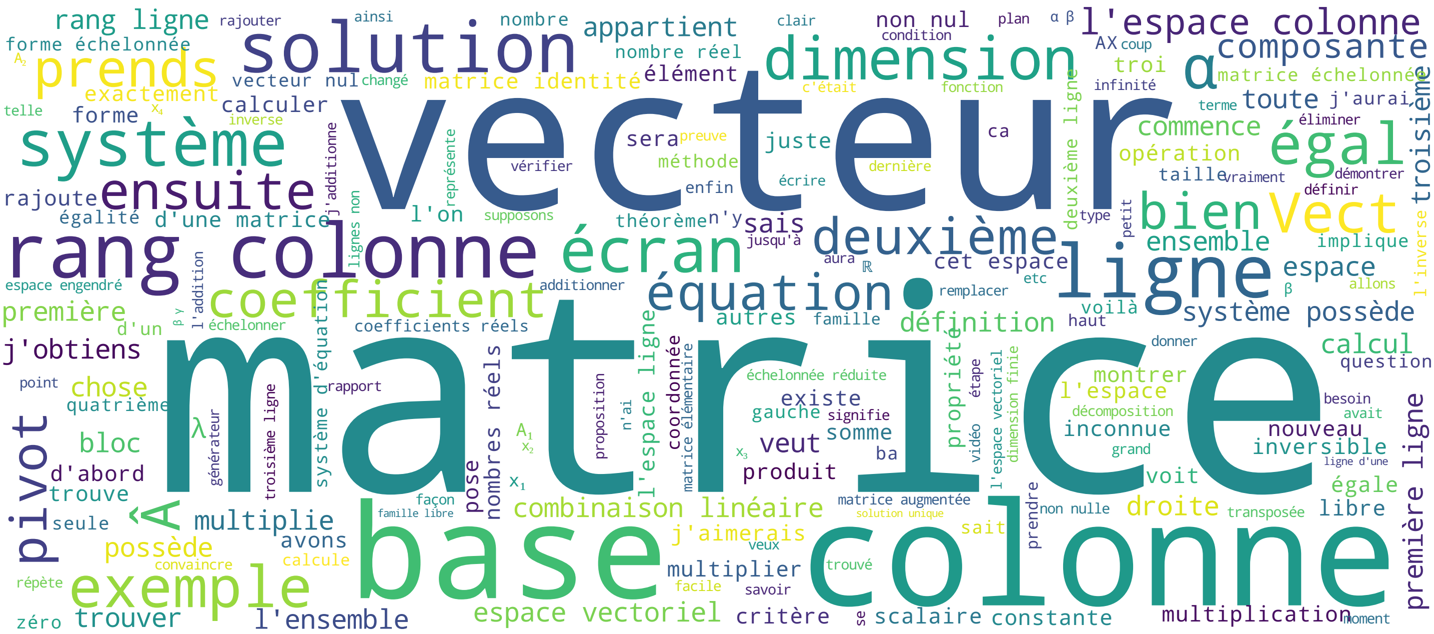
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

