ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.12 Comment trouver une base à partir d'un système de générateurs

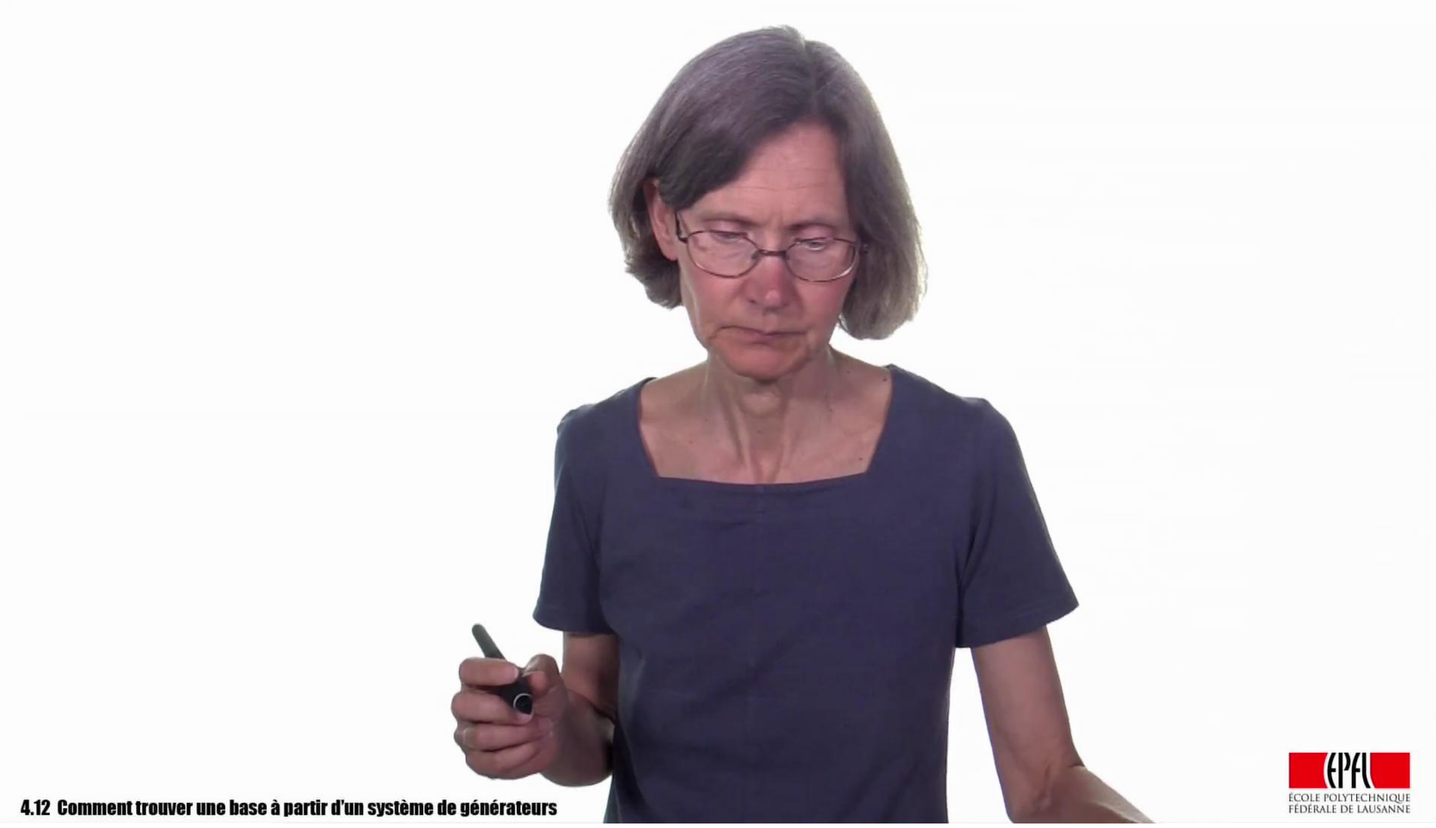
Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman

