ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice (fin)

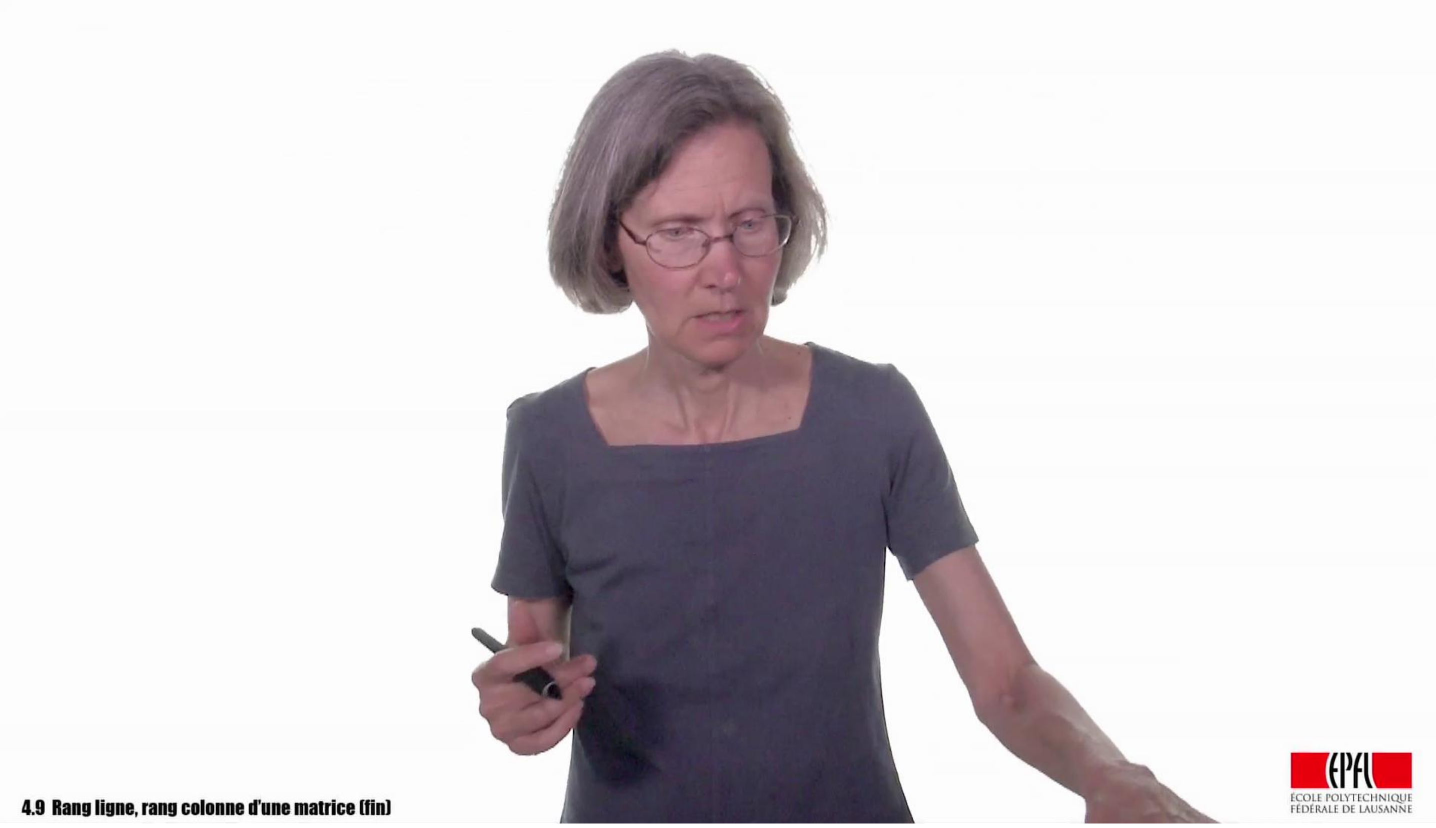
Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman

Search MOOC

Video

EPFL

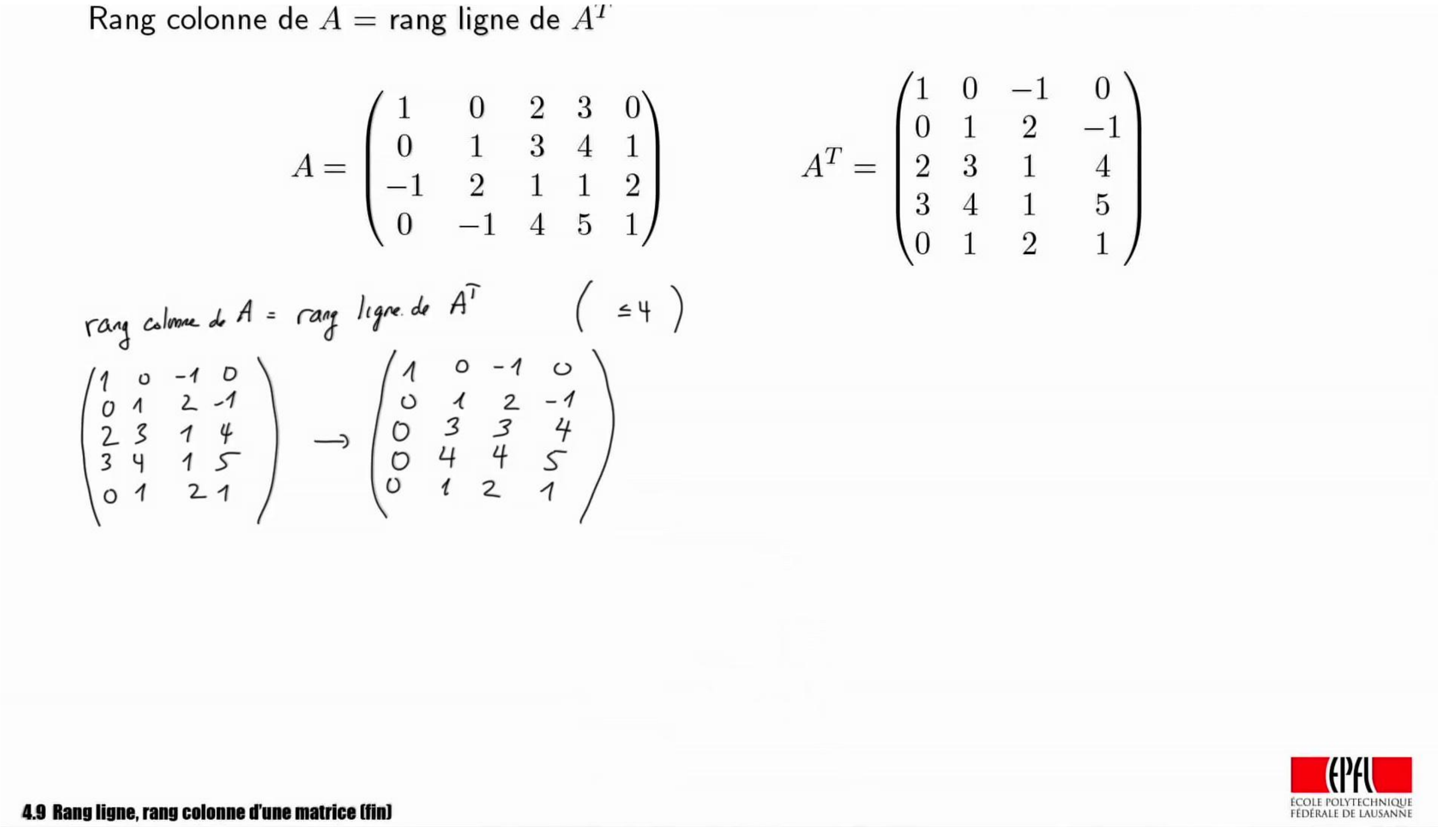


Dans les deux vidéos précédentes, nous avons développé une très bonne méthode pour calculer le rang ligne d'une matrice mais nous n'avons pas du tout parlé du rang colonne de la matrice mais comme on sait que le rang colonne d'une matrice est égal au rang ligne de la transposée, on a une méthode pour calculer le rang colonne aussi.