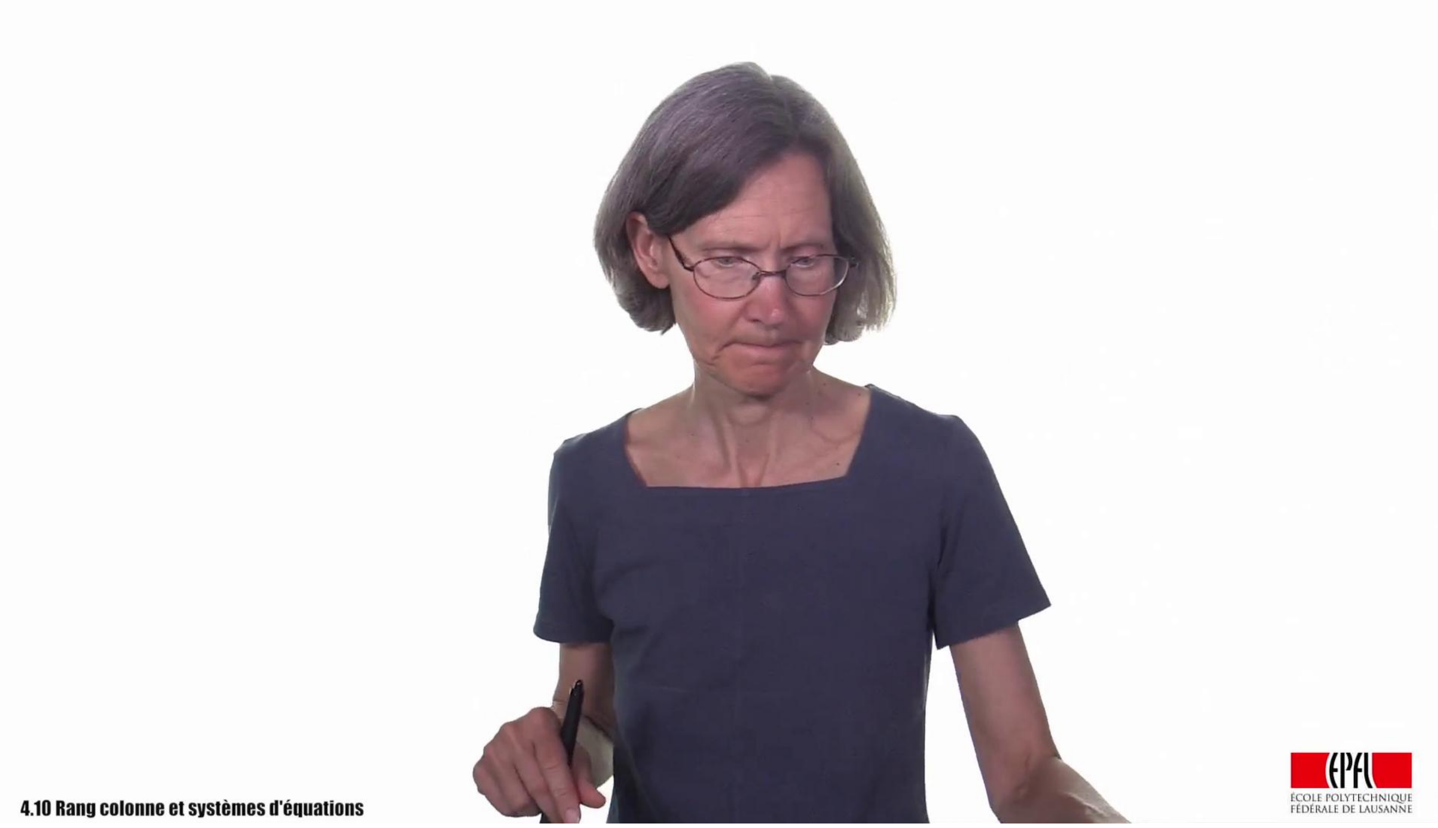
4.10 Rang colonne et systèmes d'équations

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



EPFL



Nous avons beaucoup travaillé avec l'espace-colonne et l'espace-ligne d'une matrice ainsi que le rang-colonne et le rang-ligne d'une matrice et maintenant, nous allons appliquer le rang-colonne. La question est de savoir quand est-ce qu'un système possède des solutions ou non.

Notes

Summary

0m 03s

$$\text{Soit}\quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \text{un système.}$$

Posons A la matrice des coefficients et $\hat{A}$ la matrice augmentée du système.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une solution du système $\iff$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Don

4.10 Rang colonne et systèmes d'équations

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc je me donne un système d'équations linéaires. Pour fixer la notation, Posons A la matrice des coefficients, et $\hat{A}$, la matrice augmentée. Je me donne n nombres réels $(\alpha_1,\dots, \alpha_n)$ qui forment un vecteur dans R^n. Je sais que ce vecteur est une solution si et seulement si toutes les équations sont vérifiées. Je vais écrire cela de façon différente : $\alpha_1,\dots, \alpha_n$ est une solution, si et seulement si, [voir écran] Si on compare cela avec le système en haut, si je lis la première coordonnée des vecteurs-colonne, j'aurai $\alpha_1 a_{11}$, $\alpha_2 a_{12}$, $\alpha_n a_{1n}$ ça c'est le côté gauche de notre système, donc cela doit être égal à b_1. On a la même chose pour chaque composante. C'est seulement une autre façon d'écrire le système. Au lieu de prendre la grande matrice A, on prend les colonnes de A. Donc ceci est une solution si et seulement si on a cette égalité-là. De cela, on peut déduire la chose suivante. Le système possède une solution si et seulement si cette colonne-là appartient à l'espace colonne de A.