Search MOOC

Video

EPFL

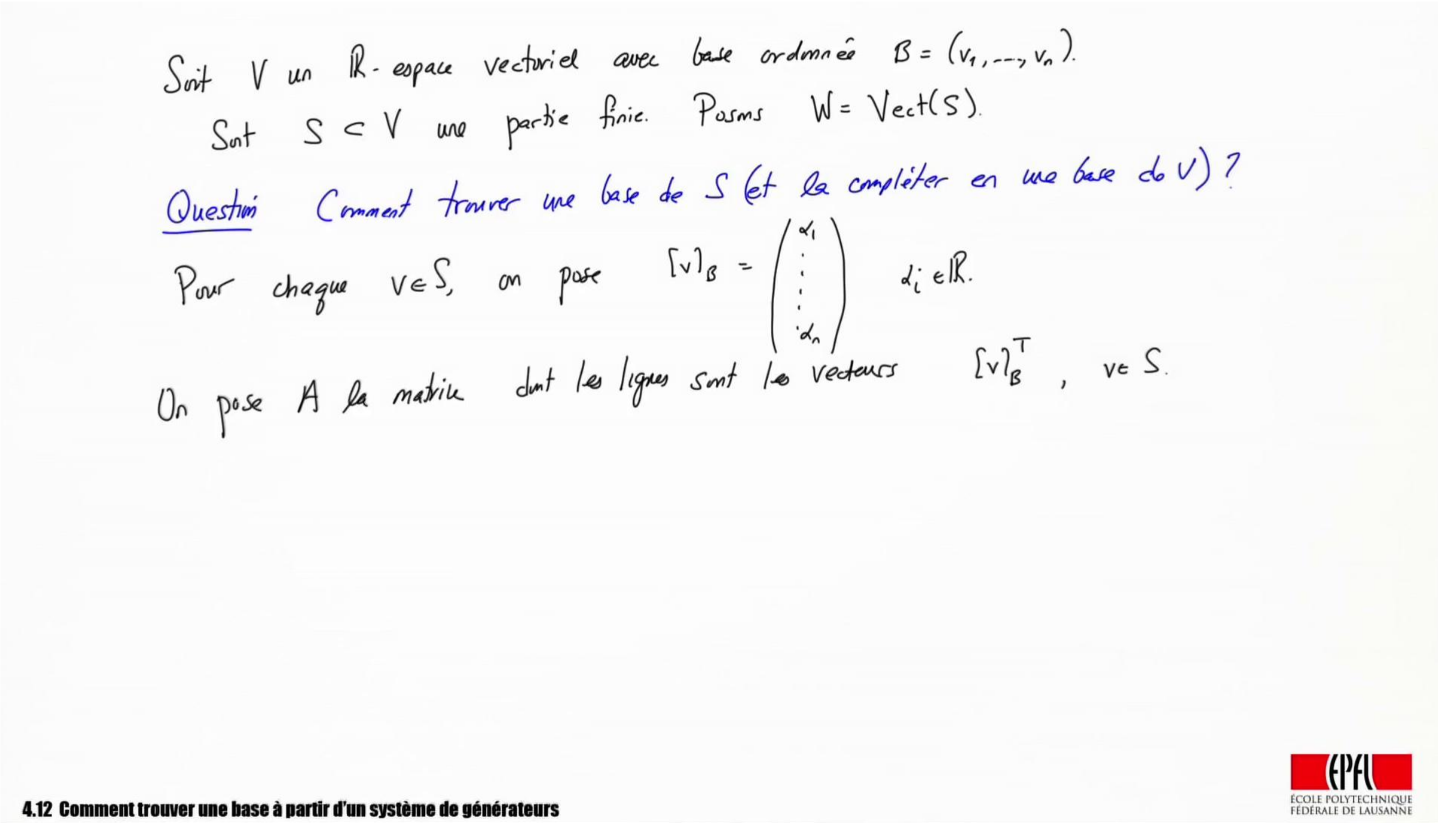


Maintenant nous allons appliquer ce que nous avons vu dans la vidéo précédente soit le lien entre un espace vectoriel de dimension finie n et R^n. Chaque vecteur dans l'espace vectoriel de dimensions n peut être représenté par un vecteur-colonne par rapport à une base ordonnée fixe. Nous allons travailler avec ces vecteurs-colonne au lieu des vecteurs comme des polynomes ou des matrices. Je vais utiliser cela pour trouver une base à partir d'un système générateur d'un espace vectoriel.

