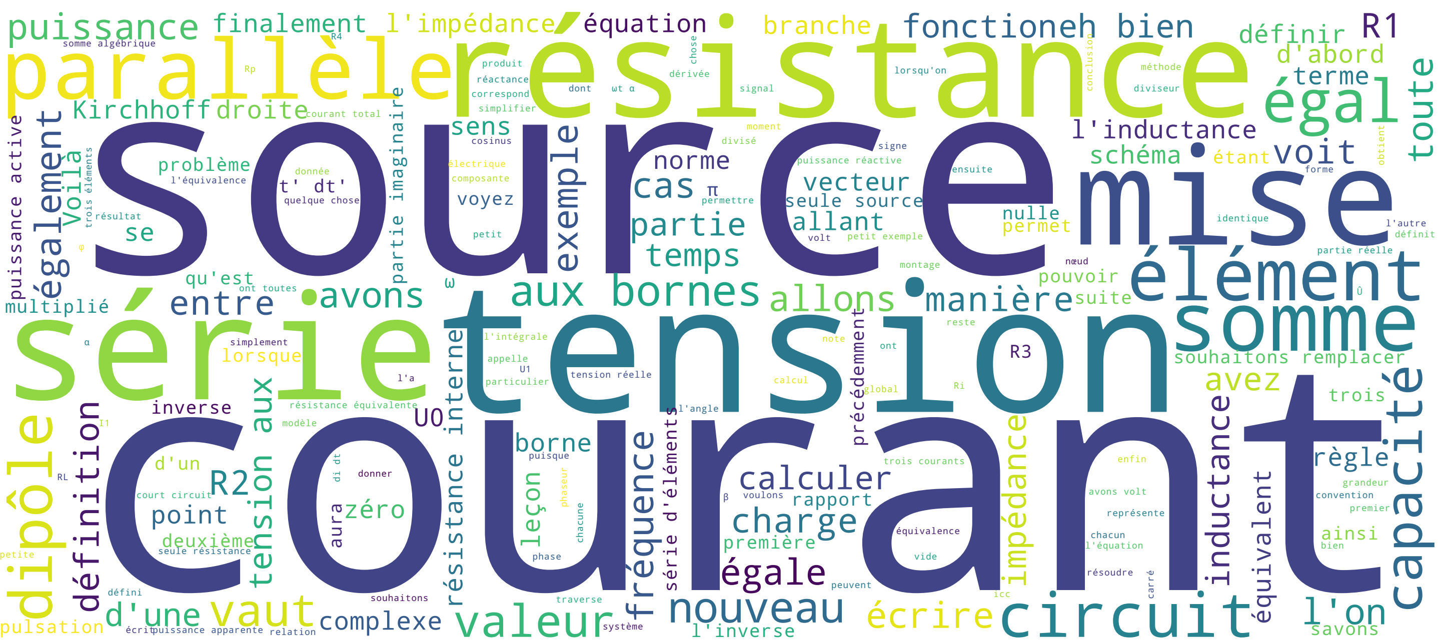
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ANALYSE ET RÉSOLUTION DE CIRCUITS LINÉAIRE

COMBINAISON SIMPLES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRE

LEÇON 5

Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Paolo GERMANO
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés



Search MOOC

Video

EPFL

Bonjour et bienvenue à cette leçon dédiée à l'analyse et la résolution de circuits linéaires. Nous allons voir, dans cette leçon, la combinaison simple d'éléments linéaires. Tout d'abord ce qu'est un élément, ou des éléments, en série comment on résout ces éléments en série pour la résistance, pour la capacité, pour l'inductance. Nous ferons de même pour ces éléments en parallèle. Et enfin nous ferons une conclusion de cette leçon et de ce chapitre.

Notes

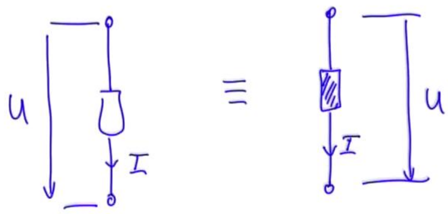
Summary

0m 03s

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Définition : Dipôles équivalents

Deux dipôles qui ont en tout temps le même courant lorsqu'ils sont soumis à la même tension



Electrotechnique I

Avant de commencer par cette combinaison en séries ou en parallèle, j'aimerais pouvoir définir ici, ce qu'est un dipôle équivalent : Deux dipôles équivalent ont en tout temps, par définition, le même courant lorsqu'ils sont soumis à la même tension. Il est important de définir ceci pour nous permettre par la suite de rendre équivalent les objets dans un modèle de Kirchhoff. Par exemple on aura ici un élément, nous savons ensemble que c'est une résistance, mais admettons que nous ne le sachions pas, un élément différent, que je note comme ceci; eh bien ces deux éléments, nous pourrons dire qu'ils sont équivalents si soumis à une tension u et de la même manière pour notre premier dipôle u, nous avons un courant I qui est identique des deux côtés. A ce moment-là, nous dirons que ces dipôles sont équivalents.

