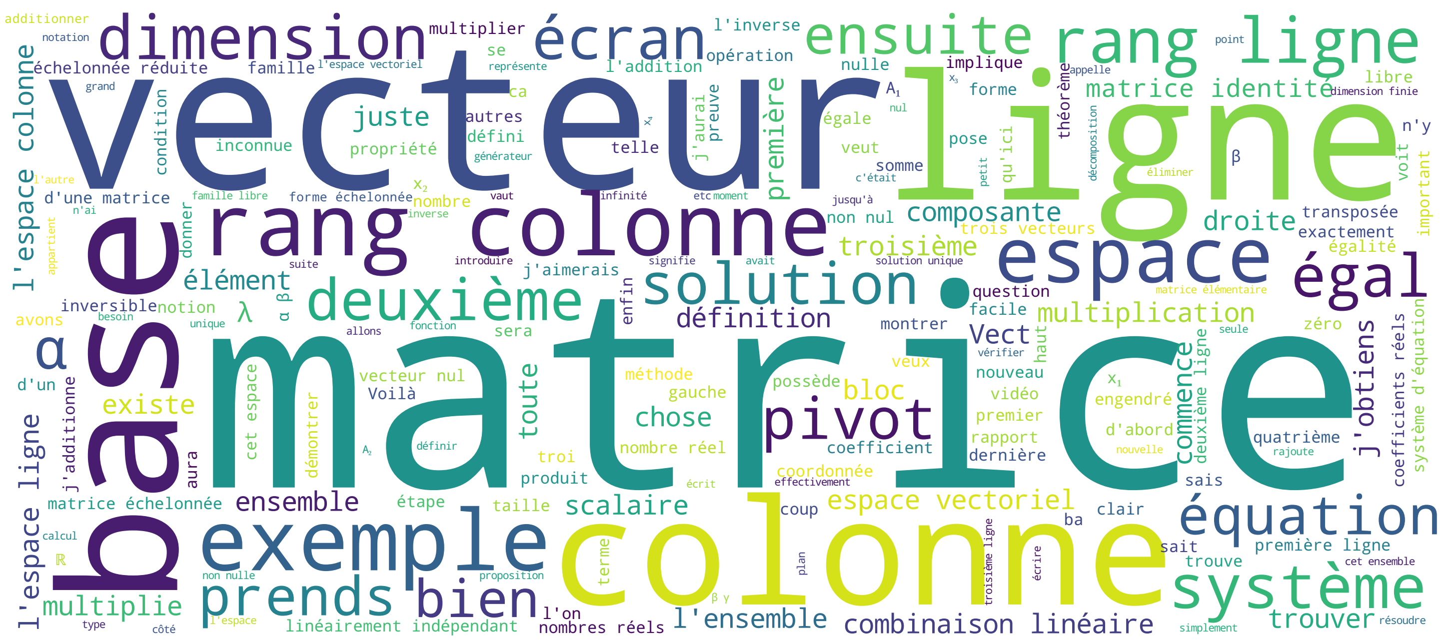
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Définition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(1) Le rang ligne de A est la dimension de l'espace ligne de A (sous-espace de $\mathbb{R}^n$) .

(2) Le rang colonne de A est la dimension de l'espace colonne de A (sous-espace de $\mathbb{R}^m$) .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Dans cette vidéo, je vais introduire une notion qui est très importante dans l'algèbre linéaire et c'est la notion de rang ligne et rang colonne d'une matrice. Je commence par donner la définition.

Notes

Summary

0m 04s

Définition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(1) Le rang ligne de A est la dimension de l'espace ligne de A (sous-espace de $\mathbb{R}^n$).

(2) Le rang colonne de A est la dimension de l'espace colonne de A (sous-espace de $\mathbb{R}^m$).

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

rang ligne de A = $\dim \mathrm{Vect}\{(1,2,3,4),(0,1,2,3),(0,0,1,2)\} = 3$

rang colonne de A = $\dim \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(2,1,0),(3,2,1),(4,3,2)\}$.

