CIRCUITS EN RÉGIME SINUSOÏDAL

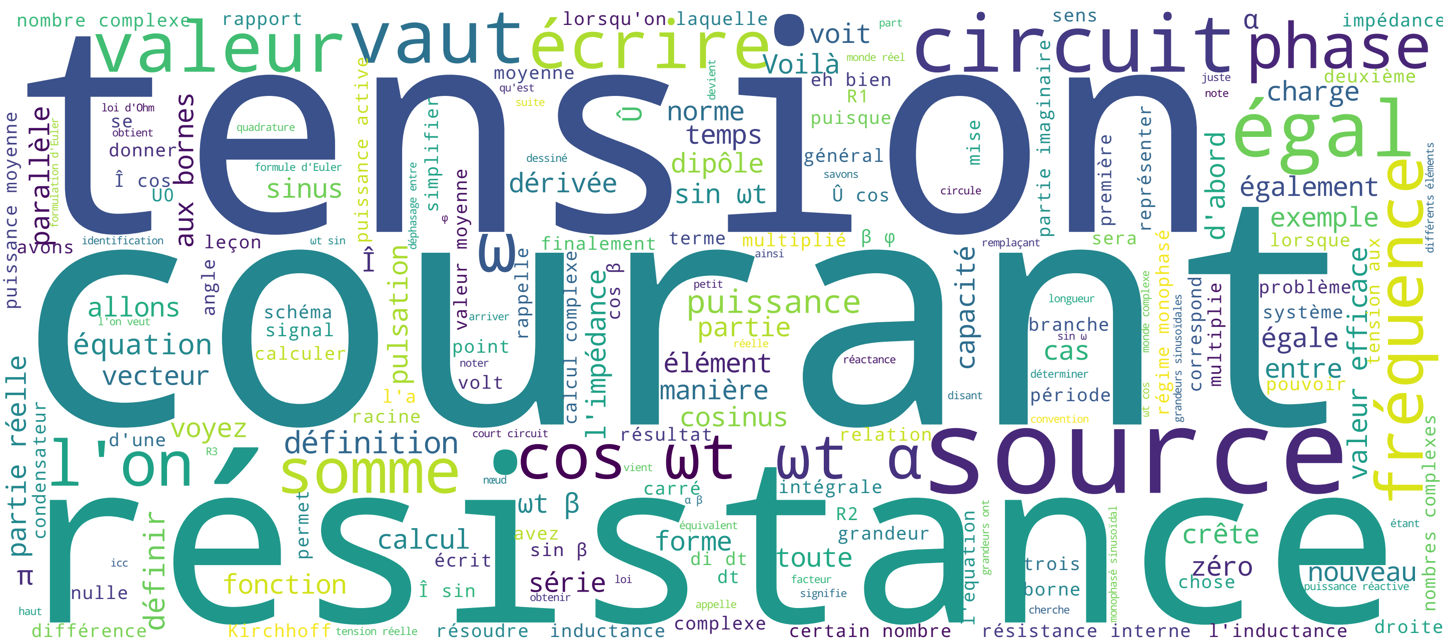
RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

LEÇON 13

Électrotechnique I

Yves PERRIARD & Paolo GERMANO

Laboratoire d'Actionneurs Intégrés



Search MOOC

Video

Bonjour et bienvenue à cette leçon dédiée au régime monophasé sinusoïdal. Nous allons voir dans cette leçon ce qu'est le régime monophasé sinusoïdal, dans quelles circonstances on l'utilise et définir ses grandeurs sinusoïdales dans le temps avec une manière bien spécifique de les écrire. Nous allons également voir comment le calcul complexe va nous aider à résoudre un certain nombre de problèmes, ce qui peut paraître paradoxal d'utiliser des vecteurs pour résoudre des problèmes temporels tel que le régime monophasé sinusoïdal.

Notes

Summary

0m 04s

RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

Régime permanent : établie depuis $t = -\infty$

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$

Electrotechnique I

Par définition, on peut dire que le régime sinusoïdal monophasé, ou le régime permanent, c'est lorsque l'excitation extérieure, courant, tension, sont des fonctions sinusoïdales supposées établies dans le temps depuis l'infini. On a donc des fonctions sinusoïdales ou de la manière identique, co-sinusoïdales puisque c'est la même fonction finalement déphasée de π/2. C'est aussi intéressant de constater que le sinus et le cosinus c'est en fait la seule fonction périodique qui possède une dérivée ou une intégrale analogue. C'est la raison pour laquelle ce régime est très particulier. Elle joue donc un rôle de première importance en électricité et cette prédominance est liée pour une part au fait que la production industrielle d'énergie résulte généralement d'une conversion mécanique/électrique réalisée par la mise en rotation d'un bobinage placé dans un champ d'induction magnétique et la tension induite obtenue est justement sinusoïdale. C'est cette caractéristique qui permet d'assurer une distribution économique et efficace. Nous allons donc voir maintenant, comment définir cette fonction sinusoïdale.