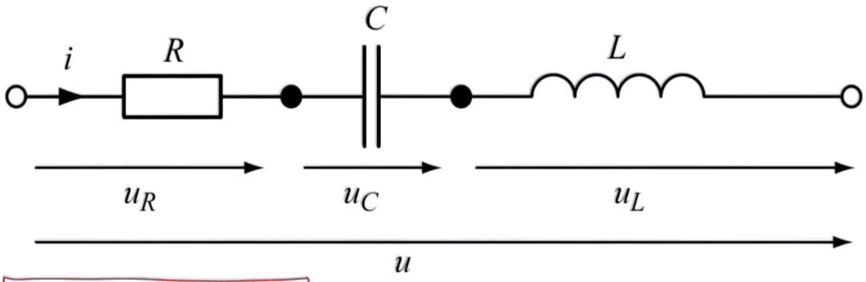
Notes

Summary

0m 28s

ÉLÉMENTS EN SÉRIE

Propriété fondamentale



$\boxed{i = i_R = i_C = i_L}$ $\qquad$ $u = u_R + u_C + u_L$

Electrotechnique I

Maintenant, la mise en série d'éléments. Il est fondamental de bien comprendre, dans un circuit plus complexe, les éléments qui peuvent être mis en série, qui sont en série, ou les éléments qui sont en parallèle pour pouvoir, par la suite, réduire le circuit, et savoir comment les réduire pour ne pas créer plus de problèmes que l'on en résout. Vous avez ici la propriété fondamentale de la mise en série d'éléments. Nous avons sur cette ligne, dans ce modèle, mis une résistance, une capacité et une inductance. La définition fondamentale de la mise en série, c'est de pouvoir dire que les courants, les trois courants de ces trois éléments, sont le même, ou sont identiques. Donc la mise en série d'éléments, veut dire que le courant parcouru est le même à travers chacun de ces éléments. Ainsi alors, une autre propriété découlant des équations de Kirchhoff, c'est que si ces éléments sont en série et parcourus par le même courant, la somme des tensions, qui est ici entre la résistance, la capacité et l'inductance cette somme de tensions est également la tension aux bornes du dipôle complet, entre cette partie du dipôle et cette partie du dipôle.

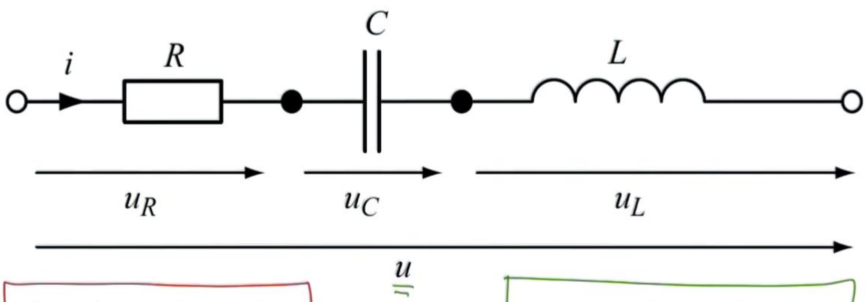
Notes

Summary

1m 28s

ÉLÉMENTS EN SÉRIE

Propriété fondamentale



$\boxed{i = i_R = i_C = i_L}$ $\boxed{u = u_R + u_C + u_L}$

On aura donc la tension u ici présente, qui vaut uR + uC + uL Maintenant qu'on a défini ce qu'est la mise en série d'éléments, nous allons nous concentrer sur les trois éléments R, L, C pour voir de manière séparée, finalement, ce que, pour chacun de ces éléments, cela veut dire.

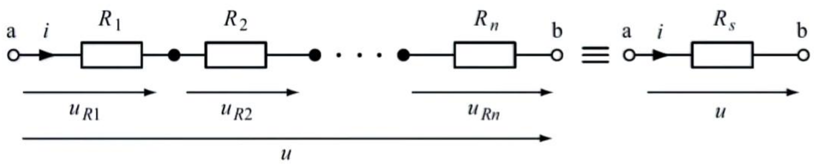
Notes

Summary

2m 48s

ÉLÉMENTS EN SÉRIE

Mise en série de résistances



$$u = \sum_{k=1}^{n} u_{R_k} = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot i = R_s\, i \quad \Rightarrow \quad R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