Notes

Summary

0m 04s



D'abord je pose le contexte. Donc je prends un espace vectoriel avec une base ordonnée B j'appelle ses vecteurs $v_1,\ldots,v_n$. Soit S, un sous-ensemble de V, et je prends une partie finie. Cette méthode que je décris ici, ça ne va fonctionner que si le sous-ensemble possède un nombre fini d'éléments. Ensuite, je pose : W le sous-espace vectoriel de V engendré par S. Et la question que je vais poser est : Comment trouver une base de S et éventuellement la compléter en une base de V. Donc voilà la méthode et ensuite je vais l'appliquer à un exemple. Pour chaque v dans S, on pose, par rapport à la base que nous avons fixée [voir écran] et puis ensuite on va poser la matrice A dont les lignes sont exactement les vecteurs $v \in V$, mais mis en lignes. On pose A la matrice dont les lignes sont les vecteurs. C'est-à-dire, que je vais prendre, comme ce vecteur-là, comme je veux l'écrire en ligne, je dois faire la transposée, et ça c'est pour tout $v \in S$. Ici, il est important que S soit une partie finie. Donc j'énumère les vecteurs dans S, j'écris chacun de ces vecteurs comme un vecteur colonne par rapport à la base B que nous avons fixée.

Notes

Summary

0m 37s

Exemple. Soient $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.
Cherchons une base de $W = \mathrm{Vect}(S)$ et complétons-la en une base de V.

4.12 Comment trouver une base à partir d'un système de générateurs

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ensuite je les change en lignes et je les place dans une matrice. Maintenant je peux faire les calculs avec la matrice comme j'ai fait pour les vecteurs dans R^n, on cherche une base de l'espace ligne de *A* parce que maintenant les vecteurs sont dans les lignes. Les vecteurs-colonne correspondants seraient des lignes mais après je vais les retourner en colonnes, les vecteurs-colonne associés à ces lignes représentent les coordonnées des vecteurs dans *V* qui forment une base de *W*. Je redis : pour chaque *v* dans *S*, qui est un ensemble fini, on va écrire la colonne qui représente le vecteur par rapport à la base qu'on a fixée. J'insiste : on fixe cette base, on ne la change pas. Ensuite, je vais poser ces vecteurs pas comme des colonnes mais comme des lignes, dans une matrice, parce que cela se calcule mieux avec les lignes. On cherche une base espace-lignes de *A*, cela on sait faire. Ensuite, je prends les lignes non-nulles de la matrice échelonnée, ces vecteurs, je les change en colonnes, donc les vecteurs colonne associés à ces lignes représentent les coordonnées des vecteurs dans *V*. Ces vecteurs-là vont former un base de *W*. C'est très clair. Puis je reviens à la deuxième partie de la question, comment est-ce qu'on la complète en une base de *V*, cela sera clair dans l'exemple.

Notes

Summary

2m 47s

Exemple. Soient $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Cherchons une base de $W = \mathrm{Vect}(S)$ et complétons-la en une base de V.

Fixons la base $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23})$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ & & & & & \end{pmatrix}$