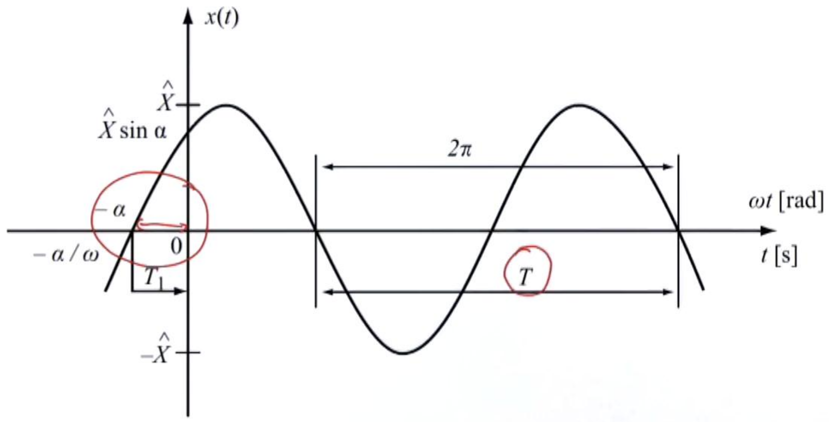
Notes

Summary

0m 36s

GRANDEURS SINUSOÏDALES

Expression analytique et définitions des paramètres



$$X(t) = \hat{X} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right)$$

Amplitude : $\hat{X}$ crête

phase initiale pour $t = 0$

$\equiv$ angle de phase $= \alpha$

Electrotechnique I

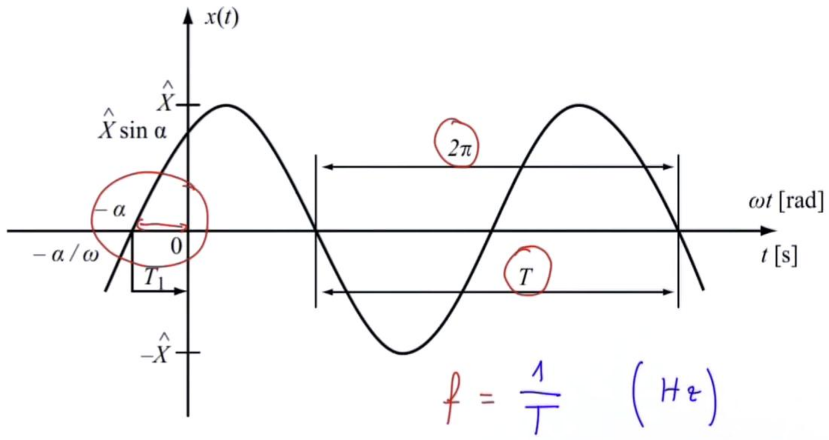
Donc voici un sinus dessiné en fonction du temps, on a pris x(t) en fonction de t, ici, x qui peut symboliser n'importe quelle grandeur de type sinusoïdal. On a défini ici tous les éléments que nous allons devoir maintenant comprendre pour pouvoir utiliser par la suite cette fonction sinusoïdale x(t). Donc si l'on écrit cette fonction, on peut écrire que x(t) vaut xˆ sin ((2π/T) x t + α). Voici l'équation de ce qui est dessiné ici sur le graphique. Alors on va pouvoir maintenant définir un certain nombre de choses. Tout d'abord l'amplitude. L'amplitude de ce signal sinusoïdal est xˆ, ou x dit crête, qui va être l'amplitude maximale de ce sinus, la valeur de crête. On peut définir également la phase initiale. Cette phase initiale pour t, qui est égal à zéro, on l'appelle également angle de phase, et cet angle de phase est identique à angle de phase et ceci vaut α. C'est donc cette grandeur qu'on voit ici qui permet de définir le décalage qu'il y a ici entre t = 0 et - α. On a un autre élément fondamental qui est ici : la période. Cette période T qui correspond, en fait, pour un sinus arithmétique à la fonction 2π, donc on revient au début, et on recommence en fait un cycle, et cette fonction T a comme équation, ou comme lien avec la fréquence, 1 sur T.

Notes

Summary

1m 56s

Expression analytique et définitions des paramètres



$f = \frac{1}{T}$ (Hz)

$X(t) = \hat{X} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right)$

Amplitude : $\hat{X}$ crête

phase initiale pour $t = 0$

$\equiv$ angle de phase $= \alpha$

T = période

Electrotechnique I

Donc cette fréquence va être notée en hertz, bien sûr, et vaut 1 sur la période T. Donc T, par définition, va être appelé la période. Un certain nombre d'autres éléments peuvent maintenant être calculés à partir de ceci.

Notes

Summary

3m 59s

Expression analytique et définitions des paramètres

Définition $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \underbrace{\hat{X}}_{\text{Valeur de crête}} \sin\left(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega} \cdot t + \alpha\right)$$

Tension $u = u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$

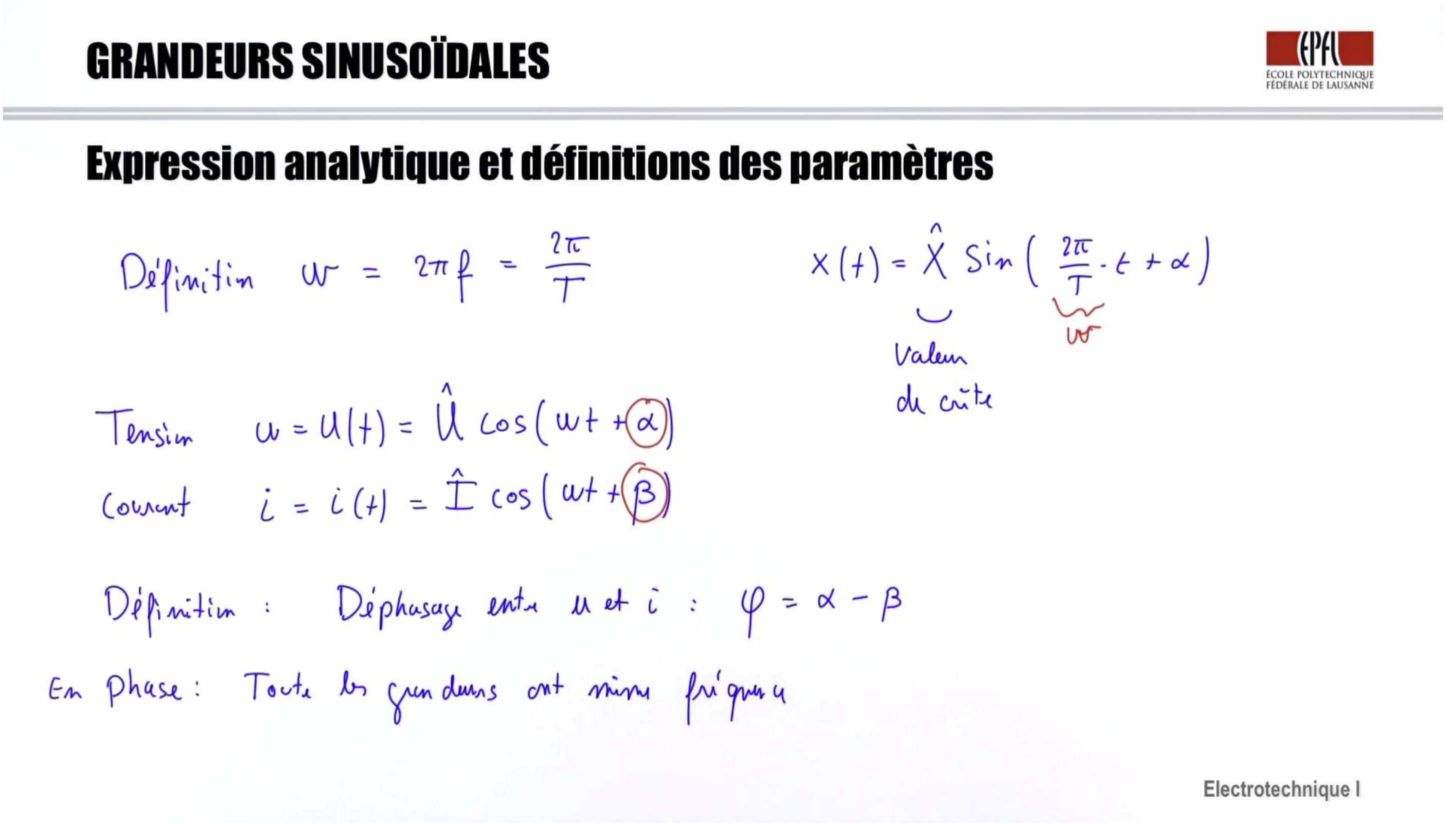
Electrotechnique I

Voilà on peut maintenant définir la pulsation, qu'on va noter petit oméga ω, et cette pulsation est définie comme étant 2π fois la fréquence (f) donc, en somme, 2π divisé par la période (T). C'est pour cela qu'on a vu avant dans l'équation que je vous rappelle x(t) = xˆsin ((2π / T) x t + α). Donc on a ici la pulsation qui apparaît et qui permet en fait de rendre cet argument comme un angle en radians. Donc ceci permet de faire le transfert, ou la transformation, entre le temps et les radians, entre un angle et un temps. Donc comme on l'a dit avant, ceci est la valeur de crête par définition. Et ceci nous permet maintenant d'expliquer, ou d'écrire, pour la première fois une équation de tension ou une équation de courant. Alors pour la tension, on va écrire u(t) est égal à Û, la valeur maximum de la tension, fois le cosinus de (ωt + α). Voilà une équation typique d'une tension sinusoïdale. Et, par convention en électrotechnique, nous allons noter simplement petit u. Donc on ne va plus écrire entre parenthèses de T, nous allons savoir dès maintenant que lorsqu'on écrit une minuscule, cela signifie que l'on cherche, ou que l'on écrit, la fonction du temps (t).

