ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.8 La dimension d'une somme de sous-espaces

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman

Search MOOC

Video

EPFL

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V de dimensions finies. Alors $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

4.8 La dimension d'une somme de sous-espaces

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Nous continuons d'étudier la dimension d'un espace vectoriel par rapport à ses sous-espaces. Dans cette vidéo, nous allons voir s'il existe une jolie formule pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels qui sont de dimension finie.

Notes

Summary

0m 04s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V de dimensions finies. Alors $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Preuve

4.8 La dimension d'une somme de sous-espaces

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Le théorème dit qu'on se donne un espace vectoriel V pas forcément de dimension finie (donc ce n'est pas une hypothèse). Par contre l'on se donne deux sous-espaces vectoriels de V qui sont, eux, de dimension finie. Puis je fais la somme de ces deux sous-espaces. Je vous rappelle que ce sous-espace-là signifie que je prends l'ensemble, la collection de vecteurs que j'obtiens en faisant la somme de un vecteur dans W_1 et un vecteur dans W_2. Alors la dimension de $W_1 + W_2$ est égale à la dimension de W_1 plus la dimension de W_2 moins la dimension de l'intersection ($W_1 \bigcap W_2$). C'est un peu comme si on faisait la cardinalité d'une réunion de deux ensembles, puis l'on doit soustraire ce qui est dans l'intersection sinon nous aurons compté ces éléments deux fois. C'est l'intuition qui dicte cette formule. Je vous démontre le théorème. La preuve est un peu délicate à faire. Donc on fait très attention. D'abord je fixe une base de l'intersection Donc $W_1 \bigcap W_2$ est un sous-espace de W_1 et de W_2 qui sont de dimension finie, donc $W_1 \bigcap W_2$ est aussi de dimension finie.

Notes

Summary

0m 22s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V de dimensions finies. Alors $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Preuve Posons $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une base de $W_1 \cap W_2$.

Soit $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_m\}$ une base de W_1.

Soit $\{u_1, \ldots, u_r, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ une base de W_2.

On montre que $\{u_1, \ldots, u_r, \ldots, u_m, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ est une base de $W_1 + W_2$.

$$\dim(W_1 + W_2) = m + s - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

4.8 La dimension d'une somme de sous-espaces

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc je fixe une base de cet espace Posons : $u_1, \ldots, u_r$, une base de $W_1 \cap W_2$ D'un autre côté, je sais que $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace de W_1. Comme $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une collection de vecteurs linéairement indépendants, je peux la compléter en une base de W_1. Soit $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_m$, une base de W_1. De même, $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace de W_2, donc je peux compléter l'ensemble de vecteur précédent en une base de W_2. Soit $u_1, \ldots, u_r, w_{r+1}, \ldots, w_s$, une base de W_2. Ce qu'on va démontrer est que si je prends l'ensemble $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_m, w_{r+1}, \ldots, w_s$ c'est une base de la somme $W_1 + W_2$. Et puis cela suffit parce qu'après je fais le calcul, j'obtiens que la dimension de $W_1 + W_2$ est la cardinalité de l'ensemble $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_m, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$, qui est $m + s - r$. C'est effectivement la dimension de W_1 plus la dimension de W_2 moins la dimension de l'intersection. Donc ce que je dois démontrer, c'est que l'ensemble précédent est une base de $W_1 + W_2$. Pour démontrer cela je dois faire deux choses, je dois montrer que c'est un ensemble générateur et ensuite je dois montrer l'indépendance linéaire.

Notes

Summary

1m 39s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V de dimensions finies. Alors $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Preuve Posons $\{u_1, \dots, u_r\}$ une base de $W_1 \cap W_2$.

Soit $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$ une base de W_1.

Soit $\{u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_s\}$ une base de W_2.

On montre que $S = \{u_1, \dots, u_r, \dots, u_m, w_{r+1}, \dots, w_s\}$ est une base de $W_1 + W_2$.

$$\dim(W_1+W_2) = m + s - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

S est générateur : Soit $v \in W_1 + W_2$, donc $v = x_1 + x_2$ où $x_i \in W_i$.

