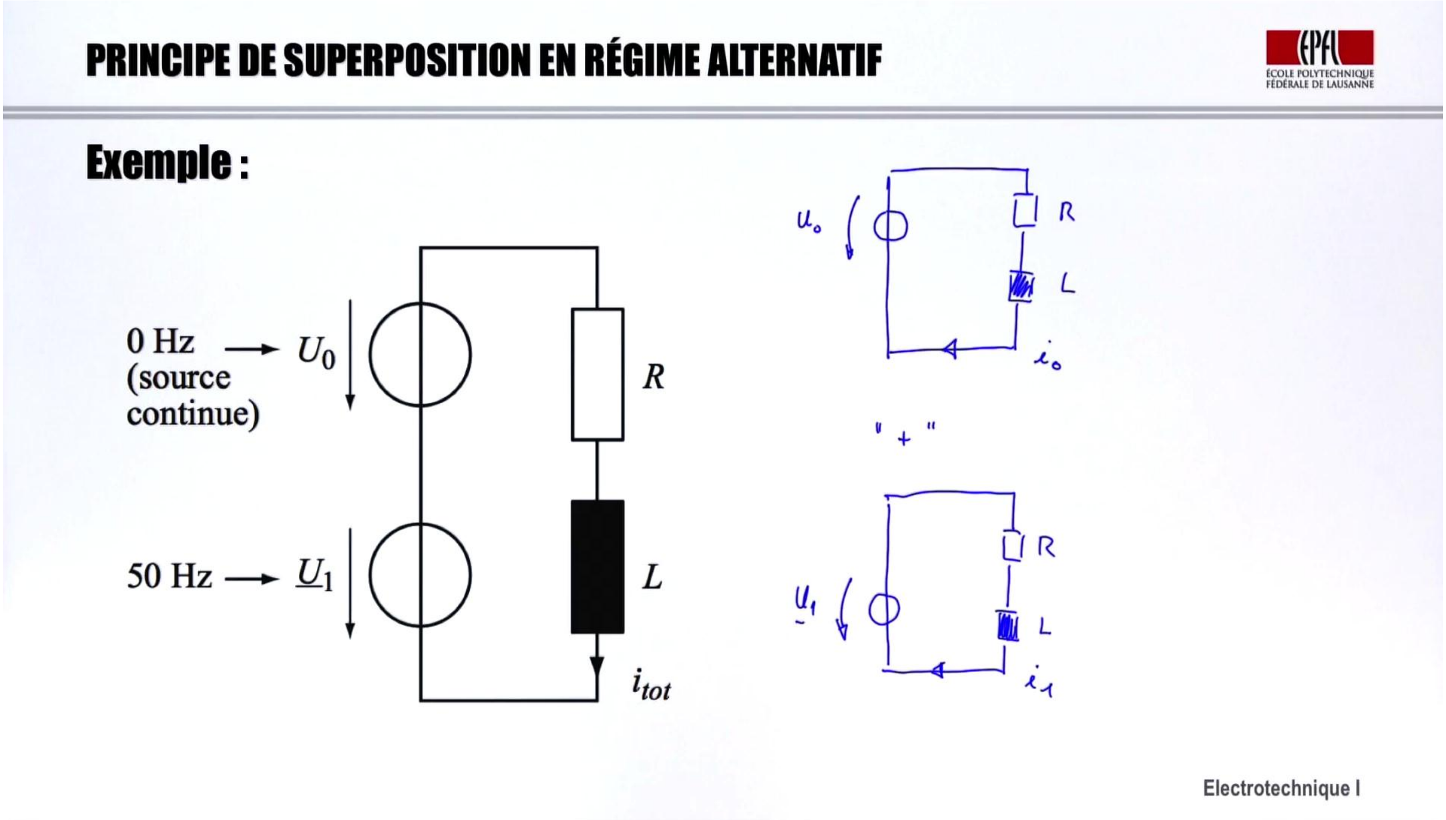
Electrotechnique I

Maintenant, pour avoir le résultat final, on va additionner ces deux résultats partiels, on a que xfinal, la valeur instantanée complexe dans le domaine temporel, est égal à xtot1 + xtot2. Si on développe on a que xfinal, en fonction du temps, est égal à racine de 2 fois xtot1 multiplié par l'exponentielle. Et le deuxième terme pour la deuxième fréquence, racine de 2 fois xtot2, multiplié par l'exponentielle. La somme d'exponentielles ne se prête pas bien pour les additions donc on va transformer ces valeurs instantanées complexes en valeurs instantanées dans le domaine temporel et donc la grandeur finale... sera égale à racine de 2 fois xtot1 multiplié par le sinus de ω1 t plus α1, plus la deuxième contribution, racine de 2 fois xtot2 multiplié par sin (ω2 t + α2).