Notes

Summary

4m 18s



Donc ici pour le courant, Î cosinus (ω t + β). On va mettre un autre angle. Alors vous voyez que toutes les fonctions finalement ont la même forme. C'est toujours une valeur de crête, cosinus, et un argument qui dépend du temps, et un angle. Et une autre définition qu'on va pouvoir écrire ici, c'est lorsqu'on a une tension et un courant dans un circuit, on va définir un déphasage entre ces deux grandeurs. Vous voyez que ces deux grandeurs sont, ici, à la même fréquence. Donc toutes ces grandeurs dans le circuit sont à la même fréquence, mais la phase qui est ici, donc α et β peut être différente pour la tension et pour le courant. Donc, par définition, on va définir le déphasage entre la tension et le courant comme étant l'angle phi φ qui est égal à α - β. Une autre définition également, c'est lorsque on dit le mot phase. Le mot phase, ou en phase, peut-être de manière plus précise : en phase, veut dire que toutes les grandeurs ont même fréquence, mais ce n'est pas forcément que la différence de phase est nulle. Si la différence de phase est égale à π/2, alors on va dire que ces phases sont en quadrature. Donc je répète, toutes les grandeurs ont même fréquence, et la différence de phase est nulle.

Notes

Summary

5m 59s

GRANDEURS SINUSOÏDALES

Expression analytique et définitions des paramètres

Définition $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$x(t) = \underbrace{\hat{X}}_{\text{Valeur de crête}} \sin\left(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega} \cdot t + \alpha \right)$

Tension $u = u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$

Courant $i = i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$

Définition : Déphasage entre u et i : $\varphi = \alpha - \beta$

En phase : Toutes les grandeurs ont même fréquence, différence de phase est nulle

En quadrature : " " " " " est $\pm\frac{\pi}{2}$

Electrotechnique I

A ce moment-là, on va dire que le système est en phase, ou on va dire en quadrature, eh bien toutes les grandeurs ont même fréquence mais la différence de phase vaut π/2, plus ou moins.

Notes

Summary

7m 56s

GRANDEURS SINUSOÏDALES

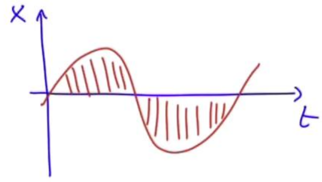
Expression analytique et définitions des paramètres

$x = \hat{X} \cos(\omega t + \alpha)$ → Valeur moyenne :

Définition : $\bar{X} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt$

pour un cos : → intég. sur 2π

$\bar{X} = 0$



Electrotechnique I

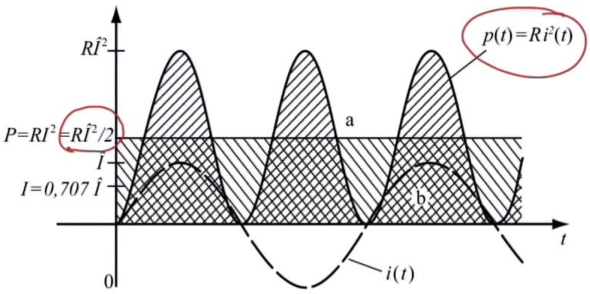
On va définir ici maintenant une notion bien connue en général des étudiants qui est la valeur moyenne. Tout le monde sait faire la moyenne de ses notes pour savoir si l'on passe ou non l'année. On va faire ici la moyenne d'un signal avec sa définition propre de la moyenne. Donc lorsqu'on a une... je répète l'équation x qui vaut xˆ cos (ωt + α) ...si je cherche la valeur moyenne de ce signal. Par définition, la valeur moyenne d'un signal qu'on va noter X majuscule souligné vaut 1/T intégrale de zéro à T de x(t) dt Alors pour un cosinus, si l'on intègre sur 2/π, donc si l'on intègre sur 2π, on va obtenir une valeur moyenne X qui vaut zéro. On peut d'ailleurs s'en rendre compte. Donc si l'on a ici X et le temps t et qu'on a le signal cosinusoïdal ou sinusoïdal qui est comme ceci. On voit bien que l'intégrale - donc la partie ici sous la courbe - va complètement s'annuler donc un cosinus ou un sinus a toujours une valeur moyenne sur sa période complète qui vaut zéro. On voit donc que l'information contenue dans un élément de valeur moyenne n'est pas très intéressante en électrotechnique puisque que cela va toujours être avec des fonctions périodiques zéro. On va donc imaginer une autre manière de nous permettre d'avoir une information surtout une formation qui va être liée, vous allez le voir, à la puissance.

Notes

Summary

8m 14s

Valeurs efficaces de grandeurs sinusoïdales



$p = u \cdot i \rightarrow$ Résistance

$u = R \cdot i$

$$p = \frac{u^2}{R} = \frac{\hat{u}^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{R}$$

$$\bar{P}_R = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{R} \, dt$$

Electrotechnique I

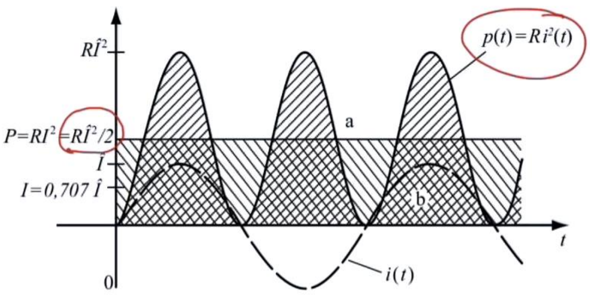
Cela va être la définition de la valeur efficace de grandeurs sinusoïdales. On a ici dessiné la puissance, donc vous voyez le courant tout d'abord, ici, i(t) qui est dessiné. Puis on a imaginé calculer Ri^2. On le sait, la puissance c'est la tension (u) fois le courant (i) Si l'on est dans une résistance, et donc que u vaut R x i, on peut écrire que cette même puissance vaut u^2/R. Et si l'on a P qui vaut u^2/R, on a alors û cosinus carré de ω t + α divisé par R. On a également u^2. Voilà la puissance dite instantanée qui est représentée ici en valeurs que vous avez ici, voilà Ri^2, ou u^2/R : c'est la même chose. Et vous avez ceci qui est strictement positif. On le voit bien ici, la moyenne de cette fonction est non nulle. Elle est ici déterminée comme étant Ri^2 divisé par 2. On peut faire ce calcul pour se convaincre. Calculons la puissance moyenne. Alors puissance moyenne dans une résistance 1/T intégrale de zéro à T de la puissance moyenne alors écrivons u^2 cosinus carré ω t + α sur R dt. Imaginons qu'on ne sache pas comment calculer cette intégrale de cos^2, on n'a pas de table numérique sous la main donc on va dire que, si l'on veut, on décale ce signal de π/2, on obtiendra exactement la même forme, mais au lieu d'avoir un cosinus, j'aurai un sinus, mais c'est la même chose.

