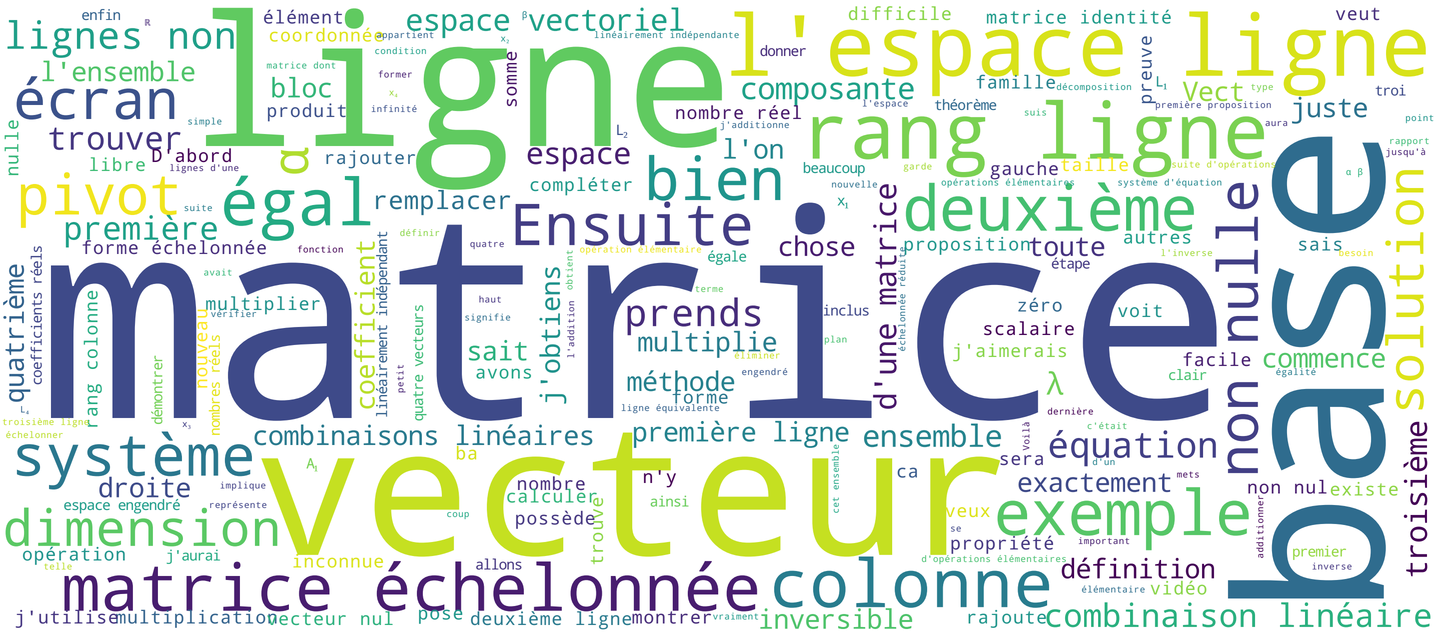
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice (suite)

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Proposition. Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ des matrices lignes équivalentes. Alors l'espace ligne de A est égal à l'espace ligne de B. Par conséquent, *rang ligne de* $A =$ *rang ligne de* B.

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice (suite)

Dans cette vidéo, nous allons voir une méthode efficace pour calculer le rang ligne ou bien le rang colonne d'une matrice. Comme je prétends que c'est un invariant d'une matrice qui est important, c'est bien d'avoir une méthode efficace. Ensuite nous l'appliquerons aussi à notre problème de la complétion en une base. C'est une application assez jolie.

Notes

Summary

0m 04s

Proposition. Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ des matrices lignes équivalentes. Alors l'espace ligne de A est égal à l'espace ligne de B. Par conséquent, *rang ligne de* $A =$ *rang ligne de* B.

Preuve Chaque ligne de A est une combinaison linéaire des lignes de B.

Voici la proposition. Je me donne deux matrices *m x n* qui sont lignes équivalentes. Je rappelle que cela signifie que l'on peut faire une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice *A* et on obtient la matrice *B* Comme ces opérations élémentaires sont inversibles, je peux également commencer avec la matrice *B* et faire une suite d'opérations élémentaires et revenir à la matrice *A*. L'énoncé est que l'espace ligne de *A* est le même sous-espace que l'espace ligne de *B*. Par conséquent, le rang ligne de *A*, qui est la dimension de cet espace, serait égal au rang ligne de *B*. La preuve n'est pas difficile. On doit seulement constater que chaque ligne de *A* est une combinaison linéaire des lignes de *B*. Pourquoi cela ? Parce que si je commence avec la matrice *B* et que je fais une opération élémentaire, j'obtiens une matrice dont les lignes sont des combinaisons linéaires des lignes de *B*. Ensuite, je fais encore une opération élémentaire et j'obtiens une troisième matrice dont les lignes sont des combinaisons linéaires de la deuxième, et donc les combinaisons linéaires des lignes de *B*.