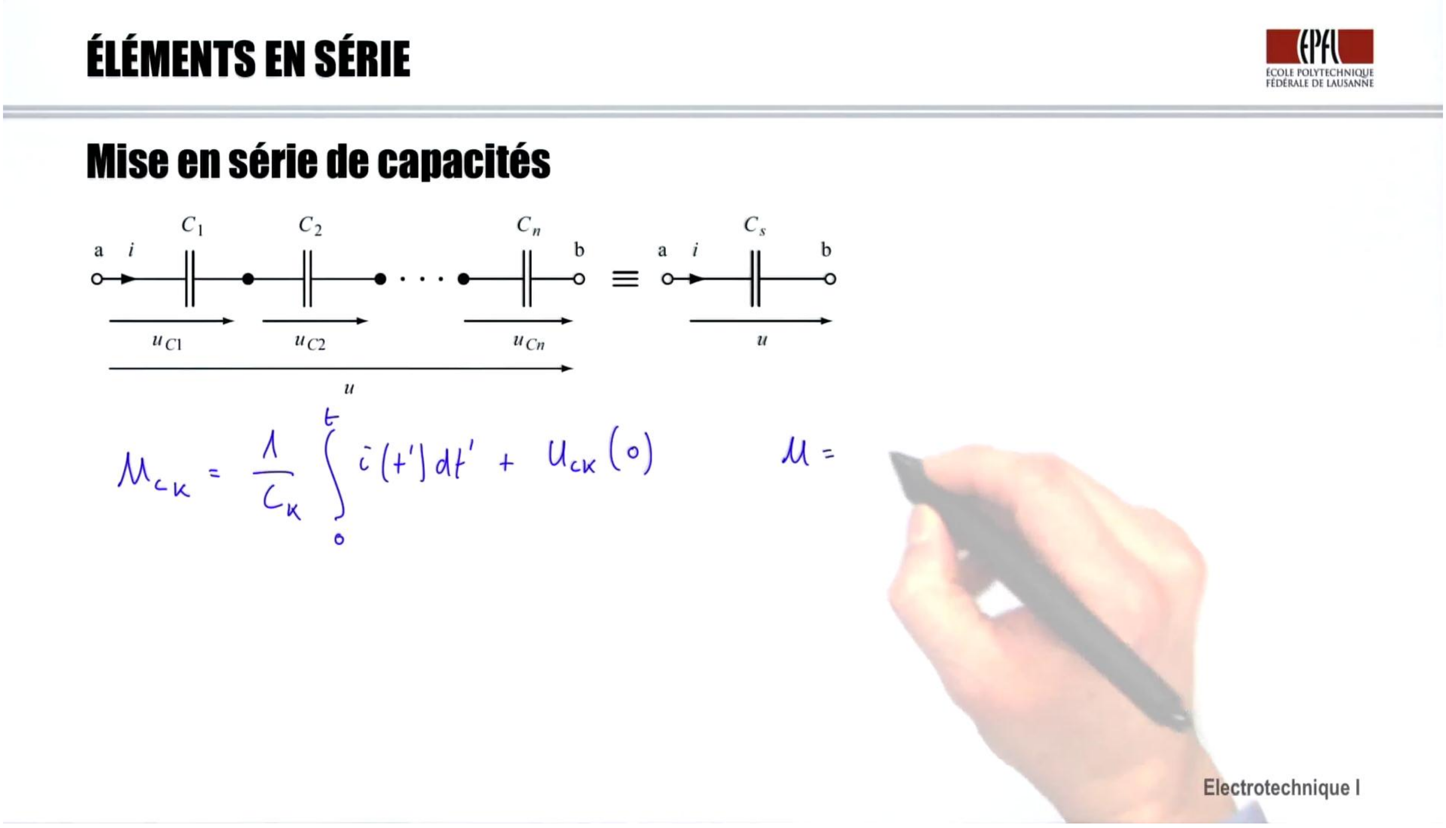
Electrotechnique I

On commence par la résistance et la mise en série de résistances. Ce que l'on souhaite, c'est finalement, lorsqu'on a une série de résistances mises en série, parcourue par le même courant de R1 à Rn, remplacer cet ensemble de résistances par une seule résistance dite équivalente, Rs, parcourue de nouveau par le même courant et aux bornes de la même tension, donc c'est l'équivalence des dipôles qu'on a vu tout à l'heure, et à ce moment-là que pouvons-nous dire de cette nouvelle résistance équivalente ? Eh bien, sachant que la tension u c'est la somme des tensions partielles de k à 1 jusqu'à n de uRk, que cette somme est égale à u complet, mais qu'on peut aussi remplacer ce uRk par cette somme de 1 à n, des Rk fois I, le courant étant le même tout à travers, et on veut que ceci soit égal à la résistance Rs fois I, il en découle une évidence au final que la plupart d'entre vous connaissait déjà, c'est que cette résistance en série d'une série, d'une suite de résistances en série, c'est simplement la somme algébrique de K 1 à n des résistances séparées Rk.