Notes

Summary

0m 19s

Je m'arrête, j'aimerais vous convaincre de cette phrase-là. Supposons que le système possède une solution. À ce moment-là, j'ai cette l'égalité et c'est bien vrai que $(b_1,..., b_m)$ est une combinaison linéaire des colonnes de A, donc cela appartient à l'espace colonne de A. Maintenant, supposons que $(b_1,..., b_m)$ appartient à l'espace colonne, Alors cela veut dire que je peux aller trouver des coefficients de ces colonnes faire la combinaison linéaire, et je trouve $(b_1,..., b_m)$. Donc cela veut dire qu'on a une solution. Donc ceci est vrai. Maintenant, je pose une autre notation. Soient $C_1,..., C_n$, les colonnes de A. Alors je récris cette phrase : "le système possède une solution si et seulement si $(b_1,..., b_m)$ est dans l'espace colonne" bon appelons ça b, donc si et seulement si b appartient à $Vect(\{C_1,..., C_n\})$, et ça c'est si et seulement si $Vect(\{C_1,..., C_n\})=Vect(\{C_1,..., C_n, b\})$, où on a ajouté b Cela veut dire que ça ne change rien de rajouter b, parce que b est déjà dans cet espace-là. De cela, je tire un énoncé.

Notes

Summary

2m 36s

$C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

Le système $AX = b$ possède une solution $\iff$

$$\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n, b)$$

$$\iff \underbrace{\text{rang colonne de } A} = \underbrace{\text{rang colonne de } \hat{A}}.$$

Je rappelle on a que $C_1,\dots, C_n$ sont les colonnes de A, le système $AX = b$ possède une solution si et seulement si, (donc je répète ce qu'on a vu dans le tableau précédent) on a que $Vect(\{C_1,\dots, C_n\})$ est égal à $Vect(\{C_1,\dots, C_n, b\})$, où j'ai mis le b dedans, et ça c'est si et seulement si le rang colonne de A, qui est la dimension de ce sous-espace, est égal au rang colonne de $\hat{A}$, qui est la dimension de ce sous-espace-là. C'est parce qu'on a de toute façon une inclusion. Ceci peut être une façon de déterminer si un système possède une solution ou non. Maintenant je l'applique à un exemple, mais avant de faire cela je répète ce qu'on a vu. Donc je prends les colonnes de la matrice des coefficients, j'ai la colonne des constantes soit le b, et le système $AX = b$ possède une solution si et seulement si je calcule le rang colonne de la matrice des coefficients et j'obtiens exactement la même chose que le rang colonne de la matrice $\hat{A}$.

Notes

Summary

4m 20s

Deux exemples.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

rang colonne de A = rang ligne de A^T

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang colonne de $A = 2$.

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Premier système : rang colonne de $\hat{A}$

Regardons ces deux exemples. J'ai construit des exemples ici où la matrice des coefficients est pareille dans les deux systèmes, et seule la colonne des constantes change. Posons A, la matrice des coefficients : [voir écran] Comme j'ai ce critère où je dois comparer le rang colonne de A au rang colonne de $\hat{A}$ je vais d'abord calculer le rang colonne de A et ceci est égal au rang ligne de A^T. Donc je forme la matrice transposée : [voir écran] Je vais échelonner cette matrice et ensuite il sera facile de voir quel est le rang ligne. Donc je rajoute *-2* fois la première ligne à la deuxième, ainsi que *-1* fois la première à la troisième, et ensuite j'additionne la première et la quatrième. Maintenant presque tout disparaît, les deux dernières lignes deviennent nulles, donc le rang colonne de A est *2*. Maintenant, je me demande quel est le rang colonne de $\hat{A}$ pour le premier système. Je dois calculer le rang colonne de $\hat{A}$, mais je vais éviter quelques étapes car je n'ai pas besoin de refaire un calcul. En plus de savoir le rang colonne de A, je sais que j'ai une base de l'espace colonne de A et cette base ce sont les vecteurs *(1, 1, 3)* et *(0, 1, 1)*.

