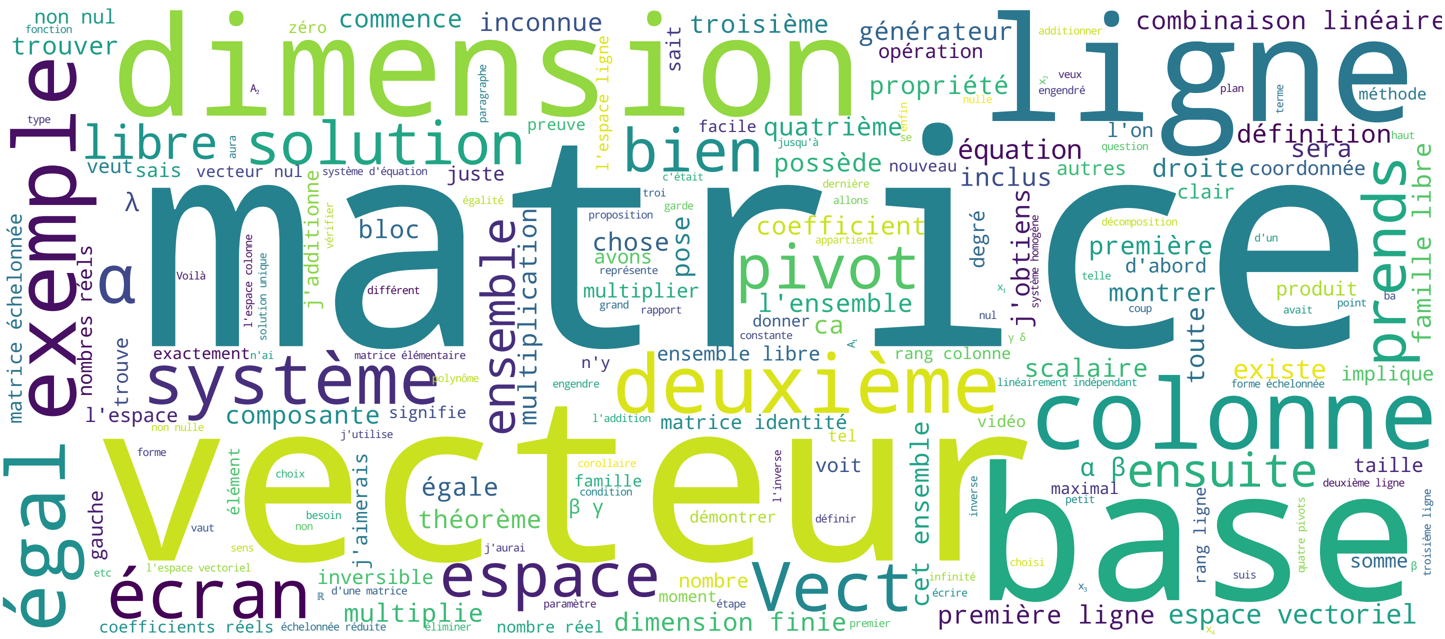
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.7 La dimension d'un sous-espace