4.12 Comment trouver une base à partir d'un système de générateurs

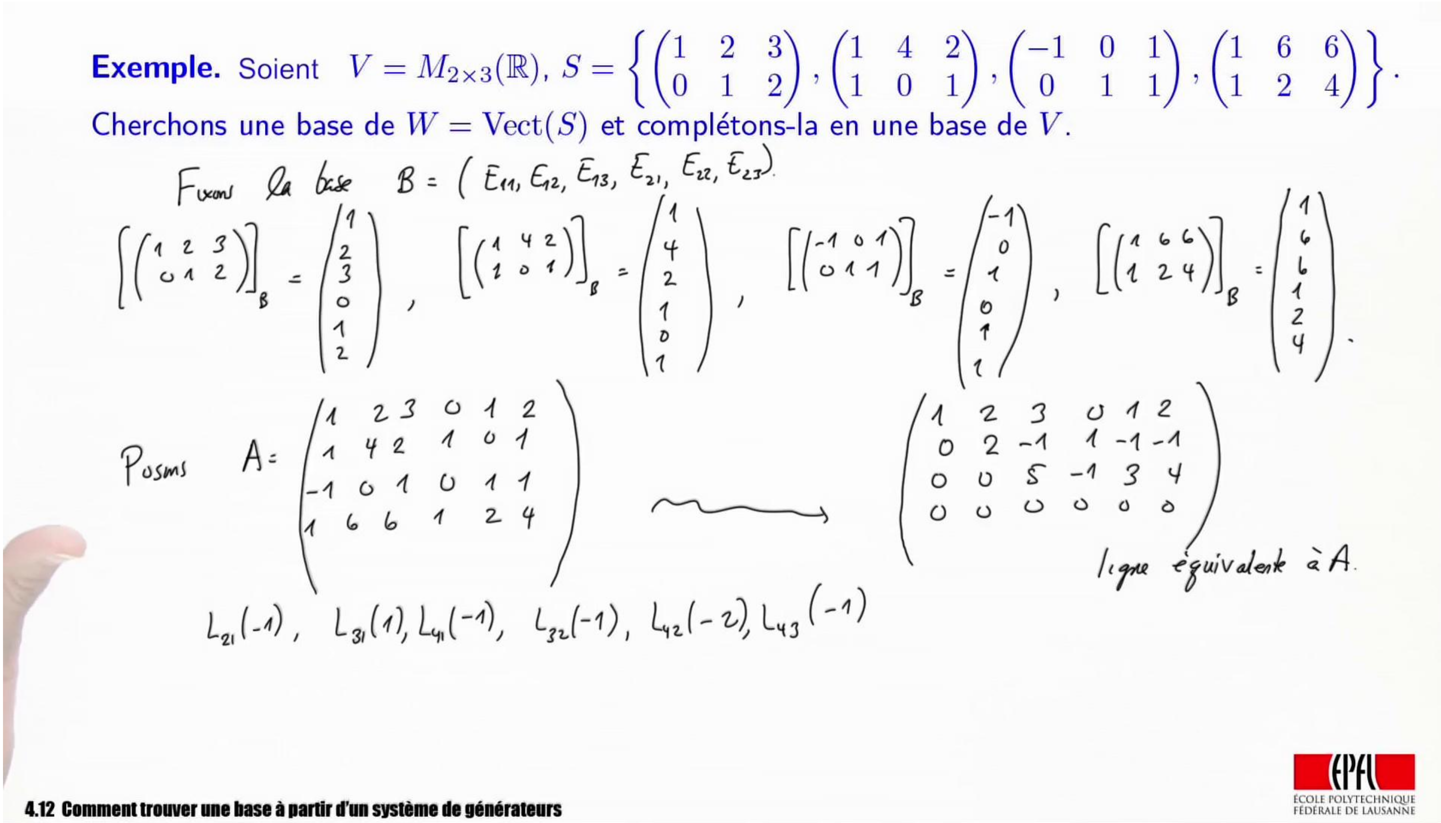
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Commençons l'exemple. Je me donne l'espace vectoriel des matrices *2x3* à coefficients réels, et là, j'ai un ensemble de vecteurs, quatre vecteurs dans *V*, puis j'aimerais trouver une base de l'espace engendré par ces vecteurs et ensuite j'aimerais compléter cela en une base de *V*. Je vais faire toute la procédure que je viens de décrire. D'abord je fixe une base *B*. Comme c'est moi qui choisis, je fixe la base la plus simple. Fixons la base *B*, je vais prendre la base ordonnée E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}. Après je représente chacun de ces vecteurs par rapport à cette base, base, donc la première matrice dans la base *B*, c'est la colonne *(1, 2, 3, 0, 1, 2)*. Et ainsi de suite pour les autres matrices [voir écran] Maintenant je vais regarder ces quatre vecteurs comme les lignes d'une matrice parce que je sais manipuler les lignes d'une matrice. Posons : *A* la matrice formée de ces vecteurs-là mais en lignes. La procédure d'échelonnage est un peu longue, je ne vais pas le faire, mais je vais énumérer ici les opérations que j'utilise et ensuite vous pourrez vérifier.