Notes

Summary

10m 10s

Valeurs efficaces de grandeurs sinusoïdales



$p = u \cdot i \rightarrow$ Résistance

$u = R \cdot i$

$$p = \frac{u^2}{R} = \frac{\hat{u}^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{R}$$

$$\bar{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{R}\, dt$$

$$\bar{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2 \sin^2(\omega t + \alpha)}{R} \cdot dt$$

$$2\bar{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2}{R}\Big(\underbrace{\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha)}_{1}\Big)dt$$

Electrotechnique I

Donc sin^2 ω t + α sur R dt. Et puis on fait la somme de ces deux parce que là on va obtenir une relation trigonométrique bien connue. Donc 2 x la puissance moyenne nous donne 1/T intégrale de zéro à T de û^2 - je ne l'ai pas noté, désolé c'est une erreur - sur R fois, tout d'abord, sin^2 ω t + α + cos^2 ω t + α et le tout dt. On remarque quoi ? On remarque que cette relation sin^2 + cos^2 ceci donne 1. Et donc cela nous simplifie grandement la vie.

Notes

Summary

12m 21s

Valeurs efficaces de grandeurs sinusoïdales

$$2\bar{P}_R = \frac{\hat{U}^2}{R} \longrightarrow \bar{P}_R = \frac{\hat{U}^2}{2R} \quad (\text{Si } \cos)$$

$$P_R = \frac{U^2}{R} \quad (\text{Si en continu})$$

Définition : Valeur efficace :

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\, dt}$$

Ex : $X(t) = \sin(\omega t + \alpha)$

Electrotechnique I

Donc on continue ainsi, on obtient 2 x la puissance moyenne dans une résistance c'est Û^2 sur R. Et donc on trouve ce que l'on cherche : la moyenne qui vaut Û^2/2R. Donc on voit ici que, à la différence du régime continu, donc cela c'est quand on était en cosinus ou en régime monophasé cosinusoïdal ou sinusoïdal mais si l'on est en continu, nous savons que la puissance dans une résistance c'est U^2/R. On voit donc ici cette différence de notions entre U^2 et U. Finalement, cela ne nous donne pas la même valeur, ou la même notion d'information sur la puissance contenue dans le circuit. Et ceci va nous amener à définir une nouvelle relation que l'on appelle la valeur efficace. Par définition, la valeur efficace d'une grandeur vaut ceci : X racine de 1/T intégrale zéro à T de x^2 d(t). Qu'est-ce qu'on fait ? On fait la moyenne du signal au carré et on reprend la racine. Donc voilà la définition de la valeur efficace. Alors essayons de voir maintenant pour un sinus ou un cosinus ce que ceci peut donner. Alors un exemple : pour la grandeur sinusoïdale, je prends un X(t) qui vaut sin (ω t + α). Et je cherche la valeur efficace.

Notes

Summary

13m 15s

Valeurs efficaces de grandeurs sinusoïdales

$$2\bar{P}_R = \frac{\hat{U}^2}{R} \rightarrow \bar{P}_R = \frac{\hat{U}^2}{2R}$$ (si cos) $= \frac{U^2}{R}$ ← valeur efficace

$$P_R = \frac{U^2}{R}$$ (si en continu)

Définition : Valeur efficace :

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt}$$

Ex : $x(t) = \hat{X}\sin(\omega t + \alpha)$

$$\underline{\underline{X}} = \sqrt{\frac{\hat{X}^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha)\,dt} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$$

valeur efficace de X

$$\hat{U} = U \cdot \sqrt{2}$$

Electrotechnique I

Alors X vaut la racine de Xˆ^2/T - ah oui, il manque encore ici Xˆ évidemment - Xˆ^2/T intégrale de 0 à T sin^2 (ωt + α) dt. Ceci lorsqu'on fait le calcul complet, va nous donner Xˆ/√2. Et par définition, on va donc dire que ceci c'est la valeur efficace de X. Alors on va maintenant reprendre l'exemple qu'on a ici, en haut, et calculer, mais avec cette valeur efficace, cette nouvelle puissance moyenne. Si je remplace maintenant mon Û, je sais que c'est U efficacefois√2 eh bien en remplaçant ici par la valeur efficace, qu'est-ce que je constate ? Je constate qu'en mettant la valeur efficace à la place de la valeur de crête le 2 disparaît grâce aux racines de 2 et finalement cette valeur efficace représente une notion énergétique identique à celle qu'on avait en courant continu. C'est donc la valeur qui va, depuis maintenant, être utilisée systématiquement dans le calcul des puissances, mais pas seulement des puissances, aussi des notations en général, on va noter en général que la valeur efficace du courant vaut U, la valeur du courant vaut I.

Notes

Summary

15m 20s

GRANDEURS SINUSOÏDALES

Valeurs efficaces de grandeurs sinusoïdales

$u = \sqrt{2}\, U \cos(\omega t + \alpha)$ $\qquad \hat{U} = U \cdot \sqrt{2}$ ← facteur pour les grandeurs sinusoïdales

$i = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \beta)$ $\qquad \hat{I} = I \cdot \sqrt{2}$

$U = 230\ V$ est valeur efficace.

$\hat{U} = 230 \cdot \sqrt{2}$

Electrotechnique I

On a donc pour la tension : √2 x U cos (ωt + α) avec Û qui vaut U x √2. On a pour le courant, √2 x I cos (ωt + β) avec Î qui vaut : I x √2. Ce √2 est le facteur pour transformer la valeur efficace en la valeur de crête, mais le facteur pour les grandeurs sinusoïdales. Attention, si l'on a un signal qui est carré ou triangulaire ou encore autre, mais non sinusoïdal, eh bien ce facteur ne sera plus égal à √2, mais à une autre valeur. Dans un réseau conventionnel que l'on a dans un ménage ou dans une industrie, on dit en général que la valeur du réseau vaut 230 volts. Que signifie ce U = 230 volts ? Ceci est la valeur efficace. Cela veut dire que le signal maximum qui circule dans la phase que l'on branche sur le réseau n'est pas de 230 volts en crête, mais il est de 230 x √2 donc presque 300 volts en valeur crête. Donc le Û vaut en fait : 230 x √2 dans un réseau conventionnel.

