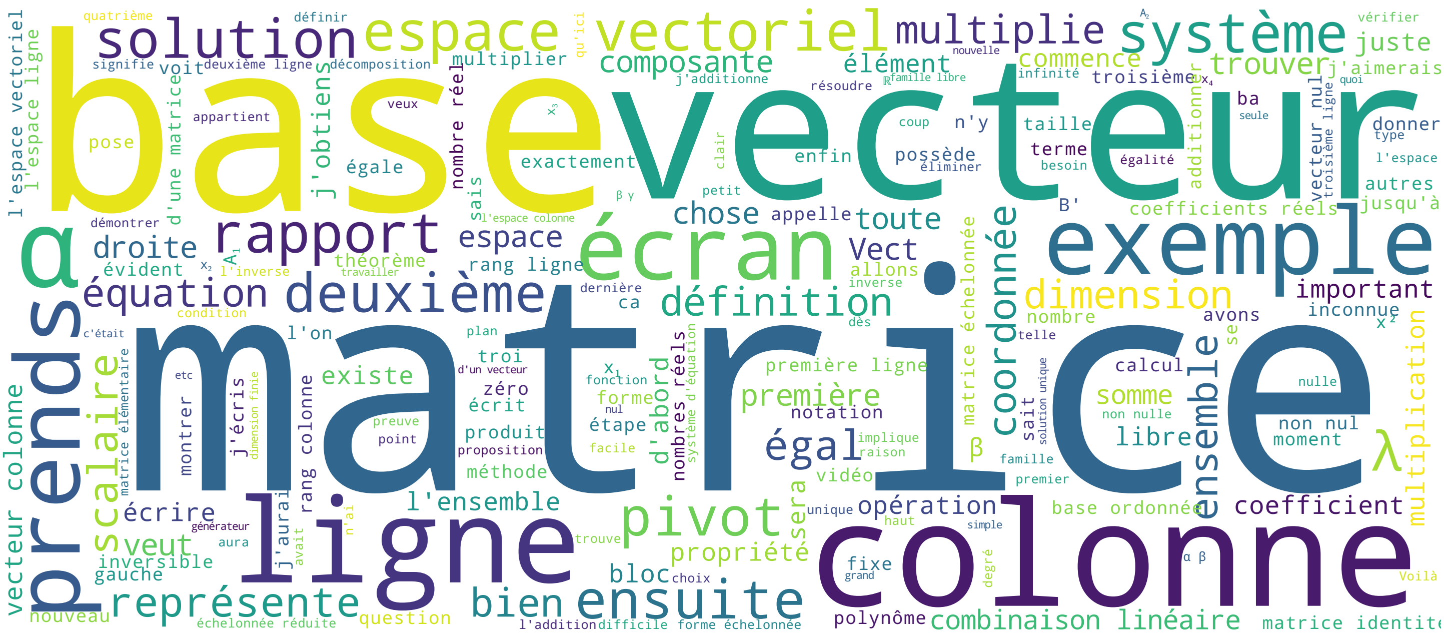
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.11 Coordonnées par rapport à une base

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Dans cette vidéo, je vais parler de ce qui s'appelle les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base fixe. C'est un concept qui est très important parce que cela va nous permettre de faire un lien entre un R-espace vectoriel de dimension n et l'espace vectoriel R^n. Cela signifie qu'on peut ramener beaucoup de nos calculs dans un R-espace vectoriel de dimension n quelconque, aux calculs dans l'espace vectoriel R^n et là on sait calculer.

Notes

Summary

0m 04s

Définition. Une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V est une suite ordonnée de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de V t.q. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V. $v_1, \ldots, v_n$ génératrice et libre.

Définition Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V. Soit $v \in V$.

On a $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ unique.

On appelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les coordonnées de v par rapport à la base B.

Je commence par la définition suivante : Une base ordonnée d'un R espace vectoriel V est une suite ordonnée de vecteurs, cette fois je vais les ordonner et l'ordre, ça compte, telle que l'ensemble forme une base. Donc cela veut dire qu'ils sont libres donc v_1 jusqu'à v_n est une famille génératrice et libre. Désormais, nous allons toujours travailler avec des bases ordonnées donc dès le moment où je donne un ensemble, je dois aussi vous donner l'ordre de la base. La définition basée sur cela : je fixe une base ordonnée d'un R espace vectoriel V et je prends un vecteur v dans V. Comme c'est une base, je peux écrire v comme une combinaison linéaire de v_1,..., v_n. On a alors $v = \alpha_1 v_1$,..., $\alpha_n v_n$ pour α_i dans R. En plus on sait qu'on peut faire cela de façon unique. Donc les éléments α_1,..., α_n sont uniques. C'est important. On appelle ces éléments α_1,..., α_n les coordonnées de v par rapport à la base B. Il y a aussi une notation.