Notes

Summary

13m 18s

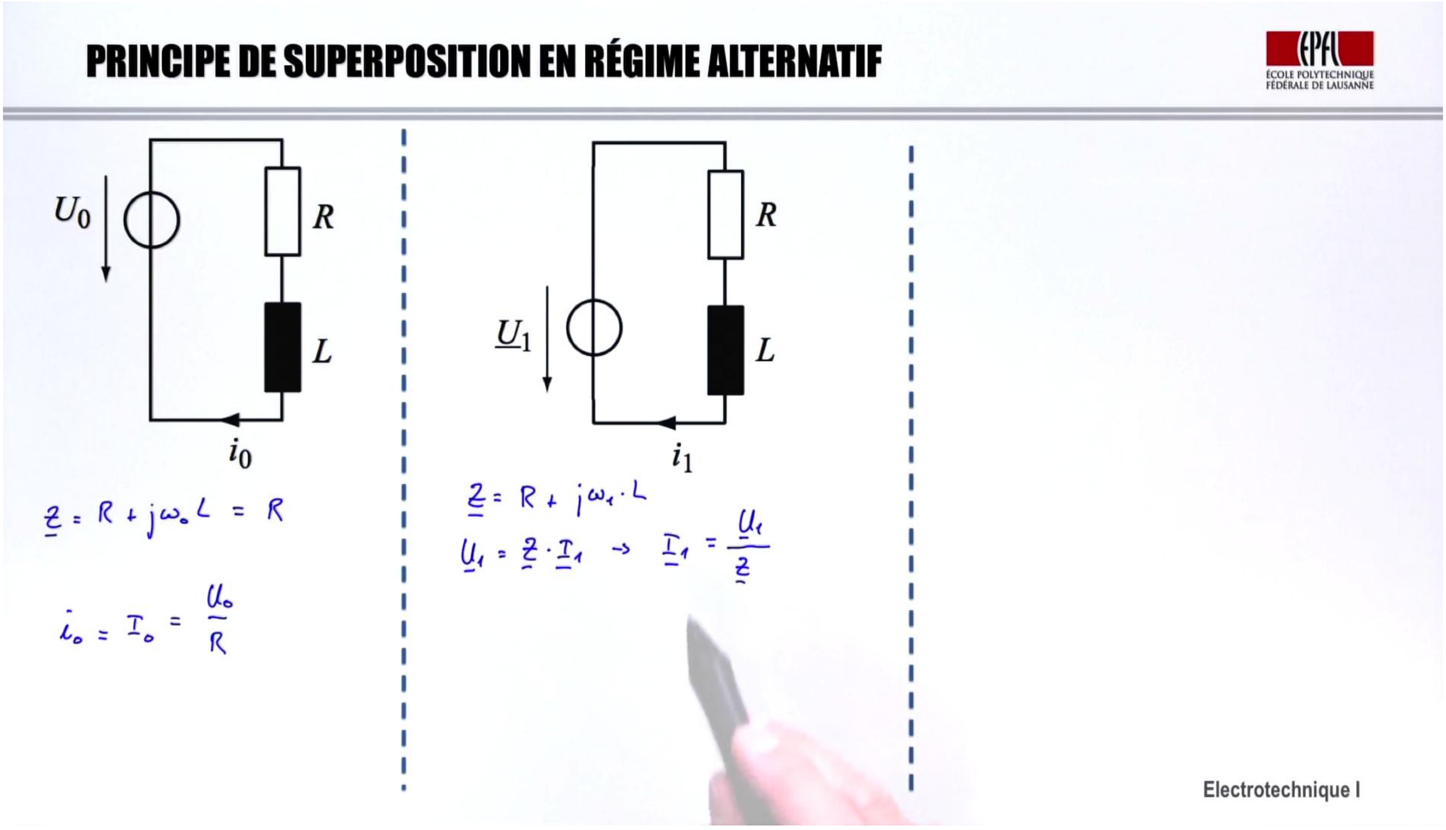


Considérons maintenant ce petit exemple où l'on alimente un circuit RL, on va l'exciter avec deux sources : une première source U0 qui est à une certaine fréquence, ici une fréquence nulle, c'est une source continue, et une deuxième excitation, c'est la tension U1 qui, elle, est à une deuxième fréquence, fréquence de 50Hz. Donc l'excitation est provoquée par ces deux sources sur ce circuit et on cherche la réponse, ici en l'occurrence le courant total. On peut donc décomposer ce circiuit en deux sous-circuits, le premier où l'on considère uniquement la source de tension U0 et on aura le résultat suivant : la source de tension U0, la résistance R, l'inductance L et la contribution à Itot, la contribution de U0 qu'on appelle ici I0. On va additionner la contribution de la deuxième excitation, de la deuxième source qui nous donne ce circuit-là : une tension U1 qui alimente le circuit RL et dont la réponse est le courant I1. Le courant total sera la somme de ces deux contributions I0 et I1.