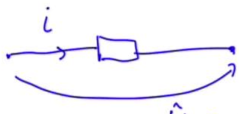
Notes

Summary

17m 13s

GRANDEURS SINUSOÏDALES

Cas de la résistance



$u = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$

$u = R \cdot i$

$\hat{U} \cos(\omega t + \alpha) = R \, \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$

il résulte :

$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$

$\alpha = \beta$ Tension et courant sont en phase

Electrotechnique I

On va prendre maintenant chaque élément connu, la résistance, l'inductance et la capacité, pour déterminer ce qu'il se passe lorsque une résistance est traversée par un courant-tension sinusoïdal; de même pour l'inductance, de même pour la capacité. Alors tout d'abord, pour la résistance, imaginons une résistance sur laquelle on va ici brancher une tension U = Û cos (ωt + α). Entre ces deux bornes, va circuler alors un courant i à l'intérieur de la résistance. La loi d'Ohm : U = R x i est toujours vraie. Donc on peut écrire cette loi d'Ohm en remplaçant maintenant les différents éléments. Tout d'abord, on a Û qui vaut cos (ωt + α) = R x... Le courant doit être de même nature et de même fréquence, donc on peut déjà écrire Î cos (ωt + β) Il y a des inconnues ici, ce sont le β et le Î, si, en fait, on connaît le Û et α. Alors il résulte de ceci, que Û vaut R x Î en faisant l'identification, on voit que c'est la seule manière de pouvoir résoudre ce problème Et également que α est égal à β. Cela veut dire que la résistance ne modifie pas l'angle de la phase de la tension. Autrement dit, tension et courant sont en phase dans ce cas de figure de la résistance. Et ce sera bien pratique dans le futur de toujours se souvenir que la résistance ne modifie pas l'angle de phase.

Notes

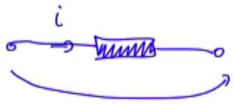
Summary

19m 02s

GRANDEURS SINUSOÏDALES

Cas de l'inductance

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$



$$u = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\hat{U} \cos(\omega t + \alpha) = -\omega L \hat{I} \sin(\omega t + \beta)$$

$$= \omega L \hat{I} \cos\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.\right\} \quad \hat{U} = \omega L \hat{I} \qquad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$$

Tension et courant en quadrature.

Electrotechnique I

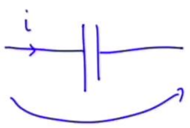
Maintenant le cas de l'inductance. Donc nous savons que la loi qui lie la tension et le courant dans une inductance, c'est la variation du courant par rapport au temps multiplié par L, qui donne la tension aux bornes. Donc si on fait de nouveau un schéma. On a donc ici notre inductance. Ici aux bornes nous allons mettre U = Û cos (ωt + α). Qu'en est-il du courant qui circule ici dans cette inductance ? Alors on peut écrire de nouveau cette équation. Tout d'abord l'équation de tension : Û cos (ωt + α) = - alors ici on a une dérivée, la dérivée du cosinus qui va donner un sinus avec la dérivée interne, le ω qui vient devant, et un signe moins - donc on a moins ω L x Î sin (ωt + β) Maintenant, on va remettre le sinus en cosinus pour avoir une égalité des deux côtés, et donc on transforme ce - ω sin (ωt) par un + ω cosinus déphasé de π/2. Donc on avoir égal, ici, à ω L Î cos (ωt + β + π/2) En faisant de nouveau l'identification de part et d'autre, on arrive aux conclusions suivantes. Tout d'abord, Û est égal à ω L Î. On a un rapport ici qui va dépendre de la pulsation. Plus la pulsation est grande, plus cette tension varie par rapport au courant. Enfin, α est égal à β + π/2. En somme, le courant et la tension vont être en quadrature. Donc un retard du courant d'un angle de π/2 sur la tension. Donc tension et courant en quadrature.

Notes

Summary

21m 05s

Cas du condensateur



$u = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$

$$i = C\frac{du}{dt}$$

$$\hat{I}\cos(\omega t + \beta) = -\omega C \hat{U}\sin(\omega t + \alpha)$$
$$= \omega C \hat{U}\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{(\omega C)}$$

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$$ Tension et courant en quadrature.

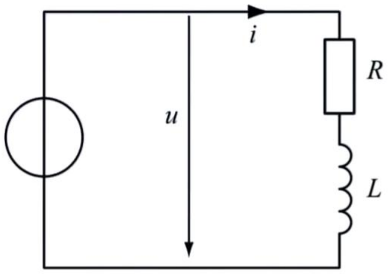
Enfin, le cas du condensateur. Alors ici, on redessine le schéma. On a ici aux bornes, une tension Û cos (ωt + α). On cherche le courant qui va circuler dans cette capacité, ce condensateur. La relation que l'on connaît, c'est que la variation de la tension par rapport au temps multiplié par la capacité va nous donner le courant. Alors on écrit ici, cette équation en fonction du courant. Tout d'abord Î, qui va forcément être un cosinus, ω t + β est égal à la dérivée cette fois-ci, de la tension. Alors on retrouve les mêmes ingrédients qu'avant donc finalement ω C Û sin (ωt + α). On reconvertit ce sinus en cosinus et on obtient ω C Û cos (ωt + α + π/2) Il en résulte maintenant que Û au final vaut Î/ω C, et que α est égal à β moins π/2. On a donc ici également tension et courant en quadrature. Ici le courant à une avance de π/2 sur la tension.

Notes

Summary

23m 19s

Cas d'une inductance et d'un résistance en série



$$u = R \cdot i + L\frac{di}{dt}$$

$$\hat{U}\cos(\omega t+\alpha) = R\hat{I}\cos(\omega t+\beta) - \omega L\hat{I}\sin(\omega t+\beta)$$

Alors imaginons maintenant, le cas d'un problème plus complexe où l'on a à la fois R et L qui vont être dans un même circuit. Qu'est-ce que l'on peut écrire ? Comment peut-on s'en sortir de cette manière-là ? On va se rendre compte que si l'on reste avec notre simple calcul de Kirchhoff comme on l'a fait jusqu'à maintenant, le système va devenir très compliqué. Alors voyez plutôt. Si l'on veut écrire ici l'équation de Kirchhoff, des éléments liés à cette tension, on peut écrire que U est égal tout d'abord à R x i + - au passage dans l'inductance - L di/dt En remplaçant maintenant les différents éléments, on obtient Û cos (ωt + α) = là on a déjà une première relation simple, R Î cos (ωt + β). Donc on fait toujours l'hypothèse que comme on est dans le même circuit, les pulsations doivent être toutes les mêmes. Donc notre inconnue, il y en a deux pour le courant, c'est l'amplitude et la phase β plus ici L di/dt qui devient en fait un moins, puisque le cosinus devient un sinus : ω L Î sin (ωt + β). Alors vous voyez ici, cela devient compliqué. On ne peut plus faire une identification en disant à gauche ou à droite de l'équation, puisqu'on a ici trois termes et non plus deux termes.