Notes

Summary

3m 10s



Nous allons faire de même pour la mise en série des capacités. Donc de nouveau nous avons une équivalence de dipôles, nous souhaitons rendre équivalents ces deux dipôles. Nous avons donc un dipôle d'une suite de capacités mise en série, parcourues par le même courant, nous avons aux bornes de ce dipôle complet, une tension u et nous souhaitons remplacer ce dipôle par une seule capacité, une capacité, si l'on veut, équivalente à l'ensemble de ces capacités dans la mise en série ici. Comment fait-on ? Nous savons qu'une tension aux bornes de la capacité k, c'est 1/Ck intégrale(de 0 à t) i(t')dt' + la condition initiale : Uck(0) Alors maintenant, on va additionner toutes ces tensions, donc on va avoir le u global de toutes ces tensions additionnées. Qu'est-ce que c'est ? C'est : 1/C1 + 1/C2 + etc jusqu'à 1/Cn de l'intégrale(de 0 à t) de i(t')dt' + un ensemble de conditions initiales [Uc1(0) etc] Et ceci, nous voulons que ce soit équivalent à 1/C, la capacité en série Cs, intégrale(de 0 à t) i(t')dt' + u(0) Il en découle évidemment que 1/Cs est égal à la somme de k=1 à n des 1/Ck Ou alors ceci est équivalent à écrire que Cs vaut 1 / la somme de k=1 à n des 1/Ck Voilà la règle de la mise en série pour la capacité.

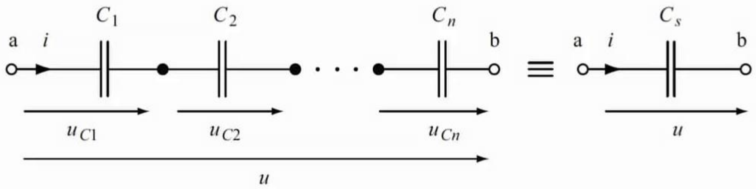
Notes

Summary

4m 43s

ÉLÉMENTS EN SÉRIE

Mise en série de capacités



$$u_{ck} = \frac{1}{C_k}\int_0^t i(t')\,dt' + u_{ck}(0)$$

$$u = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_n}\right)\int_0^t i(t')\,dt' + \left[u_{c1}(0)\dots\right]$$

$$= \frac{1}{C_s}\int_0^t i(t')\,dt' + u(0)$$

$$\boxed{\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k} \equiv C_s = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/C_k}}$$

$$u(0) = \sum_{k=1}^{n} u_{ck}(0)$$

Electrotechnique I

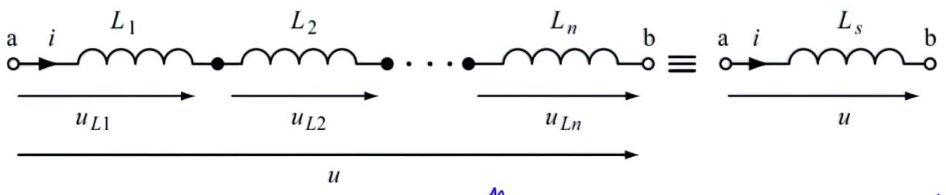
On peut encore dire quelque chose sur la valeur initiale de la tension aux bornes du circuit. Cette valeur initiale, u(0) est égale simplement à la somme de toutes les valeurs uck(0) On peut aussi dire quelque chose, c'est que la mise en série des capacités va faire que la capacité finale en série de tous les éléments est en général, forcément, vu les équations mentionnées ici, plus petite que chacune des capacités partielles.

Notes

Summary

6m 56s

Mise en série d'inductances



$$u = L\frac{di}{dt} \qquad u = \sum_{k=1}^{n} u_{Lk} = \left(L_1 + L_2 + \dots L_n\right)\frac{di}{dt} = L_s\frac{di}{dt}$$

$$L_s = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Voici maintenant la mise en série d'inductances. Donc comme pour les précédentes, vous avez maintenant compris, entre la résistance et la capacité, on a ici l'équivalence de deux dipôles. Nous voulons que cet ensemble d'inductances mis en série soit égale à une seule inductance équivalente. Alors nous pouvons écrire que, et sachant que, u est égal à L di/dt de manière générale pour une inductance. Nous pouvons écrire que u global de la mise en série, c'est la somme de k=1 à n de uLK, ce qui vaut (L1 + L2 + etc Ln) multiplié par di/dt, le i étant commun à tous, c'est le même, et nous voulons que ceci soit égal à Ls di/dt Il en découle exactement comme pour les mêmes règles de la résistance, que Ls est la somme algébrique de k allant de 1 à n des Lk.

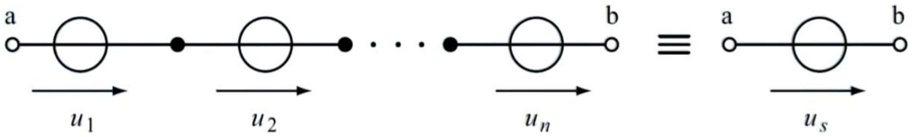
Notes

Summary

7m 28s

ÉLÉMENTS EN SÉRIE

Mise en série de sources de tension



$$u_s = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Electrotechnique I

Un élément important maintenant, c'est la mise en série des sources de tensions Que peut-on dire lorsque nous plaçons différentes sources en séries et que nous souhaitons finalement, comme précédemment pour la mise en équivalence de deux dipôles, nous souhaitons remplacer l'ensemble de ces sources par une seule source équivalente Us ? Et bien ici comme précédemment, c'est même relativement évident, ce us global, cette source qui remplace toutes les sources partielles mises en série, c'est la somme des k allant à 1 à n, de la source partielle uk.