$x_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m$ et $x_2 = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_s w_s$.

$$v = x_1 + x_2 = (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_s w_s$$

4.8 La dimension d'une somme de sous-espaces

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ce qui est plus facile c'est l'aspect générateur donc je le fais en premier. Je note la famille de vecteurs *S*. Donc je prends un vecteur *v* qui est dans la somme, soit donc $v \in W_1 + W_2$, donc ce *v* est égal, disons à $x_1 + x_2$, où x_i appartient à W_i. Comme x_1 appartient à W_1, j'ai déjà une base de W_1 je peux donc écrire x_1 comme une combinaison linéaire, donc $x_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m$. Comme x_2 appartient à W_2 je peux l'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base de W_2, j'obtiens $x_2 = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_s w_s$. Maintenant je fais la somme. $v = x_1 + x_1$ et puis je vais faire les simplifications, donc on peut combiner les coefficients de u_1 jusqu'à u_r, donc j'obtiens $v = (\alpha_1+\beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_r+\beta_r)u_r$ + *[...]* Ensuite, j'ai les termes en *u* et *w*, j'obtiens finalement $v = (\alpha_1+\beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_r+\beta_r)u_r + \alpha_{r+1}u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_s w_s$. C'est une grande combinaison linéaire de vecteur de *S*, ainsi le vecteur *v* appartiens à l'espace engendré par les vecteurs de *S* (noté *Vect(S)*).