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je me donne une matrice *m x n* à coefficients réels. Je définis deux entiers associés à cette matrice. Le premier est le rang ligne. Le rang ligne de *A* est la dimension de l'espace ligne de *A*. Vous vous rappelez que quand on a une matrice on peut lui associer certains sous-espaces de R^n ou R^m. Le rang colonne de *A* est la dimension de l'espace colonne de *A*. Je commence par un exemple. Je me donne cette matrice-là, une matrice *3 x 4*. Je considère d'abord le rang ligne. Cela devrait être la dimension de l'espace ligne de *A* et l'espace ligne de *A* est le sous-espace de R^4 engendré par ces trois vecteurs-là. Donc ici on voit bien que ces vecteurs sont linéairement indépendants parce qu'ici on a les trois pivots et c'est la matrice échelonnée. Donc ici c'est égal à *3*, donc ça c'est le rang ligne. Maintenant je considère le rang colonne. Ça devrait être la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de cette matrice. Ce sous-espace-là c'est un sous-espace de R^3 donc c'est de toute façon de dimension au plus *3*, et je dois voir si c'est de dimension *3* ou *2* ou *1*.

Notes

Summary

0m 15s

Quelques constats. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

4.9 Rang ligne, rang colonne d'une matrice

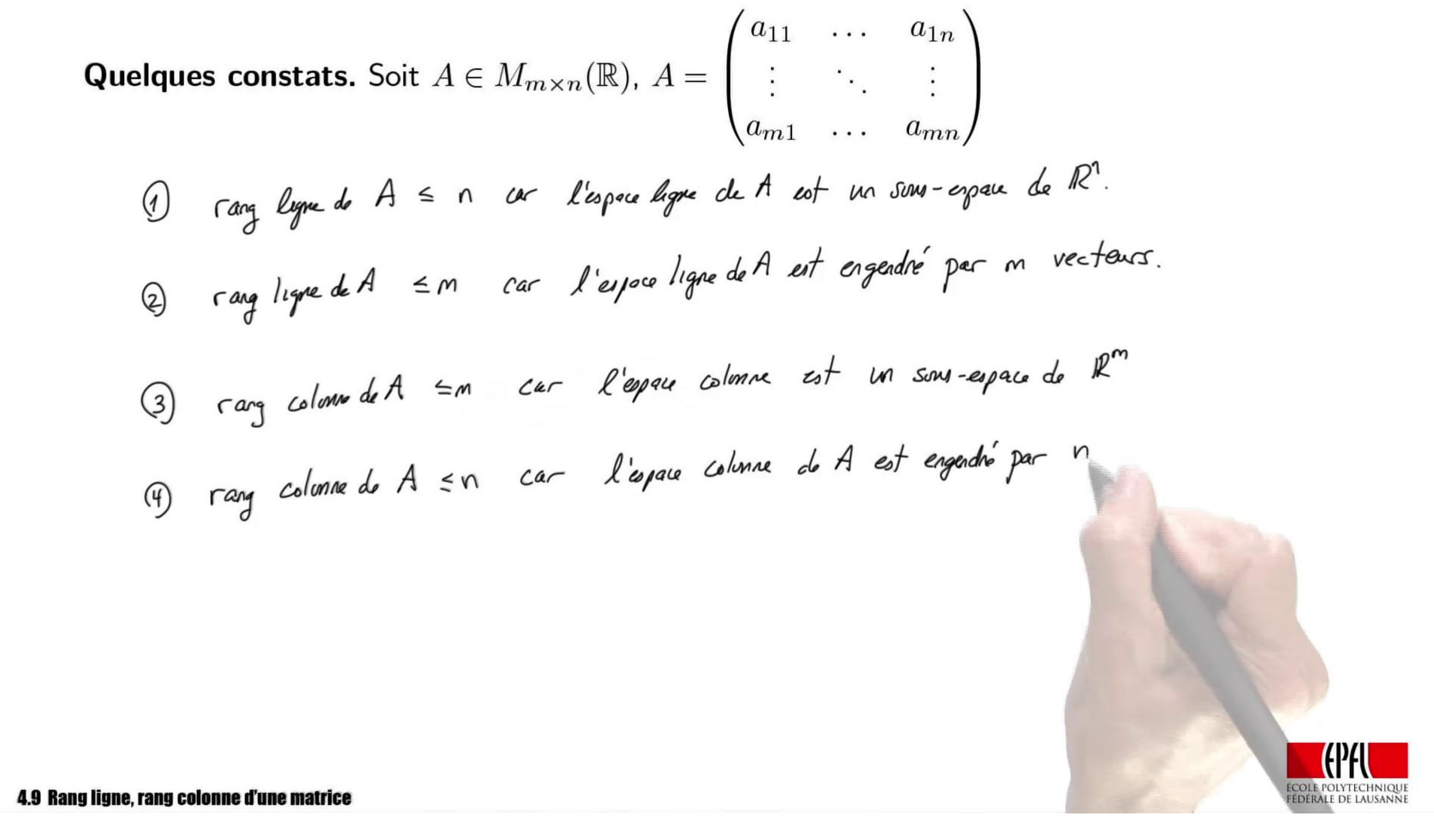
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je regarde et je vois que ce vecteur-là et ce vecteur sont linéairement indépendants. Deux vecteurs linéairement indépendants. Et si je rajoute le troisième, c'est juste une question, est-ce que ce vecteur-là s'écrit comme une combinaison linéaire de ces deux-là ? Donc si je fais *(3, 2, 1)*, est-ce que je peux l'écrire comme *α(1,0,0) + β(2,1,0)*? C'est clair que non parce qu'ici j'ai des zéros qui resteront zéro toujours, donc je n'aurai jamais le *1*. Ça c'est impossible. Donc ces trois vecteurs-là sont linéairement indépendants. Cela implique que le rang colonne de *A* est au moins *3*, mais l'espace colonne de *A* est un sous-espace de R^3 et donc le rang colonne est au plus *3*. Et du coup, on a que le rang colonne est égal à *3*. Il est important de souligner que cet espace-là et cet espace-là n'ont rien à voir l'un avec l'autre.