Notes

Summary

5m 54s

Deux exemples.

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

rang colonne de A = rang ligne de A^T

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang colonne de $A = 2$.

base de l'espace colonne de A

$\{(1,1,3), (0,1,1)\}$

Premier système : rang colonne de $\hat{A}$

rang colonne de $\hat{A} = \dim \operatorname{Vect}((1,1,3),(2,3,7),(1,-1,1),(-1,2,0),(1,2,4))$

$= \dim \operatorname{Vect}((1,1,3),(0,1,1),(1,2,4))$

(

4.10 Rang colonne et systèmes d'équations

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc c'est exactement ce que me dit ce calcul. Nous l'avons déjà vu. Ici on a une matrice et on fait l'espace des lignes puis on échelonne la matrice, les lignes non-nulles forment une base de l'espace-ligne. Comme j'ai changé les colonnes en lignes, je reviens aux colonnes et ceci est une base de l'espace colonne de *A*. Maintenant, pour le premier système, je dois calculer le rang colonne de *Â*. Le rang colonne de *Â* est la dimension du *Vect* des colonnes de *Â*. Et je sais qu'ici, le *Â* a en plus le vecteur *(1, 2, 4)*. Mais je sais que pour ces quatre premiers vecteurs, je peux les remplacer par ces deux-là donc c'est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par *(1, 1, 3)*, *(0, 1, 1)* et *(1, 2, 4)*. Maintenant je dois vraiment faire un calcul parce que je dois voir si cet espace-là est aussi de dimension deux. ou bien si ça agrandit et c'est de dimension trois. Donc je vais de nouveau faire un calcul. Je prends la matrice [voir écran] Je vais l'échelonner : [voir écran] Une forme échelonnée de cette matrice, c'est [voir écran].

Notes

Summary

8m 16s

Deux exemples.