Notes

Summary

3m 58s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V de dimensions finies. Alors $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Preuve   Posons $\{u_1, \dots, u_r\}$ une base de $W_1 \cap W_2$.

Soit $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$ une base de W_1.

Soit $\{u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_s\}$ une base de W_2.

On montre que $S = \{u_1, \dots, u_r, \dots, u_m, w_{r+1}, \dots, w_s\}$ est une base de $W_1 + W_2$.

$$\dim(W_1 + W_2) = m + s - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

S est générateur: Soit $v \in W_1 + W_2$, donc $v = x_1 + x_2$ où $x_i \in W_i$.

$$x_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m \quad \text{et} \quad x_2 = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_s w_s.$$

$$v = x_1 + x_2 = (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_m u_m + \beta_{r+1} w_{r+1} + \dots + \beta_s w_s \in \mathrm{Vect}(S).$$

$\Longrightarrow$ S engendre linéairement $W_1 + W_2$.

4.8 La dimension d'une somme de sous-espaces

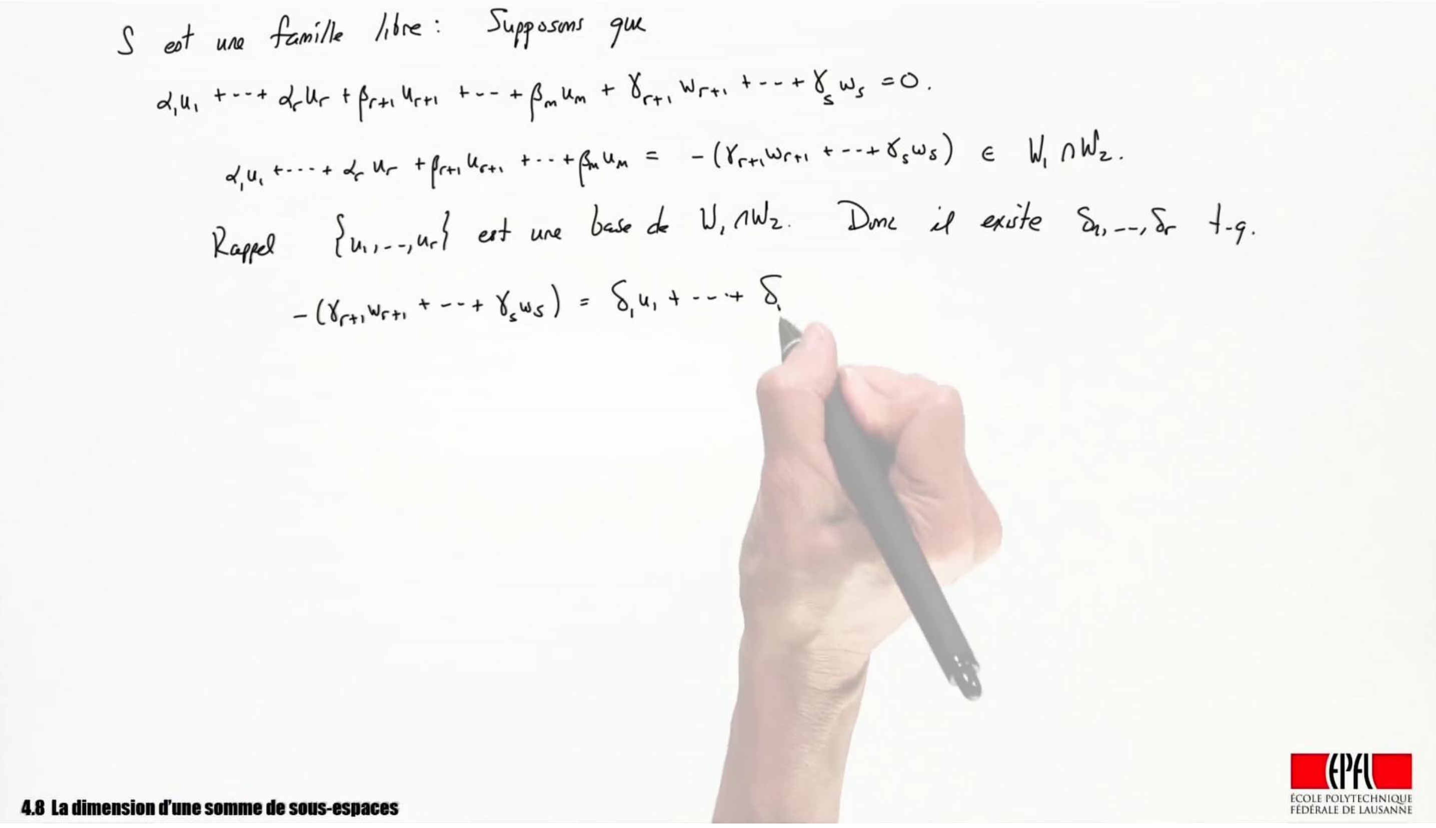
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Comme le vecteur v choisi était quelconque dans la somme, cela implique que S engendre linéairement l'espace $W_1 + W_2$. Donc ça c'est la première chose àqu'on avait à démontrer.