Notes

Summary

4m 37s



Donc si on fait les opérations, [voir écran] on trouve après cette suite d'opérations une forme échelonnée de cette matrice, qui est [voir écran]. Donc ça c'est une forme échelonnée de cette matrice. C'est une matrice ligne équivalente à A. Donc le *Vect* des trois lignes non-nulles de la forme échelonnée, c'est le même que celui des lignes de la matrice A. Par la propriété de correspondance entre la représentation par des colonnes d'un vecteur dans un espace et les vecteurs dans R^n, on peut revenir maintenant aux matrices.

Notes

Summary

6m 58s

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang ligne de A = rang ligne de $\hat{A} = 3$

$\Rightarrow \dim W = 3.$

base de W est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.12 Comment trouver une base à partir d'un système de générateurs

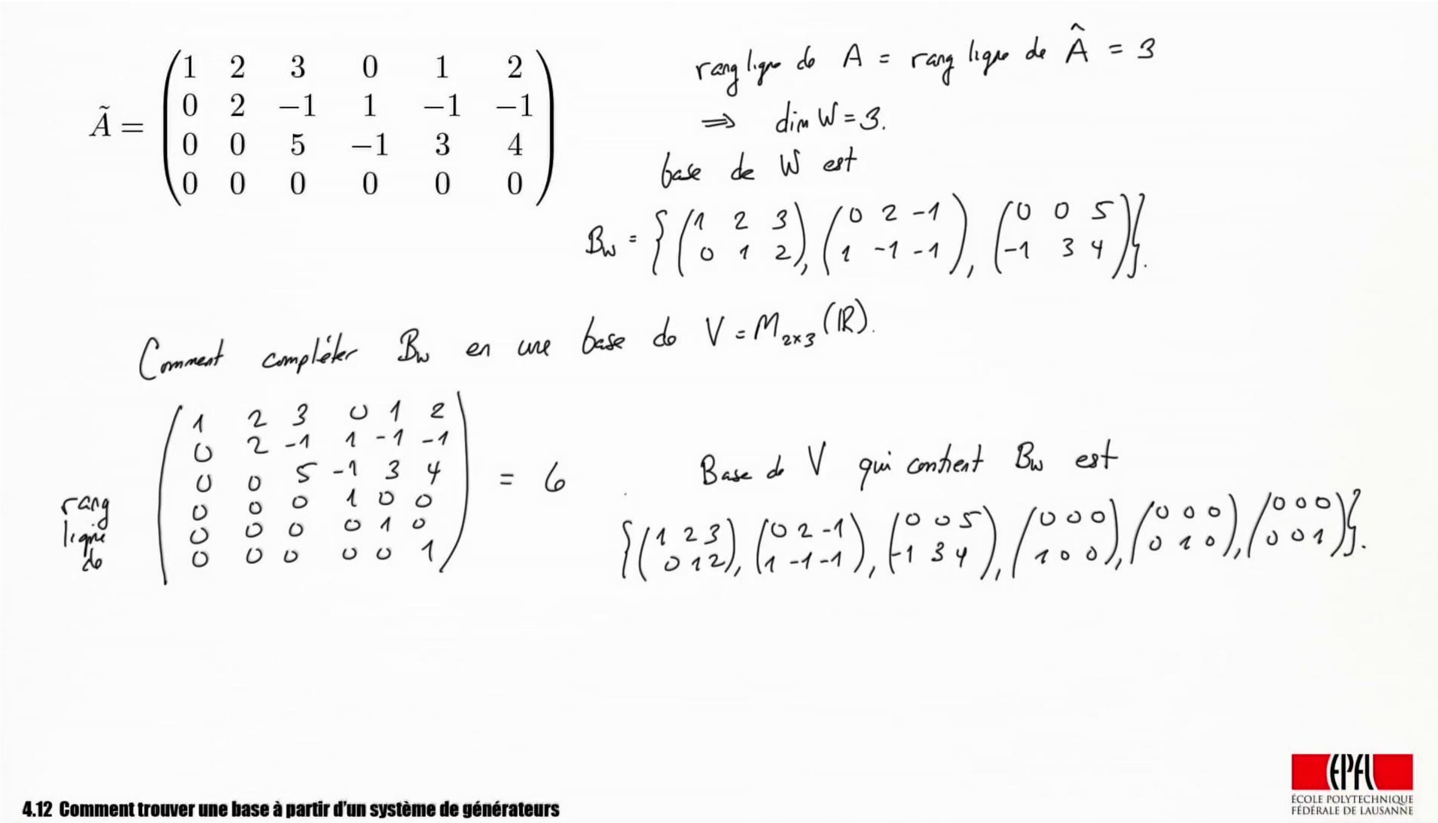
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Voilà la matrice qui est une forme ligne équivalente et échelonnée de la matrice originale (la même qu'avant). Donc maintenant je reviens à des matrices. Je sais d'abord que le rang-lignes de *A* est égal au rang-lignes de la forme échelonnée et ce rang vaut troi, donc cela implique que la dimension de notre espace *W* est *3* et qu'une base de *W* est (je vais écrire les matrices maintenant) : La première ligne représente une matrice par rapport à la base. La deuxième ligne, ça représente une matrice par rapport à la base et la troisième, ça représente une matrice de la même manipre Voilà cet ensemble de trois matrices est une base de *W*. Là on a vraiment gagné au niveau de l'efficacité de calcul, on avait des matrices au début, on les change en colonnes, on met ces colonnes dans les lignes d'une matrice, on fait nos opérations élémentaires, puis on a rapidement une base du sous-espace *W*. On connait sa dimension et on a trouvé une base. Maintenant, il y a la dernière question, c'était : comment peut-on compléter ça en une base de $Mat_{2x3}(R)$ Je vais nommer la base précédente B_W.