Notes

Summary

0m 28s

Proposition. Soit A une matrice échelonnée. Alors le rang ligne de A est égal au nombre de pivots de A et une base de l'espace ligne de A est formée par les lignes non nulles de A.

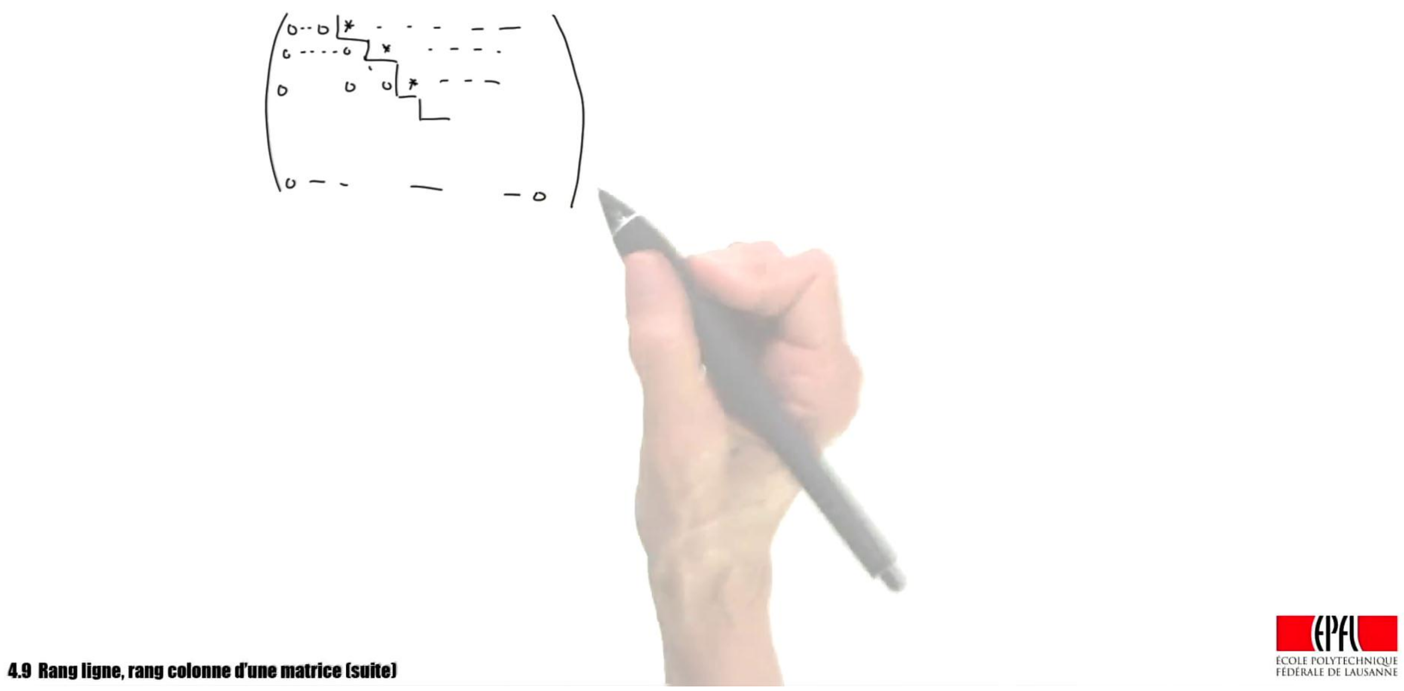
Et ainsi de suite, donc à la fin j'obtiens A et les lignes de A sont des combinaisons linéaires des lignes de B. Mais comme l'espace ligne de A n'est que le sous-espace engendré par ces lignes, on obtient que l'espace ligne de A est inclus dans l'espace ligne de B. Par le même raisonnement, chaque ligne de B est une combinaison linéaire des lignes de A et donc l'espace ligne de B est inclus dans l'espace ligne de A. Du coup, on a la première affirmation, l'espace ligne de A est égal à l'espace ligne de B. Donc il n'y a rien à démontrer après pour voir que le rang ligne de A est égal au rang ligne de B. C'est la première chose. C'est ça qui va nous donner une méthode pour calculer le rang ligne.

Notes

Summary

1m 47s

Proposition. Soit A une matrice échelonnée. Alors le rang ligne de A est égal au nombre de pivots de A et une base de l'espace ligne de A est formée par les lignes non nulles de A.