Notes

Summary

6m 00s

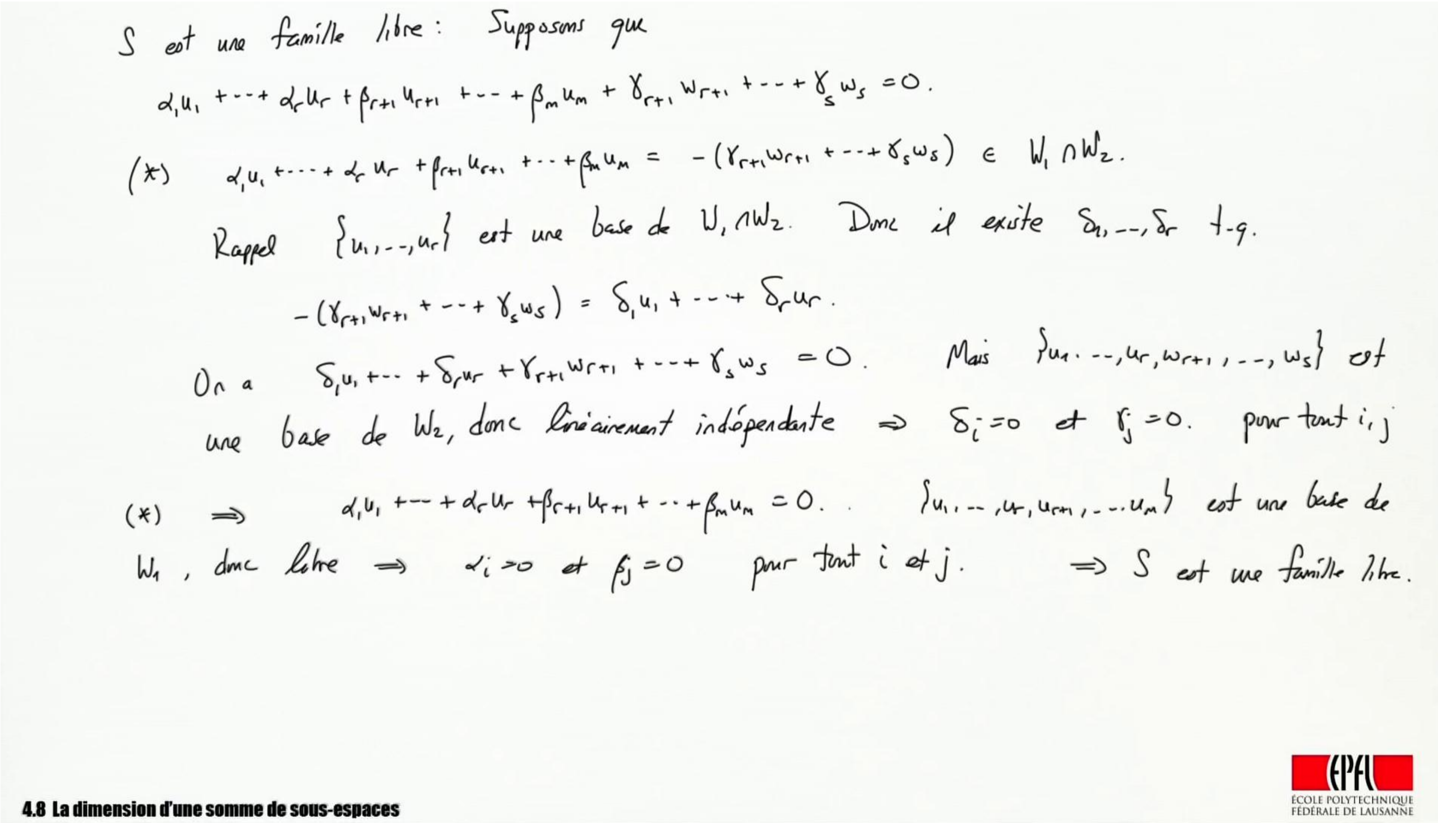


Ensuite, il faut montrer que *S* est une famille libre. Et ça c'est plus difficile à démontrer. Je le fais. Je suppose qu'il y a une combinaison linéaire des vecteurs dans *S* qui vaut *0*. Soit donc une combinaison $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \dots + \beta_m u_m + \gamma_{r+1} w_{r+1} + \dots + \gamma_s w_s = 0$. Je vais jouer un peu avec cette égalité. Je vais laisser les α et les β à gauche et je passe le reste de l'autre côté. La partie gauche de l'équation est un vecteur en terme des *u*, or les *u* c'est la base de W_1 et la partie droite est un vecteur en termes des *w* et tous ces vecteurs-là appartiennent à W_2. Donc le vecteur qu'on a est un vecteur qui appartient à $W_1 \bigcap W_2$2. I.e. il appartient aux deux espaces en même temps. Cela signifie que ce vecteur, je peux l'écrire en terme de la base de $W_1 \bigcap W_2$. Je rappelle que les vecteurs $u_1, \dots, u_r$ forment une base de l'intersection. Donc il existe des scalaires $\delta_1, \dots, \delta_r$ tels que ce vecteur qui est dans l'intersection, est égal à $\delta_1 u_1 + \dots + \delta_r u_r$.