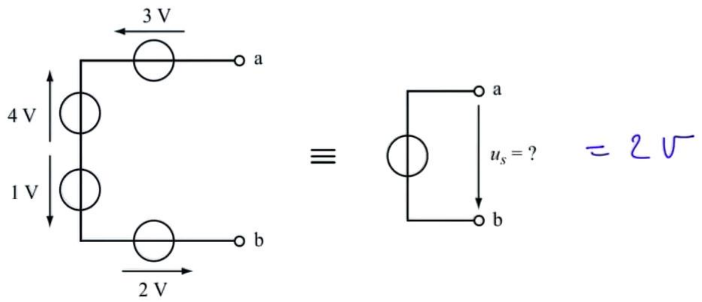
Notes

Summary

8m 40s

ÉLÉMENTS EN SÉRIE

Mise en série de sources de tension - exemple



Electrotechnique I

On peut faire un petit exemple pour s'en convaincre, en disant : eh bien voilà on a un exemple de 4 sources qui sont mises ici en série. Nous souhaitons remplacer cet élément des 4 sources en série par une seule source pour simplifier le schéma. Que vaut alors Us, sachant que nous avons 3 volts, nous avons 4 volts, nous avons 1 volt et 2 volts, mais avec des sens différents. Eh bien nous aurons 3V - 4V + 1V + 2V et ceci nous donne un Us = 2V. Donc bien sûr, faire attention au sens des tensions algébriques lorsque l'on procède à la somme et la mise en série des sources de courant.

Notes

Summary

9m 19s

Mise en série de sources de courant

Impossible sauf si toutes les sources ont même valeur et signe

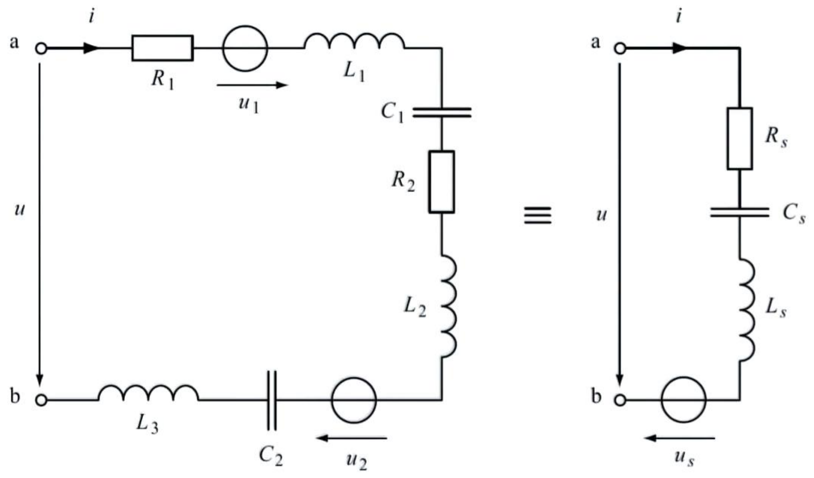
Il est évident qu'il n'est pas possible d'envisager la mise en série de plusieurs sources de courant, sans violer la première loi Kirchhoff, sauf si toutes ces sources individuelles produisent exactement le même courant. Dans ce cas, le dipôle résultant sera simplement équivalent à n'importe laquelle des sources individuelles. Donc ce que l'on peut dire ici, c'est que cette mise en série est impossible, sauf si toutes les sources ont même valeur et signe. Dans ce cas très particulier, il est possible de faire la mise en série des sources.

Notes

Summary

10m 01s

Mise en série de plusieurs éléments de chaque type



Electrotechnique I

Et voilà pour finir un exemple de mise en série de plusieurs éléments. A nouveau, on constate que tous ces éléments, c'est vrai c'est assez évident ici, étant parcourus par le même courant, tous ces éléments sont en série. On regroupe par famille, c'est-à-dire toutes les résistances ensembles, toutes les capacités ensembles et toutes les inductances ensembles. Et on peut alors procéder déjà à une simplification de ce modèle de gauche en passant par ce modèle équivalent de droite avec les 3 éléments qui représenteront la mise en série de tous ces éléments séparés.