Notes

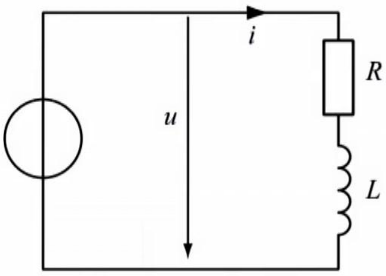
Summary

24m 59s

CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cas d'une inductance et d'un résistance en série



$$u = R \cdot i + L\frac{di}{dt}$$

$$\hat{U}\cos(\omega t+\alpha) = R\hat{I}\cos(\omega t+\beta) - \omega L\hat{I}\sin(\omega t+\beta)$$

$$\hat{U}\left(\cos\omega t \cdot \cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha\right) =$$

$$\hat{I}\left(R\cos\omega t\cos\beta - R\sin\omega t\sin\beta - \omega L\sin\omega t\cos\beta - \omega L\cos\omega t\sin\beta\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{U}\cos\alpha &= R\hat{I}\cos\beta - \omega L\hat{I}\sin\beta\\ \hat{U}\sin\alpha &= R\hat{I}\sin\beta + \omega L\hat{I}\cos\beta\end{aligned}\right\}$$

Electrotechnique I

Il faut donc pour réussir à simplifier cette équation, il faut décomposer les fonctions sinus et cosinus en sommes. Alors, il vient la chose suivante : on a Û qui multiplie le cos (ωt) cos (α) - sin (ωt) sin (α) et ceci est égal à Î qui multiplie R cos (ωt) cos (β) - R sin (ωt) sin (β) - ωL sin (ωt) cos (β) - ωL cos (ωt) sin (β) Vous voyez que l'on arrive à des équations extrêmement simples, dites également transcendantales, et donc qui sont tout sauf faciles à utiliser, alors même que notre circuit est « juste », je dirais, un circuit RL, donc relativement simple. S'il faut faire tout ce travail pour juste RL, on va voir que ça va nous compliquer la vie sérieusement. Donc maintenant on peut faire une identification donc on peut écrire que Û cosinus (α) est égal à R Î cos (β) - ω L Î sin (β). Et puis on a l'autre : Û sin (α) est égal à R Î sin (β) + ω L Î cos (β). Voilà ces deux équations qu'on peut écrire par identification et puis alors maintenant, en faisant la somme des carrés des équations qui sont ici, eh bien on va pouvoir, en regroupant, trouver les termes suivants, mais après beaucoup de calculs.

Notes

Summary

26m 35s

CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cas d'une inductance et d'un résistance en série

$$\hat{U} = \hat{I}\sqrt{R^2+\omega^2 L^2} \qquad \alpha = \beta + \varphi$$

La formule d'Euler : $\underline{X} = \hat{X} e^{j\theta} = \hat{X}(\underbrace{\cos\theta}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{j\sin\theta}_{\text{Partie imaginaire.}})$

Electrotechnique I

Il vient alors ceci : Û = Î √(R^2 + ω^2 L^2). Donc vous voyez que c'est relativement complexe pour arriver à une chose pareille. Et on va arriver au final à α = β + φ. Mais je vous passe même ici les calculs pour y arriver. Donc cette lourdeur de résultat, fait que l'on va s'orienter maintenant vers une autre manière de faire. Et on va à impliquer maintenant le calcul complexe dans nos différentes résolutions de circuit. Alors je vous rappelle la formulation, ou la formule d'Euler, pour écrire un nombre quelconque, alors je vais écrire ici X qui vaut Xˆ e^j θ et ceci, c'est ce que la formule d'Euler nous dit, vaut Xˆ cos (θ) + j sin (θ). Alors vous voyez que dans nos différentes relations sinusoïdales, que ce soit le courant ou la tension, on a en fait cette forme. On a une partie de ce vecteur, ici c'est un vecteur puisqu'on a la partie réelle et la partie imaginaire. Donc ça c'est la partie réelle, et ça c'est la partie imaginaire. Et donc, dans notre vie de tous les jours on a des sinus ou des cosinus, c'est donc soit la partie réelle soit la partie imaginaire de ce vecteur ou de cette relation, que je note X pour vous montrer ici que c'est un vecteur ou un nombre complexe.

Notes

Summary

28m 37s

CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cas d'une inductance et d'un résistance en série

$$\hat{U} = \hat{I}\sqrt{R^2+\omega^2 L^2} \qquad \alpha = \beta + \varphi$$

La formule d'Euler : $\underline{x} = \hat{X} e^{j\theta} = \hat{X}\left(\underbrace{\cos\theta}_{\text{Partie réelle}} + j\,\underbrace{\sin\theta}_{\text{Partie imaginaire}}\right)$

Electrotechnique I

Le grand avantage d'une telle chose, c'est qu'en notant ou en prenant la formule d'Euler, on a ici des dérivées - si l'on fait la dérivée de ce nombre complexe - qui prennent la même forme que l'élément de départ. Et de même pour la primitive d'une intégrale, on a la même forme. C'est toujours une exponentielle. Et c'est ceci qui paradoxalement va simplifier les calculs lorsque l'on va essayer de résoudre un circuit en régime monophasé alternatif, c'est de passer par l'écriture des complexes.

Notes

Summary

30m 44s

CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ

Cas d'une inductance et d'un résistance en série

$$u = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha) \longrightarrow \underline{u} = \hat{U}\, e^{j(\omega t + \alpha)}$$

Avec : $u = \mathrm{Re}\{\underline{u}\}$

calcul

Electrotechnique I

Alors maintenant, l'idée est de faire ceci : notre tension U écrite Û cos (ωt + α). Cette tension nous allons décider de l'écrire autrement. On va l'écrire U souligné. On va fabriquer un nombre complexe avec cette relation. C'est donc purement conceptuel ce que nous sommes en train de faire, et qui va nous permettre de résoudre les problèmes de calcul compliqués que nous avions précédemment. Donc en écrivant sur la formulation d'Euler U = Û e^j (ωt + α). Et en somme, on définit que notre petit u, le monde réel en fonction du temps, c'est la partie réelle de ce nombre complexe que l'on vient de fabriquer, puisque c'est uniquement la partie du cosinus et pas du sinus. Alors juste maintenant, comme exemple, essayons de refaire exactement la même chose pour notre exemple RL. Puisqu'une fois qu'on aura terminé tous nos calculs, mais dans le monde complexe, nous pourrons revenir dans le monde réel, en disant que U ou I sont les parties réelles des nombres complexes.

Notes

Summary

31m 20s

CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ

Cas d'une inductance et d'un résistance en série

$$u \longrightarrow \underline{u} = \hat{U}\, e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$i \longrightarrow \underline{i} = \hat{I}\, e^{j(\omega t + \beta)}$$

$$u = R \cdot i + L \frac{di}{dt} \longrightarrow \underline{u} = R \cdot \underline{i} + j\omega L \cdot \underline{i}$$

$$\underline{u} = (R + j\omega L)\,\underline{i} = \underline{Z} \cdot \underline{i} \qquad R + j\omega L = \underline{Z} = Z\, e^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