Notes

Summary

0m 37s

Définition. Une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V est une suite ordonnée de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de V t.q. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V. $v_1, \ldots, v_n$ génératrice et libre.

Définition Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V. Soit $v \in V$.

On a $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ unique.

On appelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les coordonnées de v par rapport à la base B.

On écrit $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. C-à-d on représente v par un vecteur colonne (qui dépend du choix de la base).

4.11 Coordonnées par rapport à une base

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

On écrit $[v]_B$ =... et là je liste les coordonnées dans une colonne. C'est-à-dire qu'on représente v par un vecteur colonne mais qui dépend évidemment du choix de la base. Voilà la définition : une base ordonnée c'est une base, mais on fixe un ordre. Quand on se donne une base ordonnée et un vecteur dans l'espace, on peut écrire le vecteur par rapport à cette base, et on appelle les scalaires dans l'ordre les coordonnées de v. Il y a une notation qui va avec ça, c'est le $[v]$ avec le B en bas, et je donne le vecteur colonne, la matrice en colonnes des coordonnées.

Notes

Summary

2m 36s

Définition. Une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V est une suite ordonnée de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de V t.q. $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de V.

Définition. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V. Soit $v \in V$. On a $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. On appelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}$ et on écrit $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Propriétés Soient $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$

Là j'ai juste répété la définition, maintenant je vais faire quelques remarques là-dessus. C'était pour que vous ayez la définition bien écrite. Il y a une proposition importante ici ou une propriété, si on veut, ce sont des propriétés. La première, c'est que si je prends *V* et *B* comme ici et je prends deux vecteurs et un scalaire. Soit v_1, v_2 dans *V*, et λ un scalaire. Ce que j'ai écrit ici c'est presque évident, on va juste remarquer. La première propriété c'est que si je fais la somme de ces deux vecteurs et qu'ensuite j'écris la colonne qui représente ce vecteur-là, c'est la même chose que si d'abord j'écris la colonne qui représente v_1, ensuite la colonne qui représente v_2 et que je fais la somme de ces deux colonnes. Il est évident que ça marche comme ça, vous imaginez *$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $(\beta_1,\dots,\beta_n)$, quand vous faites la somme vous aurez $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2,\dots)$ Donc c'est exactement la même chose.*

Notes

Summary

3m 45s

Définition. Une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V est une suite ordonnée de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de V t.q. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V.

Définition. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V. Soit $v \in V$. On a $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. On appelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}$ et on écrit $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Propriétés Soient $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $[v_1 + v_2]_{\mathcal{B}} = [v_1]_{\mathcal{B}} + [v_2]_{\mathcal{B}}$

(2) $[\lambda v_1]_{\mathcal{B}} = \lambda [v_1]_{\mathcal{B}}$

On peut utiliser nos méthodes de calcul dans $\mathbb{R}^n$ pour résoudre des problèmes dans V.

4.11 Coordonnées par rapport à une base

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Deuxièmement, si je multiplie le vecteur v_1 par λ, donc ça veut dire que j'aurai ici un λ qui vient partout, et j'écris la colonne correspondante, c'est la même chose par la définition de la multiplication d'une matrice par un scalaire, c'est la même chose que si, d'abord je forme la colonne qui représente v et ensuite je multiplie cette colonne par λ. Ça c'est très important parce que ça veut dire qu'on peut utiliser nos méthodes de calcul dans R^n pour résoudre des problèmes dans V. Avant de faire des exemples de la représentation par les coordonnées, j'aimerais souligner ici deux ou trois choses. Il est très important qu'il y ait une écriture unique ici. On a une base, il y a une façon unique d'écrire cela, donc je ne me trompe pas, je me donne un vecteur v, il y a une unique colonne qui le représente par rapport à cette base B. La deuxième remarque que je voudrais faire, c'est qu'ici à droite, comment faut-il comprendre ces calculs ou ces opérations-là ? Ceci est un vecteur colonne donc c'est une matrice, ceci est un vecteur colonne, une matrice et je sais comment additionner des matrices qui sont de même taille.

Notes

Summary

5m 01s

Exemples.

(1) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (1, x, x^2)$

(2) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (x^2, 1, x)$

(3) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (x+1, x-1, x^2)$

(4) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

4.11 Coordonnées par rapport à une base

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ça c'est une matrice que je multiplie par un scalaire. Tandis que là, les opérations sont dans l'espace vectoriel. Donc v_1, v_2 peuvent être des polynômes, par exemple. Voilà les commentaires que je voulais faire.

Notes

Summary

6m 35s

Exemples.