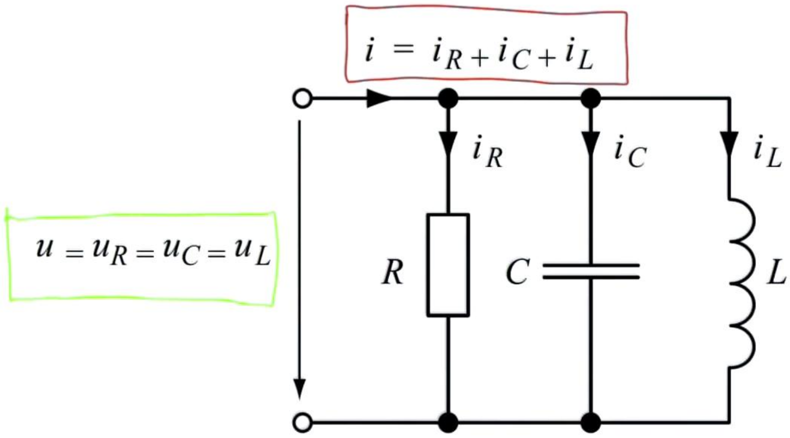
Notes

Summary

10m 45s

ÉLÉMENTS EN PARALLÈLE

Propriété fondamentale



Electrotechnique I

Passons maintenant à la mise en parallèle des éléments. Quelle est la définition de la mise en parallèle des éléments ? Vous avez un schéma avec une résistance, une capacité et une inductance qui sont en parallèle. La définition, c'est que les 3 éléments R, L et C, ont une même tension aux bornes. Donc c'est ceci la définition. R et C sont en parallèle, de même R et L sont en parallèle, de même C et L sont en parallèle. Parce que leur tension aux bornes est strictement équivalente. Ainsi, les trois courants qui parcourent ces éléments, sont différents, mais, par Kirchhoff, la somme de ces trois courants est forcément égale au courant total débité ici par le dipôle, donc on peut également écrire que ce courant ici, est la somme de iR, de iC et de iL. Nous allons donc maintenant reprendre R, C puis L, et pour chacun de ces éléments, voir quelles sont les règles pour pouvoir simplifier des éléments en parallèle de R, de C ou de L.

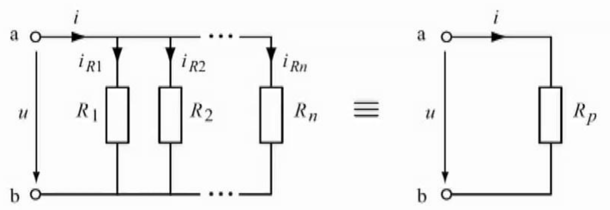
Notes

Summary

11m 19s

ÉLÉMENTS EN PARALLÈLE

Mise en parallèle de résistance



$$i = i_{R_1} + i_{R_2} + \cdots i_{R_n} = i$$

$$= \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \cdots \frac{u}{R_n} = \frac{u}{R_p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \equiv R_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/R_k}$$

Electrotechnique I

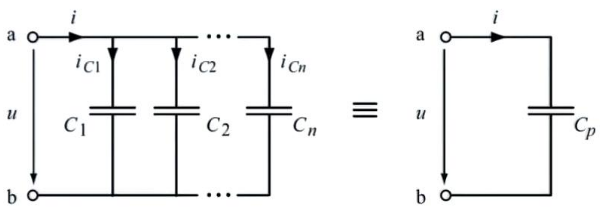
Premièrement, la mise en parallèle de résistances. A nouveau, nous décidons de définir 2 dipôles : le dipôle avec le nombre de résistances à n résistances mises en parallèle, parce que comme vous le voyez ici, branchées à la même tension uAB, et nous souhaitons remplacer ceci par une seule résistance équivalente au dipôle précédent, et cette résistance équivalente en parallèle, avec une seule résistance Rp. Comment fait-on ? Nous savons que le courant comme écrit précédemment, c'est le courant dans R1 + le courant dans R2 + etc le courant dans Rn. C'est le courant qu'on a ici total du dipôle, i. Nous savons aussi que ce courant doit être égal à i du dipôle de droite, comme écrit déjà ici. Si on remplace iR1, iR2, iRn et ainsi de suite, par la loi d'Ohm, on a u/R1 u/R2 etc u/Rn et ceci doit être égal à u/Rp On définit alors la règle pour la mise en parallèle des résistances, qui est ainsi : c'est que 1/Rp est égal à la somme de k allant de 1 à n des 1/Rk Autrement dit, on peut également écrire ceci d'une autre manière, c'est que Rp est égal à 1 sur la somme des inverses des Rk pour k allant de 1 à n.

Notes

Summary

12m 26s

Mise en parallèle de capacités



$$i = \sum_{k=1}^{n} i_{Ck} = (C_1 + C_2 + \dots C_n)\frac{du}{dt} = C_p \frac{du}{dt}$$

$$C_p = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

On va voir maintenant la mise en parallèle des capacités. On applique exactement la même règle. Nous savons que le courant total débité ici dans ce dipôle, c'est la somme de chacun des courants de chacune des branches, on peut donc écrire que i c'est la somme de k allant de 1 à n des ick c'est à dire (C1 + C2 + etc jusqu'à Cn) de la variation de la tension par rapport au temps. Et nous souhaitons que ceci soit égal Cp fois du/dt. De ce fait, on peut écrire que Cp est égal à la somme des k allant de 1 à n des Ck. C'est donc relativement simple pour calculer une mise en parallèle des capacités. C'est simplement la somme.