Notes

Summary

8m 28s



Donc comment compléter B_W en une base de V qui est l'espace des matrices *2x3* à coefficients réels. De nouveau, au lieu de travailler avec des matrices, je vais revenir à une matrice parce que c'est ce qu'on a déjà vu quand on travaillait avec l'espace-lignes et l'espace-colonnes. Donc je reprends ma matrice. La dernière ligne ne sert à rien donc je ne l'écris pas. Ce que je cherche, c'est encore trois vecteurs qui sont linéairement indépendants des trois vecteurs que j'ai déjà écrits. On sait exactement comment faire cela. Je vais compléter cette matrice en une matrice plus grande mais qui est aussi échelonnée, donc on sait que le rang-lignes de cette matrice est égale au nombre de pivots donc il y en a six. Maintenant je peux reprendre ces lignes, je les regarde de nouveau comme des matrices et j'aurai une base de V. Donc en particulier une base de V qui contient notre B_W. Je commence avec le B_W. Ensuite, cette ligne-là représente la matrice [voir écran] et la dernière ligne représente cette matrice [voir écran]. C'est vraiment très efficace.

Notes

Summary

10m 08s

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang ligne de A = rang ligne de $\hat{A} = 3$

$\Rightarrow \dim W = 3.$

base de W est

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comment compléter $\mathcal{B}_W$ en une base de $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

$$\text{rang ligne de} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

Base de V qui contient $\mathcal{B}_W$ est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.12 Comment trouver une base à partir d'un système de générateurs

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sinon, quand on se donne trois vecteurs linéairement indépendants et qu'on veut compléter cela en une base, ce n'est pas évident mais comme ici on a déjà une base, quand on la met dans une matrice celle-ci elle est échelonnée, il suffit de compléter cela en une grande matrice échelonnée et en une base.

Notes

Summary

11m 45s