D'abord on doit voir quel est le rang ligne d'une matrice échelonnée, donc je me donne une matrice échelonnée cette fois. Alors le rang ligne de *A* est égal, c'est tout simple, est égal au nombre de pivots de *A* et en plus, une base de l'espace ligne de *A* consiste simplement en les lignes non-nulles de *A*. Ici la preuve est très simple, on doit seulement regarder la forme d'une matrice échelonnée donc je me donne une matrice échelonnée. Elle commence quelque part, il y a peut-être des zéros, après ça commence non-nul: un pivot, et ça continue. Ensuite, j'ai des zéros, là, et peut-être un peu plus loin il y a un deuxième pivot. Et puis encore des zéros... jusqu'en dessous, et ensuite ça commence, je ne sais pas où, un peu plus loin, c'est un troisième pivot, etc. Donc on a une forme comme cela, et éventuellement en bas on a des lignes nulles. Si vous faites une combinaison linéaire de ces lignes-là, vous voyez bien que la seule façon d'obtenir zéro, c'est que le coefficient de la première ligne soit *0*, parce que c'est la seule coordonnée ici. Le coefficient de la deuxième ligne doit donc être zéro, etc. Donc ces lignes sont linéairement indépendantes.

Notes

Summary

3m 03s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Les lignes non-nulles de cette matrice A sont linéairement indépendantes. Et comme les lignes non-nulles engendrent l'espace ligne, ça forme une base de l'espace ligne. Cela nous donne une méthode pour calculer le rang ligne de n'importe quelle matrice. Je me donne une matrice B, m x n, on la réduit à une matrice échelonnée. Les lignes non-nulles de la matrice échelonnée forment une base de l'espace ligne de B. Donc ici, j'utilise la première proposition donc j'ai B que j'ai réduit à une matrice échelonnée. Cette matrice échelonnée est ligne équivalente à B. Par la première proposition. On sait que l'espace ligne de B est égal à l'espace ligne de cette matrice échelonnée et par cette proposition, les lignes non-nulles de la matrice échelonnée forment une base de l'espace ligne de cette matrice et donc de l'espace ligne de B. Donc j'utilise les deux propositions, d'abord, j'ai l'espace ligne de B qui est le même que l'espace ligne de la matrice échelonnée obtenue à partir de B parce que c'est une matrice ligne équivalente et puis par cette proposition je sais que je n'ai qu'à prendre les lignes non-nulles donc à la fois j'ai une base et je connais le rang ligne. Faisons un exemple.

Notes

Summary

4m 26s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

rang ligne de $A \leq 5$ car l'espace ligne de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^5$.

rang ligne de $A \leq 4$ car l'espace ligne est engendré par 4 vecteurs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

L_1, L_2, L_3, L_4 $\qquad$ $L_1, L_2, -L_1+L_3, L_4$

Je me donne cette matrice et je veux en calculer le rang ligne. D'abord, je constate que le rang ligne de *A* est au plus *5* car l'espace ligne de *A* est un sous-espace de R^5. Aussi, le rang ligne de *A* est au plus *4* car l'espace ligne est engendré par quatre vecteurs: les quatre lignes. Maintenant j'utilise la méthode, je vais échelonner cette matrice, à la fin j'aurai une forme échelonnée, qui est ligne équivalente à *A* et je prendrai les lignes non-nulles de cette matrice et cela me donnera une base de l'espace ligne de *A* et par conséquent je connais la dimension de l'espace, donc le rang ligne. J'échelonne. D'abord je vais éliminer ce *1*-là. Pour cela, je vais... ici je vais vous montrer cette idée de combinaison linéaire. Si je dis que j'ai les lignes ici L_1, L_2, L_3, L_4, ici je vais garder la première ligne et la deuxième. Et puis la troisième je vais la remplacer par *-1* fois la première plus la troisième. J'aurai L_1, c'est pareil, L_2, et ensuite j'ai $-L_1+L_3$. Je garde la ligne L_4. Vous voyez bien que là j'ai une matrice dont les lignes sont des combinaisons linéaires des lignes de la matrice précédente.

Notes

Summary

6m 44s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

rang ligne de $A \leq 5$ car l'espace ligne de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^5$.

rang ligne de $A \leq 4$ car l'espace ligne est engendré par 4 vecteurs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L_1, L_2, L_3, L_4 — $L_1, L_2, \underbrace{-L_1+L_3}_{L_3'}, L_4$ — $L_1, L_2, \underbrace{-2L_2+L_3'}_{L_3''}, \underbrace{L_2+L_4}_{L_4'}$ — $L_1, L_2, L_3'', L_4'+L_3''$

rang ligne de $A = 4$. Une base de l'espace ligne de A est $\{(1,0,2,3,0), (0,1,3,4,1), (0,0,-7,-10,0), (0,0,0,-1,2)\}$.