Notes

Summary

15m 02s

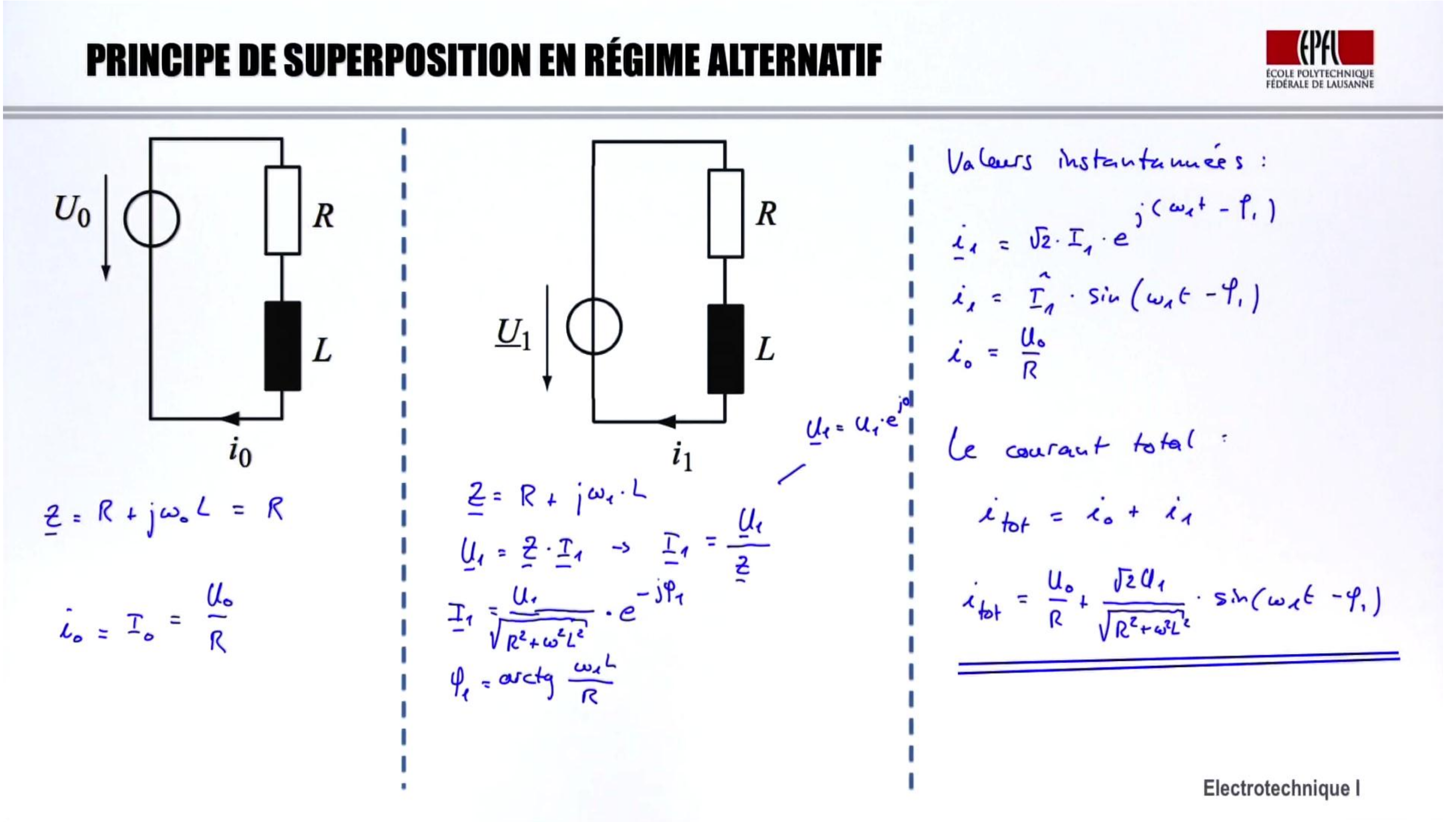


Alors développons maintenant les équations. L'impédance Z de ce circuit est donnée par le terme réel R plus le terme imaginaire j ω0 fois L, et ω0 c'est la fréquence de la source U0 qui est égale à zéro donc ce terme ici s'annule, il nous reste uniquement R. Le courant I0 résultant de ceci est donné par : I0 égal à U divisé par l'impédance totale, donc R. C'est notre premier résultat. En ce qui concerne la deuxième excitation, de nouveau on a l'impédance Z qui est égale à R, la partie réelle, plus la partie ici imaginaire qui vaut j omega1 fois L, cette fois-ci ω1 n'est pas égal à zéro, on va devoir en tenir compte dans les calculs. Et on peut écrire par Kirchhoff que cette tension est égale à la chute de tension sur les deux éléments, on a donc que U1 c'est égal à l'impédance Z, c'est des éléments en série, multiplié par I1. Et donc que I1 c'est le rapport de U1 sur Z. On développe ce terme et on obtient que I1 c'est égal à U1, on divise les normes, divisé par la norme de Z, là par Pythagore on trouve que c'est la racine de $R^2 + X^2$, je remplace directement X par ω carré L, X^2 multiplié par les exponentielles.