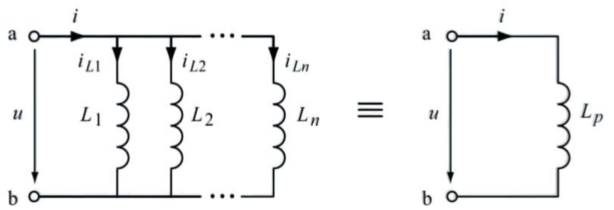
Notes

Summary

14m 24s

ÉLÉMENTS EN PARALLÈLE

Mise en parallèle d'inductances



$$\boxed{\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k} = L_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/L_k}}$$

$$i_{Lk}(t) = \frac{1}{L_k}\int_0^t u(t')\,dt' + i_{Lk}(0)$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \frac{1}{L_n}\right)\int_0^t u(t') + \left[i_{L_1}(0) \dots i_{L_n}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{L_p}\int_0^t u(t')\,dt' + i(0)$$

$$i(0) = \sum_{k=1}^{n} i_{Lk}(0)$$

Electrotechnique I

Enfin, il nous reste à calculer la mise en éléments parallèles des inductances avant de passer aux sources. Alors on procède de nouveau de la même manière. Nous savons qu'un courant iLK en fonction du temps c'est 1/Lk intégrale(de 0 à t) de u(t')dt' + un courant évidemment iLK initial. On peut alors écrire que ce courant i, que nous souhaitons dans le dipôle de droite, c'est 1/L1 + 1/L2 ainsi de suite jusqu'à 1/Ln tout ceci entre parenthèses, fois l'intégrale de u(t') + tous les courants initiaux, soit [iL1(0) etc jusqu'à iLn(0)]. Et ceci, nous souhaitons que ce soit égal à 1/Lp intégrale(de 0 à t) u(t')dt' + i(0). Ce qu'on peut dire et ce qu'on peut voir, c'est que la mise en parallèle va nous permettre de calculer le L équivalent, Lp, 1/Lp est égal à la somme des k allant de 1 à n des 1/Lk Autrement dit, écrire que Lp, c'est l'inverse de la somme des inverses, de k=1 à n de Lk Et de même, on va pouvoir dire que ceci, comme pour la résistance, c'est l'inverse de la somme des inverses, pour les inductances en parallèle, et ajouter encore que la valeur du courant initial qui traverse le circuit, est simplement égale à la somme algébrique des courants initiaux. Donc on aura i(0) qui vaut une somme de k=1 à n des iLk(0). Donc maintenant nous avons les règles de mise en séries en parallèle pour R, L et C.

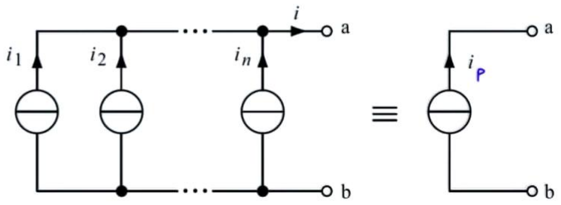
Notes

Summary

15m 18s

ÉLÉMENTS EN PARALLÈLE

Mise en parallèle de sources de courant



$$i_p = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

Electrotechnique I

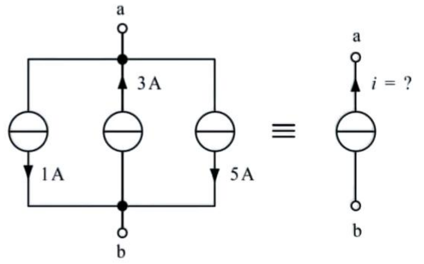
Nous voyons maintenant la mise en parallèle des sources de courant. Alors ici c'est également assez simple puisqu'on applique Kirchhoff. En voulant rendre le dipôle de gauche équivalent au dipôle de droite, on voit que i, qui est défini ici, si on fait la somme des courants on va découvrir que ip, on va l'appeler comme ceci, est égal à la somme des courants ik en prenant k=1 à n, et on va donc ici définir ce i comme ip. On a donc une équivalence ici, qui nous permet de faire un petit exemple de nouveau, pour vous montrer de manière pratique comment ça se passe.

Notes

Summary

17m 42s

Mise en parallèle de sources de courant - exemple



$i = -3A$

Donc si vous avez ici un dipôle ab avec 3 sources de courant en parallèle que nous souhaitons remplacer par une seule source de courant. Que vaut finalement le courant iA ? On va avoir 3 ampères qui vont vers le haut - 1 ampère, il en reste 2, - 5 ampères. Eh bien le courant i vaut -3 ampères. Donc ce i vaut -3A.