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 5 \end{aligned}$$

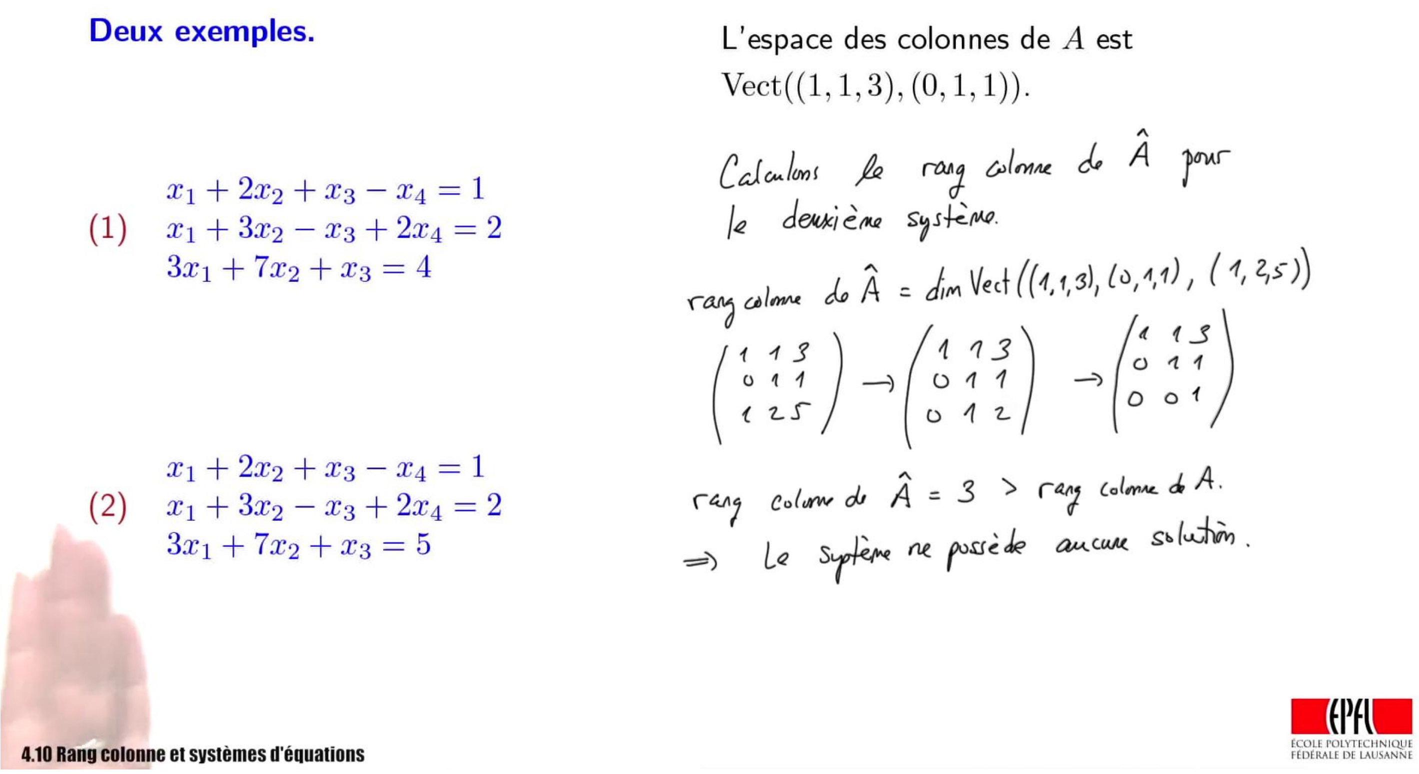
L'espace des colonnes de A est $\mathrm{Vect}((1,1,3),(0,1,1))$.

Donc la dimension est égale à deux et donc par notre critère, le rang colonne de A est le même que le rang colonne de $\hat{A}$ et donc le système possède une solution. Donc voilà le raisonnement. Je commence avec la matrice des coefficients, je calcule le rang colonne de cette matrice, je l'ai calculé bon c'était deux. Ensuite, en calculant le rang colonne j'ai même trouvé une belle base donc je prends cette base-là, ensuite je dois calculer le rang colonne de la matrice augmentée. Maintenant l'espace colonne de cette matrice-là, c'est le sous-espace engendré par tous ces vecteurs et comme je sais que les quatres premiers vecteurs-là engendrent le même espace engendré par ces deux vecteurs-ci, je vais les remplacer par ces deux. Je rajoute la colonne des constantes, je fais de nouveau un calcul, et je vois que le rang, la dimension de cet espace-là donc le rang colonne de $\hat{A}$ est égal à deux. Par le critère, c'est le même et donc le système possède une solution. Passons au deuxième exemple. Je vais reprendre ce que j'ai utilisé avant. L'espace colonne de A est seulement le *Vect* de la base que nous avons trouvée. Maintenant, je dois considérer ici cette colonne des constantes qui est différente.

Notes

Summary

9m 52s



Donc ici je calcule le rang colonne de $\hat{A}$, pour le deuxième système. Alors le rang colonne de $\hat{A}$ est la dimension de *Vect* de... comme avant, je ne vais pas prendre toutes les colonnes, je vais seulement prendre les colonnes qui me donnent une base, ces deux vecteurs-là, et je rajoute la colonne des constantes. Je dois calculer la dimension de cet espace donc je change les vecteurs en lignes. Je pense que vous voyez ce qui va se passer parce que j'ai très peu changé la colonne des constantes. Il ne reste qu'une étape, l'échelonnage : [voir écran] Donc, le rang colonne, c'est la dimension de l'espace des lignes ici, qui est égal à trois, qui est plus grand que le rang colonne de A et cela implique que le système ne possède aucune solution. C'est un critère qui pourrait être utile justement quand on a plusieurs systèmes avec la même matrice des coefficients et que seule la colonne des constantes varie.

Notes

Summary

11m 22s