Notes

Summary

1m 59s

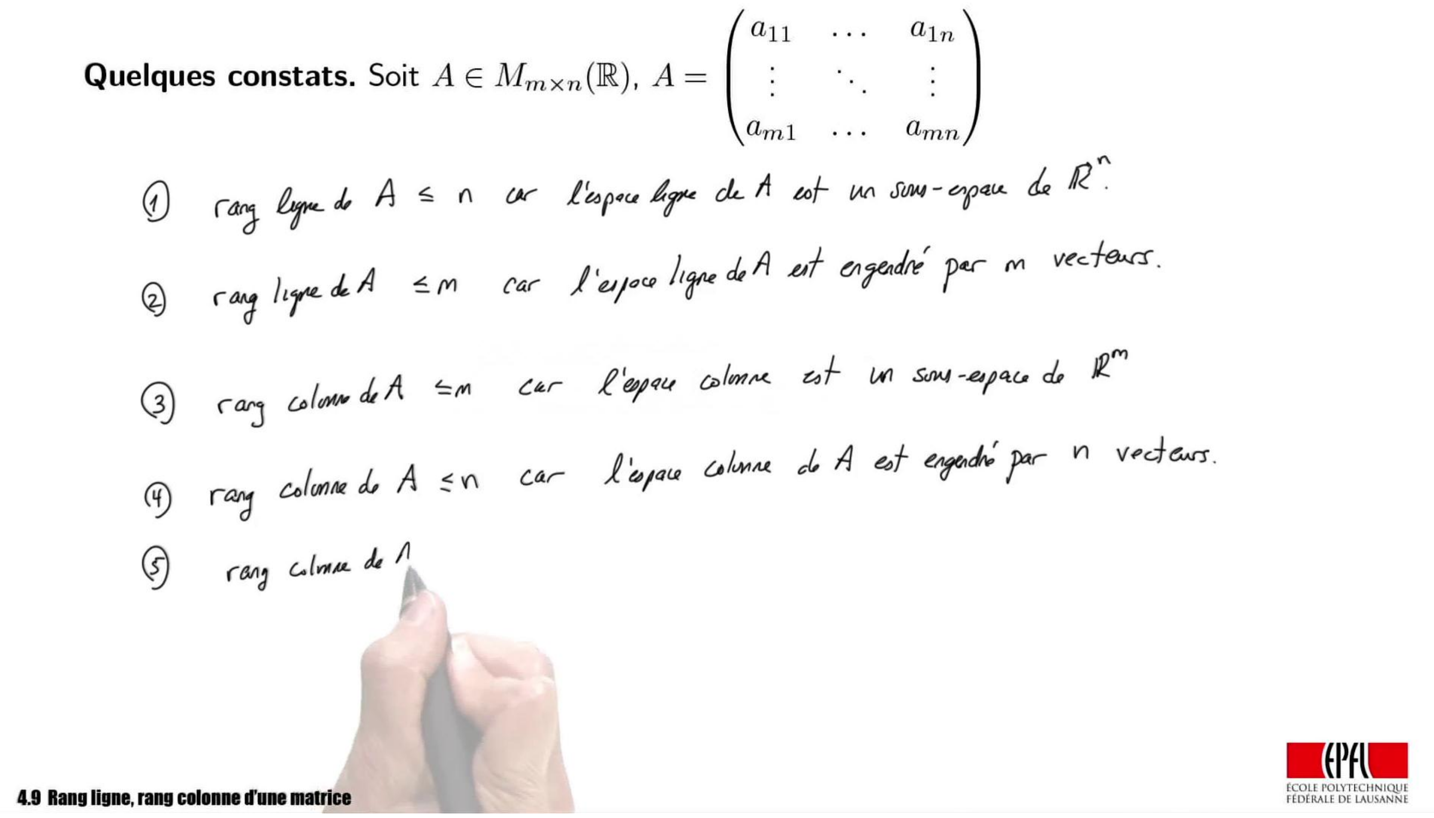


Maintenant je fais quelques constats qu'on peut faire immédiatement d'après la définition, donc je me donne une matrice *m x n* et la première chose qu'on peut constater, c'est que le rang ligne de *A* est au plus *n* car l'espace ligne de *A* est un sous-espace de R^n. Mais on peut aussi constater que le rang ligne de *A* est au plus *m* car l'espace ligne de *A* est engendré par *m* vecteurs. Ce sont les *m* lignes de *A*. Donc si on a un sous-espace qui est engendré par *m* vecteurs, on sait qu'on peut réduire pour trouver une base et donc la base a au plus *m* éléments. Le rang ligne est à la fois au plus *n* et au plus *m*. Maintenant, qu'en est-il pour le rang colonne ? Le rang colonne de *A*... bon, le rang colonne donc ces colonnes-là, je les vois comme des vecteurs dans R^m, donc ici est au plus *m* car l'espace colonne est un sous-espace de R^m. Aussi, le rang colonne de *A* est au plus *n* car l'espace colonne de *A* est engendré par *n* vecteurs. Je veux corriger ici en haut pour que ce soit très clair, ça c'est un *n*.

Notes

Summary

3m 30s



Enfin, juste pour faire un lien, le rang colonne de A est la même chose que le rang ligne de la transposée et le rang ligne de A est la même chose que le rang colonne de la transposée et ça c'est simplement parce que la transposée c'est un échange de lignes et de colonnes quand on fait la transposée d'une matrice. Donc ce sont les premiers constats. Dans la prochaine vidéo, nous verrons comment on peut de façon efficace calculer le rang ligne et le rang colonne.

Notes

Summary

5m 34s