Notes

Summary

18m 29s

Mise en parallèle de sources de tension

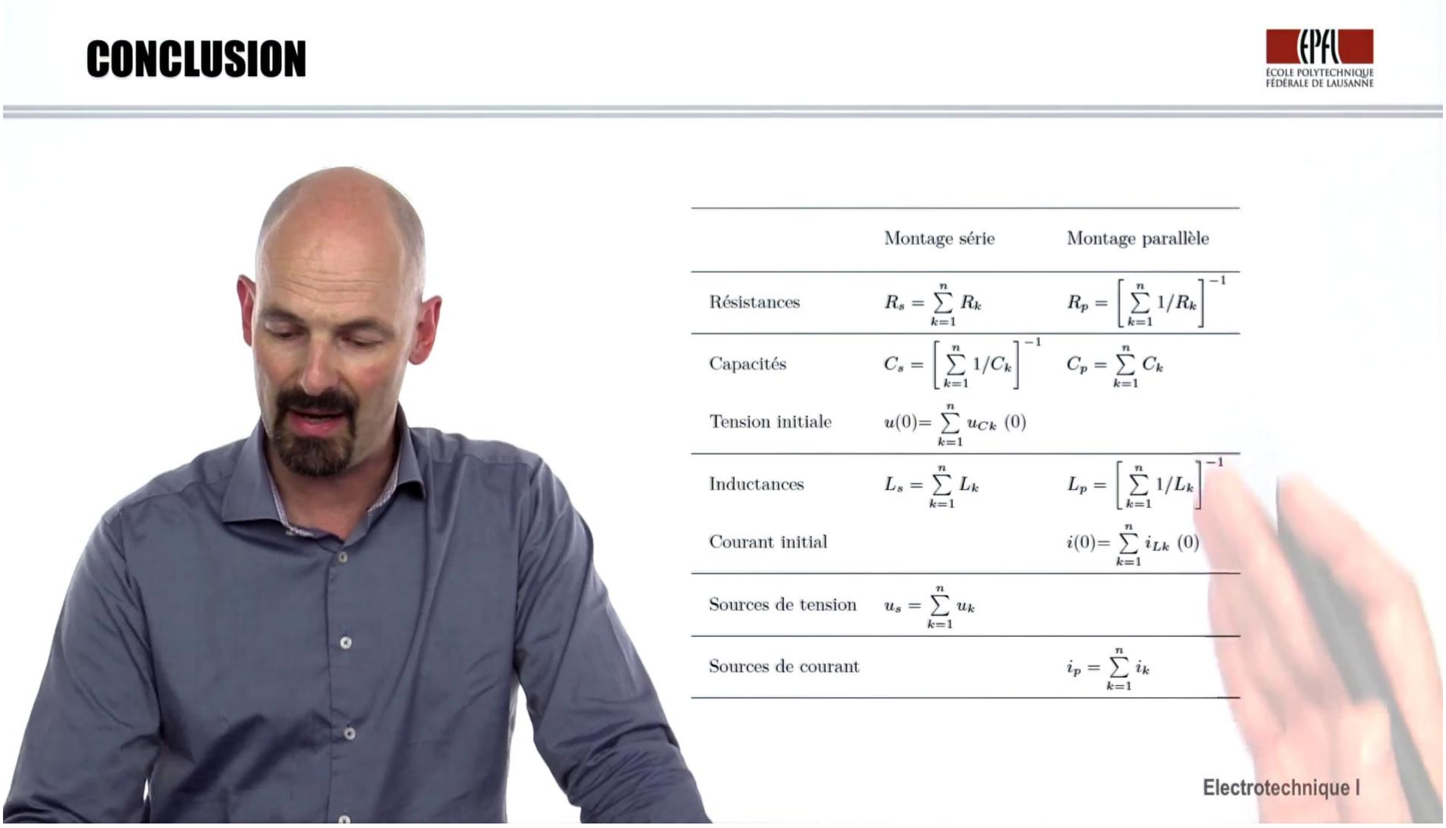
Impossible, sauf si elles ont toutes la même valeur et le même signe

On continue avec la mise en parallèle des sources de tensions, et de manière identique, on a un problème avec la mise en parallèle des sources de tensions. On ne peut pas faire cette mise en parallèle sans violer la deuxième loi de Kirchhoff et de nouveau, là aussi, sauf si elles ont toutes la même tension. Si elles ont toutes la même tension, on peut dans ce cas, résumer ceci à une seule source, qui va se résumer à la source que définie chacune de celles-ci. Et donc on peut écrire que la mise en parallèle de sources de tension est impossible sauf si elles ont toutes la même valeur et le même signe.

Notes

Summary

19m 00s



Pour conclure, nous avons vu la mise en série et en parallèle de tous les éléments R, L, C, des sources de courant et des sources de tension idéales. Comme conclusion, je vous mets ici un tableau qui résume ce que nous venons de voir avec le montage en série, la définition de ces résistances en série, capacités en série, inductances en série, sources de tension en série, et le montage en parallèle avec la résistance, capacités, inductance, de même que la source de courant idéale. Merci.

Notes

Summary

19m 42s