Notes

Summary

6m 16s

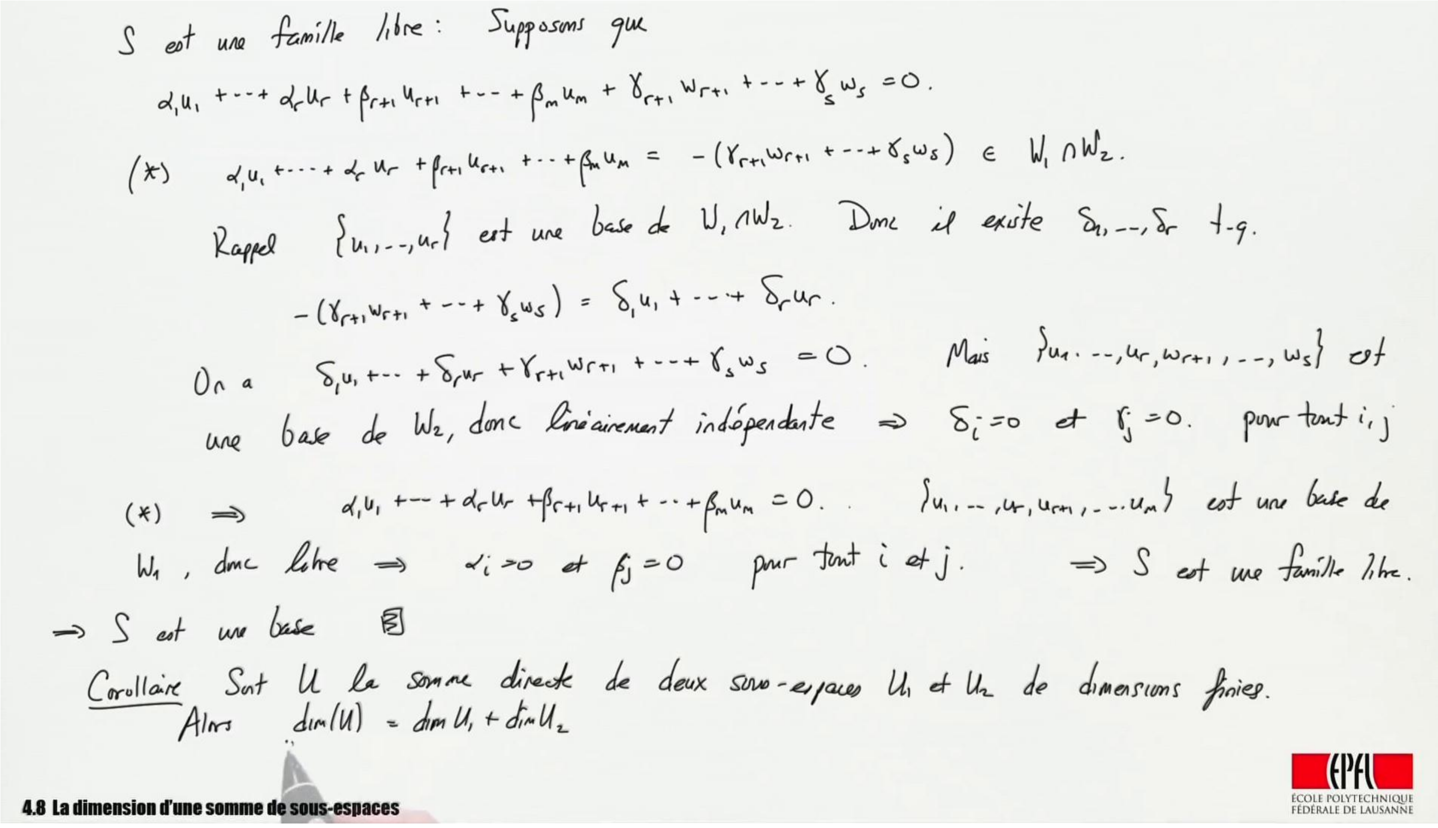


Maintenant je passe tout les éléments d'un côté et j'obtiens une nouvelle equation [voir écran] Mais l'ensemble $\{u_1,...,u_r,w_{r+1},...,w_{+1}\}$ est une base de W_2, par conséquent c'est une famille linéairement indépendante et donc tous ces scalaires qu'on voit devant doivent être nuls. Cela implique que tous les γ et tous les δ sont nuls. Maintenant je reviens en haut, donc le vecteur à gauche est égal à 0. Donc je reprends : j'aurai maintenant l'équation : $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + ... + \beta_m u_m = 0$. De nouveau, on rappelle que l'ensemble $\{u_1,...,u_r,u_{r+1},...,u_m\}$ est une base de W_1, par conséquent libre et cela implique que tous les α et tous les β sont nuls. Donc ici j'indique : pour tout i et j, et ici aussi pour tout i et j. Donc on a commencé avec une grande combinaison linéaire qui vaut 0 et on a réussi à voir que la seule façon d'y arriver est que $\alpha_i,\beta_j,\gamma_k = 0$, pout tout i,j,k. Donc cela implique par la définition d'indépendance linéaire que S est une famille libre. On a démontré que S est une famille génératrice, et c'est une famille libre, donc S est une base.

Notes

Summary

8m 29s



Et on a fini la preuve. Pour terminer, un cas particulier, un corollaire. Nous avons démontré le cas de deux sous-espaces quelconques dont on regarde la somme, deux sous-espaces de dimensions finies et on regarde la somme. Supposons que j'ai la somme directe, soit *U* la somme directe de deux sous-espaces U_1 et U_2 qui sont de dimensions finies. Le théorème nous dit que la dimension de *U* est la dimension de U_1 plus la dimension de U_2 moins la dimension de l'intersection, mais comme c'est une somme directe, l'intersection est réduite à $\{0\}$ et donc la dimension de l'intersection est nulle, et je trouve cette formule-ci.

Notes

Summary

10m 47s