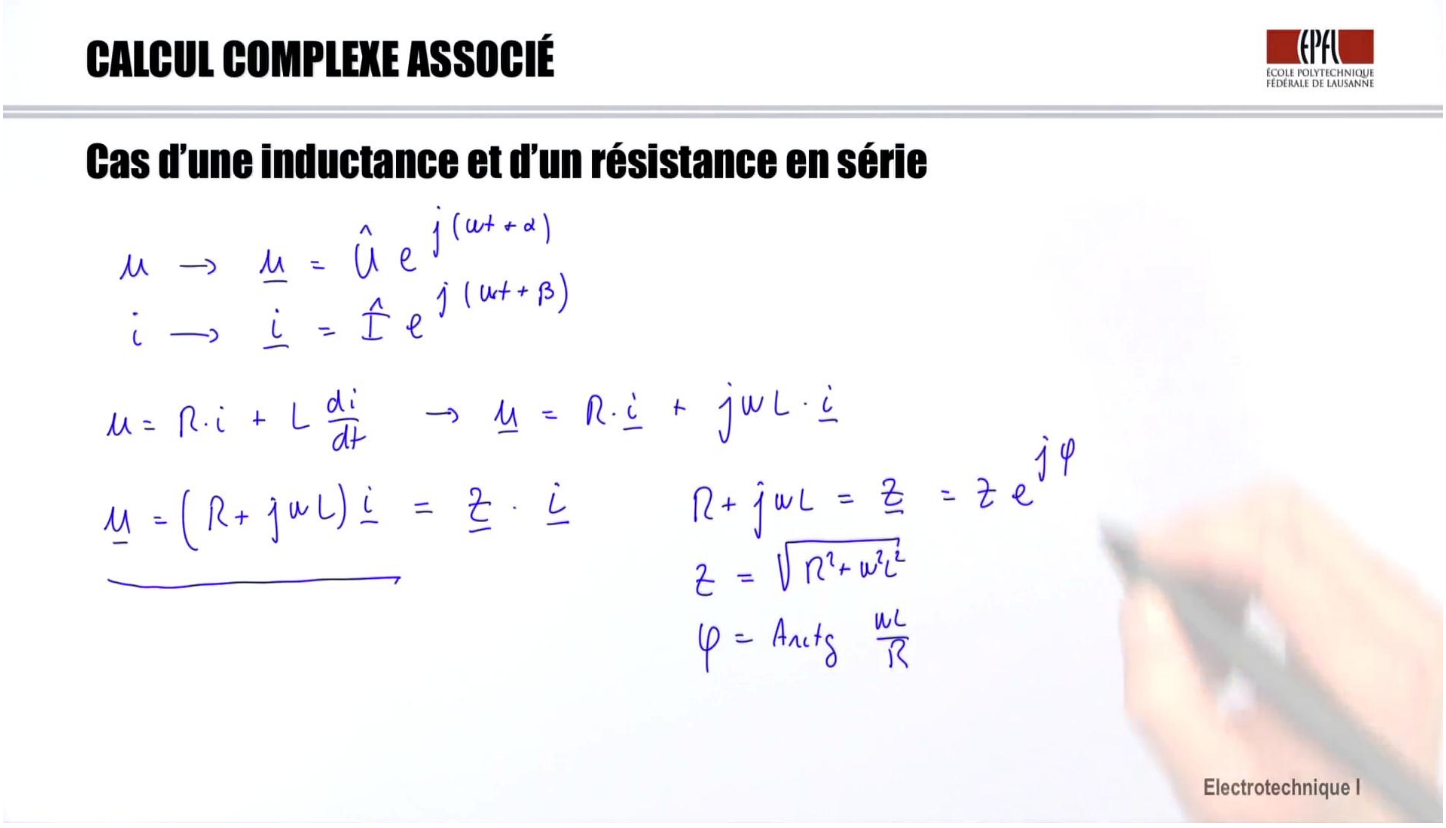
Electrotechnique I

Alors nous allons donc avoir U qui devient U 611 00:32:50,766 --> 00:32:56,702 = Û e^j (ωt + α). Le courant va prendre également une forme complexe : î e^j (ωt + β). Donc on fabrique des nombres complexes, on travaille dans le monde complexe. Notre équation U = R x i + L di/dt devient U = R i [+ L di/dt] + j ω L i. Vous voyez, on a ici en haut le courant i qui est noté en formulation d'Euler. Î e^j (ωt + β). Lorsqu'on fait la dérivée, on a le j ω qui vient devant, et qui multiplie simplement de nouveau le i. Donc le fait de dériver un nombre complexe revient à le multiplier par j ω. On le réécrira plus tard, pour résumer. Donc on peut écrire que ce U maintenant et on met ensemble, c'est R + j ω L fois le courant. Et on va appeler ce nouveau nombre complexe R + j ω L, on va l'appeler Z si vous le voulez bien. On va donc avoir U = Z x i. Dans ce Z, on peut dire que R + j ω L c'est donc ce Z que je viens de fabriquer sous la notation, ou formulation, d'Euler, c'est Z e^j et on va définir un angle : φ. Donc Z, la norme, ce sera la racine de R^2 + ω^2 L^2 puisque ici on a la forme a + bj. Pour chercher la norme c'est a^2 + b^2 racine. Et puis l'angle φ c'est l'arc tangente de ωL/R.