(1) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$v = a + bx + cx^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

(2) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}' = (x^2, 1, x)$

$v = cx^2 + a \cdot 1 + b \cdot x$

$[v]_{\mathcal{B}'}$

(3) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}'' = (x+1, x-1, x^2)$

(4) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

4.11 Coordonnées par rapport à une base

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant faisons des exemples pour être sûr que vous avez compris la définition. D'abord je me donne l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux à coefficients réels, et là je fixe la base que l'on préfère à toutes les autres, donc la base B={1, x, x²}. Je prends un vecteur quelconque dans V, par exemple a + bx + cx², où a,b,c sont des nombres réels. Maintenant, je devrais représenter v par rapport à cette base-là mais là c'est évident que j'ai a fois le po1ynôme 1, b fois x et c fois x² et c'est dans cet ordre-là, donc j'ai (a,b,c). Ça c'est la version facile. Faisons un deuxième exemple mais ici juste pour ne pas confondre je vais faire une modification, je vais appeler ceci la base B' et celle-ci sera la base B'' pour distinguer ces deux cas. Maintenant si je veux écrire le même vecteur, c'est le même vecteur là, $[v]_{B'}$, par rapport à la base B', je dois faire attention parce que je dois imaginer que j'ai... J'ai quoi ici ? j'ai cx²+ a + bx et c'est dans cet ordre-là. Donc cette fois, le vecteur colonne qui représente le polynôme v sera (c,a,b).

Notes

Summary

6m 48s

Exemples.

(1) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$v = a + bx + cx^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \qquad p = -x^2 + 1$

$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{B}' = (x^2, 1, x)$

$v = cx^2 + a \cdot 1 + b \cdot x$

$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \qquad [p]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{B}'' = (x + 1, x - 1, x^2)$

$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1) = x$

$\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) = 1.$

$a + bx + cx^2 = a\left[\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)\right] + b\left[\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)\right] + c \cdot x^2$

$= (x+1)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + (x-1)\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + x^2 \cdot c$

(4) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

4.11 Coordonnées par rapport à une base

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Si on fait un exemple concret, je pourrais prendre p, le polynôme p = $-x^2 + 1$ et ici si je représente p par rapport à la base B, je vais trouver (1,0,-1) mais si je représente p par rapport à la base B', je vais trouver (-1,1,0). Enfin, je vais me donner une base encore plus compliquée. Il n'est pas si évident de savoir comment écrire ce vecteur-là en termes de cette base donc je vais d'abord faire un peu de calcul. J'aimerais vous faire remarquer que si je j'ai 1/2 (x + 1) + 1/2 (x - 1) = x. Et si j'ai également 1/2 (x + 1) - 1/2 (x - 1) = 1. Cela va m'aider à écrire le vecteur v en termes de cette base. Donc a + bx + cx^2 = a(1/2 (x + 1) - 1/2 (x - 1)) + b(1/2 (x + 1) + 1/2 (x - 1)) + cx^2 L'idée est de rester dans cette base ordonnée donc je réécris un peu. Le coefficient de x + 1, qu'est-ce que j'ai ? J'ai (1/2)a + (1/2)b, pour le coefficient de x - 1, j'ai (-1/2)a + (1/2)b. Et le coefficient de x^2, c'est c. Donc du coup, le v représenté par rapport à la base B'' est égal à (j'écris les coordonnées) (1/2 a + 1/2 b, (-1/2)a + 1/2 b, c).

Notes

Summary

8m 33s

Exemples.

(1) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (1, x, x^2)$

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

(2) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (x^2, 1, x)$

(3) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (x+1, x-1, x^2)$

(4) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous voyez, cela change énormément donc le choix de base est très important. Les colonnes qui représentent un vecteur par rapport à une base dépendent fortement de la base. Maintenant je vais changer d'espace vectoriel et faire un quatrième exemple. Voici la base habituelle qu'on aime bien Voici les matrices, on les a nommées par l'endroit où la coordonnée est non-nulle. Je me donne une matrice, donc un vecteur quelconque. Soit [voir écran], une matrice 2 x 2 à coefficients réels et j'écris le vecteur colonne qui représente cette matrice par rapport à la base B qui est fixée ici et on voit très bien comment faire parce qu'on a choisi la base qui est la base la plus simple. Donc j'ai a fois le premier vecteur, b fois le deuxième, c et d. Donc pour autant qu'on choisisse une base simple, c'est très facile de voir les coordonnées d'un vecteur. Mais dès le moment où on choisit une base un peu plus compliquée, c'est plus difficile de voir quelles sont les coordonnées. Ensuite, nous aborderons la question : pourquoi changer de base si on a une base de préférence, mais il y a des raisons où parfois c'est convenable.

Notes

Summary

11m 03s