Notes

Summary

16m 50s

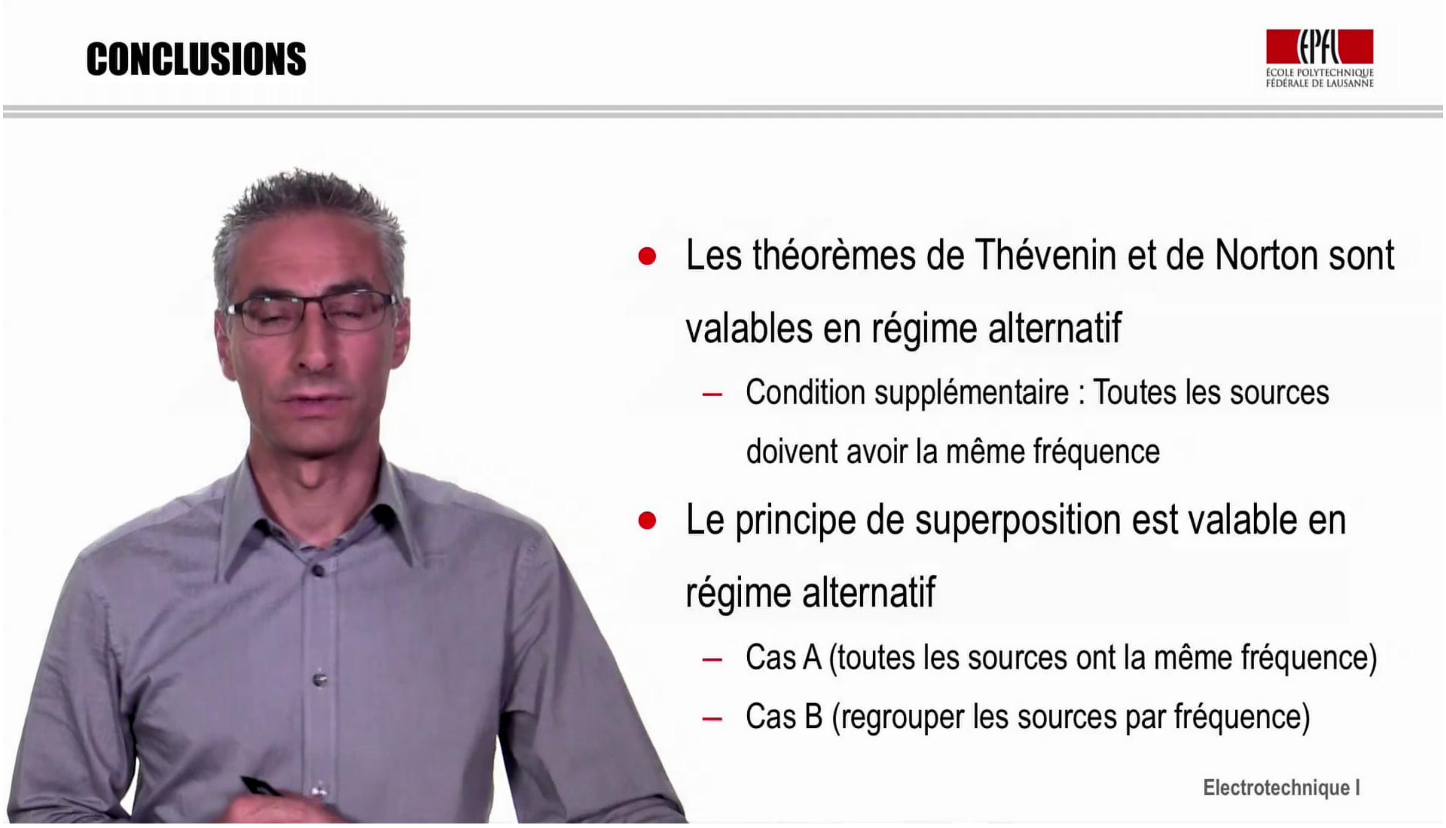


On part du principe que U1 est égal à U1*exp(j0), pas de déphasage par rapport au temps ça fait 0, et donc on a ici l'exponentielle de -jφ1, φ1 étant l'argument ici de l'impédance Z. φ1 est égal à l'arc tangente de la partie imaginaire ω1L/R. En valeur instantanée, on obtient que le courant instantané complexe est égal à la valeur de crête, c'est-à-dire racine de 2 fois la valeur efficace I1 multiplié par exp(jω1t - φ1), que j'exprime dans le domaine temporel, on a donc que I1 c'est égal à la valeur de crête Î1, ce terme-là, multiplié par sin (ω1t - φ1). Le courant de la contribution de l'autre source est égal à I0 et on rappelle ici que c'est U0/R. Le courant total vaut donc la somme des deux contributions... et c'est égal à U0 sur R plus racine de 2 fois U1 divisé par la norme de Z, ça c'est le courant, multiplié par sin (ω1t - φ1). Ceci étant le résultat final.

Notes

Summary

18m 53s



Voilà, on a montré que les théorèmes de Thévenin et de Norton sont valables en régime alternatif mais avec la condition supplémentaire par rapport au régime DC, c'est que toutes les sources doivent avoir la même fréquence. En ce qui concerne le principe de superposition, il est également valable en régime alternatif mais il faut distinguer deux cas : le premier cas où toutes les sources ont la même fréquence, et on peut dans ce cas faire l'addition dans le domaine complexe avec les phaseurs, et le deuxième cas où toutes les sources n'ont pas la même fréquence, il faut regrouper dans ce cas-là les sources par même fréquence et puis, au final, passer par le domaine temporal pour faire l'addition. Merci de votre attention.

Notes

Summary

21m 07s