Notes

Summary

32m 45s

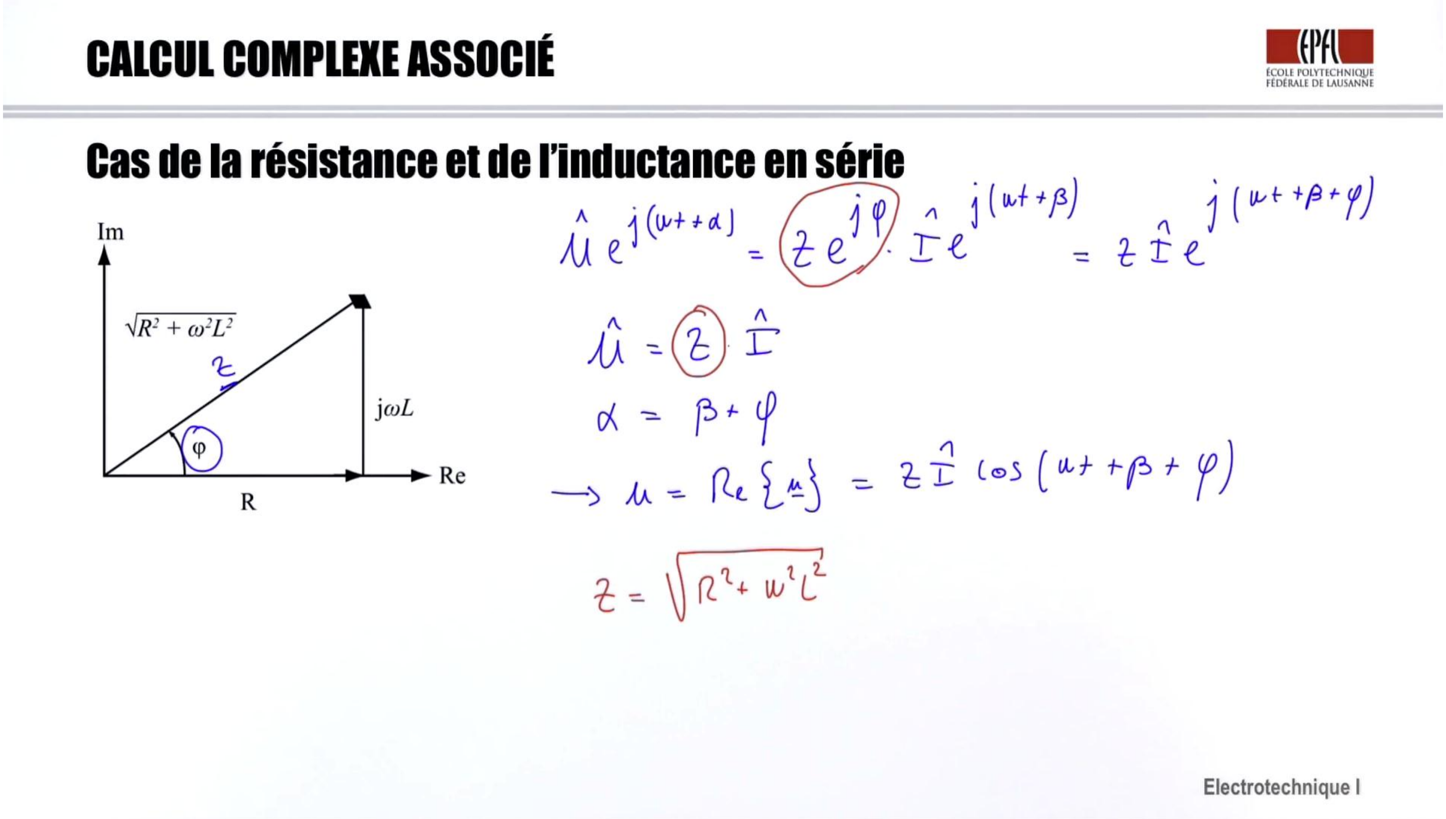


Alors on peut maintenant écrire ce qu'on a ici comme résumé, pour pouvoir remplacer dans l'équation du tout début ici, et également dans l'équation que je viens d'écrire. Ici, on va remplacer U et I par leurs fonctions.

Notes

Summary

34m 56s

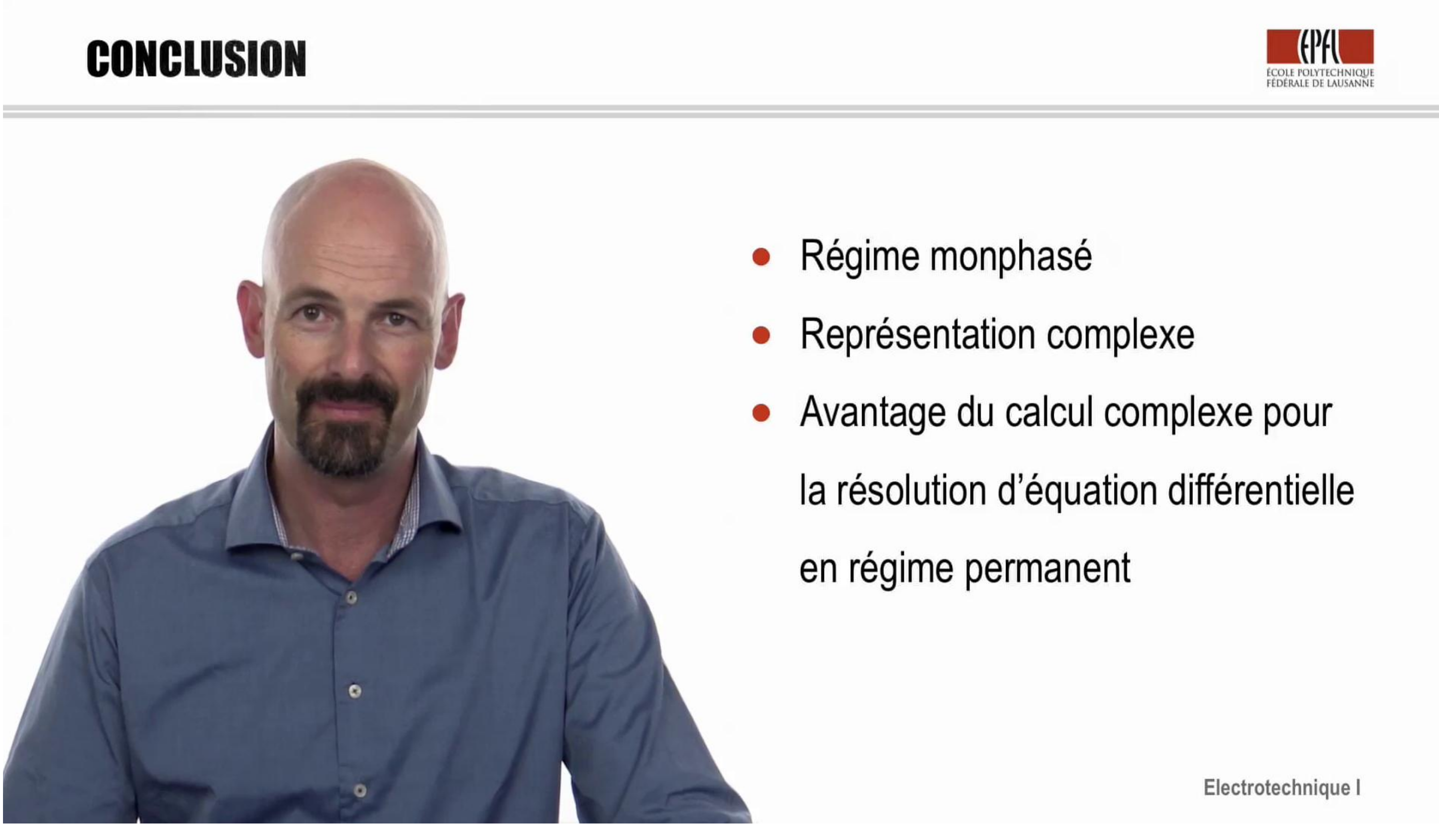


Ceci devient : on a donc Û e^j (ωt + α) d'un côté, Z e^j φ qui multiplie le courant Î e^j (ωt + β) et ceci peut se simplifier en Z Î e^j (ωt + β + φ) puisque la multiplication des deux nombres complexes ici va faire l'addition, ou la somme, des arguments. On arrive à la conclusion suivante : Û = Z Î on a trouvé donc notre I si l'on avait le U comme donnée, α = β + φ. Finalement, ce qui nous intéresse, parce que ce ne sont que des nombres complexes, on peut revenir dans le monde réel en disant que U c'est la partie réelle de U, donc c'est Z Î cos (ωt + β + φ). Et vous voyez que l'on a extrêmement simplifié le calcul de notre RL, en trouvant ici directement, la réponse que nous souhaitions. On peut représenter aussi, c'est intéressant, l'impédance Z. Ce Z qui est ici, qui est encore écrit ici, mais en nombre complexe. Ce Z qui, je vous le rappelle, a comme valeur R^2 + ω^2 L^2, on peut le représenter dans le plan complexe, et les composantes réelles et imaginaires forment alors un vecteur, dont la longueur est égale au module de l'impédance Z. Donc on va noter ici que cette longueur c'est Z. Ici c'est le vecteur Z. La longueur c'est donc le module de l'impédance et l'angle φ, qui est ici, c'est l'arc tangente de ω L/R, qui va être la définition du déphasage également entre tension et courant, comme on le voit ici. Ce φ est en fait le déphasage entre la tension et le courant.

Notes

Summary

35m 18s



Voilà en conclusion donc on a vu le régime monophasé, sa définition, comment représenter dans le monde complexe ces vecteurs qui vont nous aider, finalement paradoxalement, à simplifier les calculs. Donc les avantages du calcul complexe pour cette résolution d'équation différentielle en régime permanent qui sinon devient relativement lourde si l'on veut rester dans le monde purement réel. Merci.

Notes

Summary

37m 46s