Maintenant, je vais continuer à échelonner... donc je garde la première ligne, ainsi que la deuxième. Ça c'est L_1, L_2. Maintenant la troisième, je vais la remplacer par - $2L_2$ + L_3'. Ici je devrais mettre, ça c'est un L_3'. Donc j'ai *(0 0 -7 -10 0)*. Et la quatrième ligne, je vais la remplacer par la somme de la deuxième et la quatrième. Donc ici c'est L_2 + L_4 Je continue. Ensuite, dans la quatrième ici, je vais remplacer la quatrième par L_4' + L_3'' et j'ai *(0, 0, 0, -1, 2)*. Donc si je substitue tout le long ici j'aurai ici des lignes qui sont des combinaisons linéaires des lignes au début, donc déjà je mets en évidence le fait que j'avais utilisé avant. On voit qu'ici il y a quatre pivots donc le rang ligne de *A* est égal à *4* et une base de l'espace ligne de *A* est formé de ces lignes non-nulles. Encore une chose que l'on peut faire maintenant qui était beaucoup plus difficile avant, c'est que je sais qu'ici je suis dans R^5 donc j'ai une famille de vecteurs linéairement indépendante et je sais que je peux compléter cela en une base de R^5.

Notes

Summary

8m 58s

Application. Trouver une base de $W = \text{Vect}\{(1,0,1,-2,1),(0,0,-1,1,0),(2,0,1,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^5$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$.

Mais avant c'était très difficile, j'ai ces quatre vecteurs et je veux compléter en une base de R^5 bien je ne vois pas exactement ce qu'il faut rajouter, en tout cas pas ici, mais ici c'est très clair. Ici, si je regarde la matrice, où je rajoute ici il faut que je rajoute un vecteur qui est linéairement indépendant des vecteurs précédents là, donc si je regarde ici, le rang ligne de la matrice, je vais former une nouvelle matrice, je fais cette matrice en haut. Et il faut juste que je rajoute... ce que je vais rajouter c'est cela, le rang ligne de cette matrice-là est égal à *5*, et donc si je prends les lignes non-nulles de la matrice échelonnée, c'est une base de R^5. C'est beaucoup plus facile que ce qu'on a fait avant parce qu'on a des vecteurs dans un espace R^5 qui est de dimension *5* et même quand on sait que ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants on ne sait pas du tout comment les compléter en une base donc maintenant, on trouve une jolie base et après il est très facile de voir quel vecteur on peut rajouter pour former une base de R^5. Encore un exemple.

Notes

Summary

12m 01s

Application. Trouver une base de
$W = \mathrm{Vect}\{(1,0,1,-2,1),(0,0,-1,1,0),(2,0,1,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^5$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$.

On regarde W comme l'espace ligne d'une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On échelonne la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice (suite)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je me donne de nouveau un sous-espace de R^5. Donc c'est le sous-espace engendré par ces trois vecteurs-là. J'aimerais trouver une base de W et la compléter en une base de R^5. Donc ce que je fais, c'est que je pose ces vecteurs comme dans les lignes d'une matrice. On regarde nos vecteurs générateurs, là. On regarde W comme l'espace ligne d'une matrice A. Donc je pose mes vecteurs dans les lignes d'une matrice. Et trouver la dimension de W ou une base, c'est exactement la même chose que trouver le rang ligne de A ou bien une base de l'espace ligne de A. Et maintenant on a une méthode pour trouver cela. Donc j'échelonne A. Donc je le fais, ça ne prendra pas beaucoup de temps. Donc je vais remplacer la dernière ligne par - 2 fois la première plus la troisième. Et maintenant je vais faire la différence de la deuxième et la troisième ligne pour obtenir une ligne nulle. Donc maintenant je sais qu'une base de W est pareille à une base de l'espace ligne de A qui est exactement les lignes non-nulles de la forme échelonnée de A.

Notes

Summary

13m 35s

Application. Trouver une base de $W = \mathrm{Vect}\{(1,0,1,-2,1),(0,0,-1,1,0),(2,0,1,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^5$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$.

On regarde W comme l'espace ligne d'une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On échelonne la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de W = base de l'espace ligne de A = $\{(1,0,1,-2,1),(0,0,-1,1,0)\}$.

Comme rang ligne de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est 5, $\{(1,0,1,-2,1),(0,1,0,0,0),(0,0,-1,1,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

De plus, comme le rang ligne de cette matrice, donc je fais une matrice plus grande, c'est une matrice échelonnée, et donc le rang ligne c'est juste le nombre de lignes non-nulles. Le rang ligne est *5*, les vecteurs dans les lignes... où cet ensemble de vecteurs est une base de R^5. Donc c'est vraiment très facile avec cette méthode de commencer avec deux vecteurs et puis voir comment on peut compléter, déjà comment trouver une base d'un espace engendré par un ensemble de vecteurs et puis dès qu'on a cette base, on peut la compléter en une base de l'espace. C'est déjà très bien.

Notes

Summary

15m 26s