Notes

Summary

0m 04s



Je vais juste faire un exemple. Donc, le rang colonne de A c'est la même chose que le rang ligne de A^T. Maintenant, je vois très bien comment travailler. Je me donne une matrice Et puis je fais la transposée de cette matrice. Je vérifie que j'ai bien écrit, c'est juste. Pour calculer le rang colonne de A égal au rang ligne de A^T. On va juste faire en passant une remarque. Le rang ligne de A^T est au plus 4, car c'est dans R^4. Normalement, on pourrait aussi dire que c'est au plus 5 car il y a cinq vecteurs Mais ça ne sert à rien, c'est au plus 4. Maintenant, je vais échelonner cette matrice-là. J'échelonne. Vous avez remarqué qu'il y a beaucoup d'échelonnages dans ces vidéos. Ici je vais vous montrer quelque chose parce que je vais faire un raccourci. Je garde les deux premières lignes et puis maintenant je fais -2 fois la première que j'additionne à la troisième. Donc j'ai $(0,3,3,4)$. Je fais -3 fois la première que j'additionne à la quatrième. $(0,4,4,5)$. Et puis je garde la dernière. Et maintenant, je continue, je garde les deux premières lignes.

Notes

Summary

0m 21s

Rang colonne de A = rang ligne de A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rang colonne de A = rang ligne de A^T (≤ 4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

linéairement indépendant

$\Rightarrow$ rang ligne de $A^T \geq 4$

$\Rightarrow$ rang ligne de $A^T = 4$

rang colonne de $A = 4$. L'espace colonne de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, de dimension $4 \Rightarrow$

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice (fin)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je vais additionner *-3* fois la deuxième à la troisième. J'ai *(0,0,-3,7)*. Je vais faire *-4* fois la deuxième que j'additionne à la quatrième. Ça fait *(0,0,-4,9)* et puis maintenant je fais *-1* fois la deuxième que j'additionne à la dernière Donc j'ai *(0,0,0,2)*. Et maintenant, j'arrête, parce que j'ai dit que le rang colonne de A c'est le rang ligne de A^T qui est au plus *4*. Maintenant, je vois que si je prends ces quatre lignes-là, ou bien la troisième au lieu de la quatrième, c'est égal, Ces lignes-là sont linéairement indépendantes parce que si je les mets dans une matrice, cette matrice est échelonnée donc ces lignes-là sont linéairement indépendantes Donc je sais que le rang ligne de cette matrice c'est au moins *4* On a déjà constaté que c'est au plus *4* donc le rang ligne de cette matrice c'est égal à *4*. Du coup, le rang colonne de A est égal à *4*. Mais l'espace colonne de A est un sous-espace de R^4: les colonnes appartiennent à R^4, et c'est un sous-espace qui est de dimension *4*. Donc par le théorème que nous avons vu.

Notes

Summary

1m 55s

Rang colonne de A = rang ligne de A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rang colonne de A = rang ligne de A^T $\quad (\leq 4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

linéairement indépendant

$\Rightarrow$ rang ligne de $A^T \geq 4$

$\Rightarrow$ rang ligne de $A^T = 4$

rang colonne de $A = 4$. L'espace colonne de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, de dimension $4 \Rightarrow$ l'espace colonne de $A = \mathbb{R}^4$. Base de l'espace colonne de $A = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$.

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice (fin)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'espace colonne de A est égal à R^4. Par exemple, ici, si je dis, donnez-moi une base de l'espace colonne de A vous pouvez très bien travailler comme d'habitude: je fais la transposée, j'échelonne et je prends des colonnes non-nulles ou bien ici je prends ces quatre lignes-là. Ou, sinon une base de l'espace colonne ce serait juste la plus belle base qu'on peut imaginer de R^4. On n'a pas besoin de prendre une base compliquée quand on sait que c'est R^4. Donc une base qu'on pourrait prendre, c'est juste la base dite canonique. Maintenant, dans cette vidéo, nous avons développé une méthode. On a d'abord défini ce qu'est le rang ligne et le rang colonne Je prétends que ce sont des invariants importants. Après on a développé une méthode très efficace, basée sur l'élimination de Gauss, pour trouver le rang ligne et le rang colonne d'une matrice quelconque.

Notes

Summary

3m 41s