Algèbre linéaire

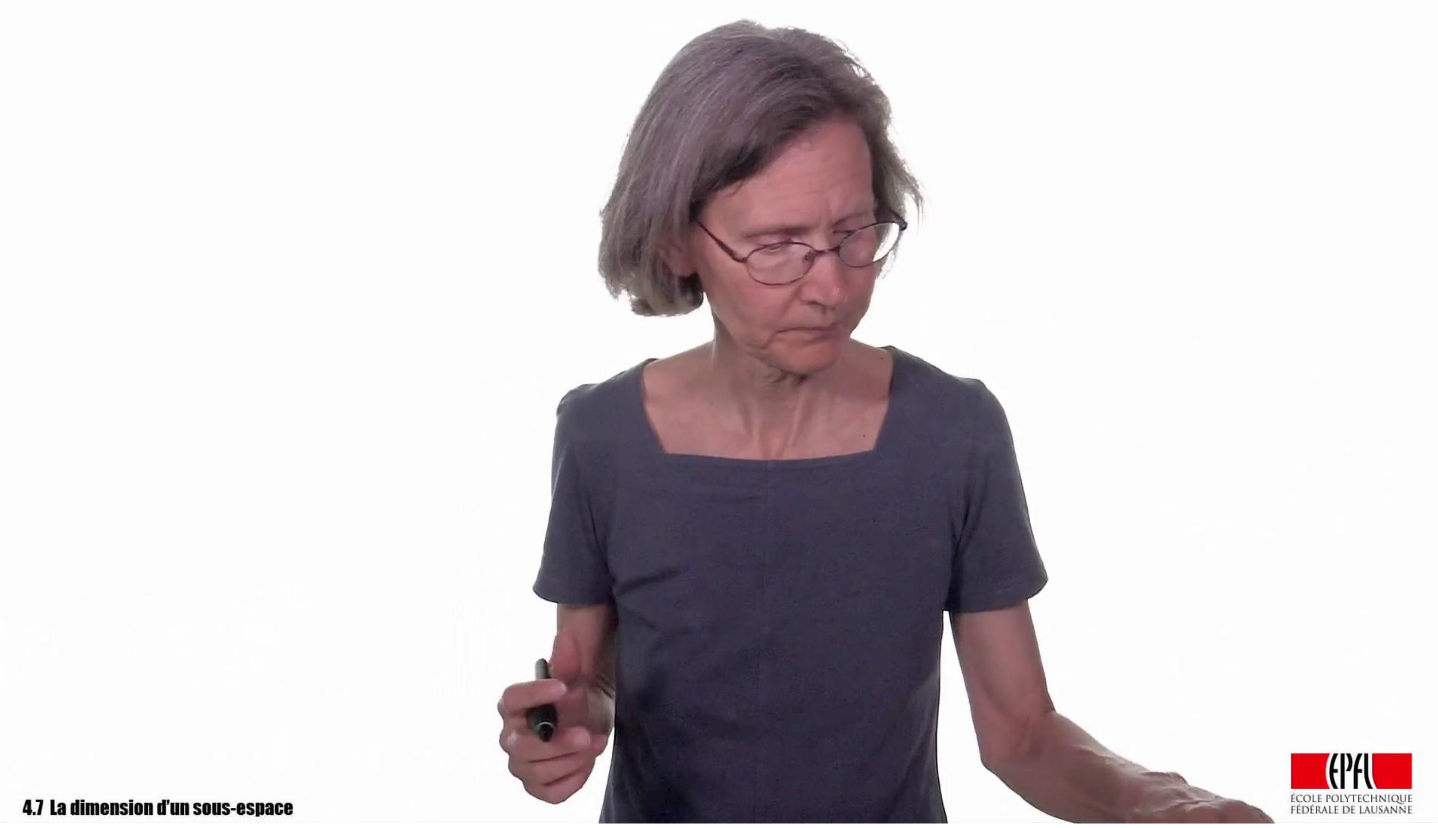
Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL



Dans cette vidéo, nous allons voir quelle est la relation entre la dimension de l'espace vectoriel et la dimension d'un sous-espace. Comme la dimension est censée mesurer la taille de l'espace, on aimerait bien que la dimension d'un sous-espace ne dépasse pas la dimension de l'espace et c'est ce qui est énoncé dans le théorème suivant.

Notes

Summary

0m 03s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors

(1) W est de dimension finie

(2) $\dim W \leq \dim V$

(3) Si $\dim W = \dim V$ alors $W = V$

Preuve Posons $n = \dim V$. Si $n=0$, alors $V=\{0\}$ et $W=\{0\}$. Les 3 énoncés sont clairs. Si $W=\{0\}$, 1 et 2 sont clairs. On démontre 1 et 2 en supposant $n \geq 1$ et $W \neq \{0\}$.

4.7 La dimension d'un sous-espace

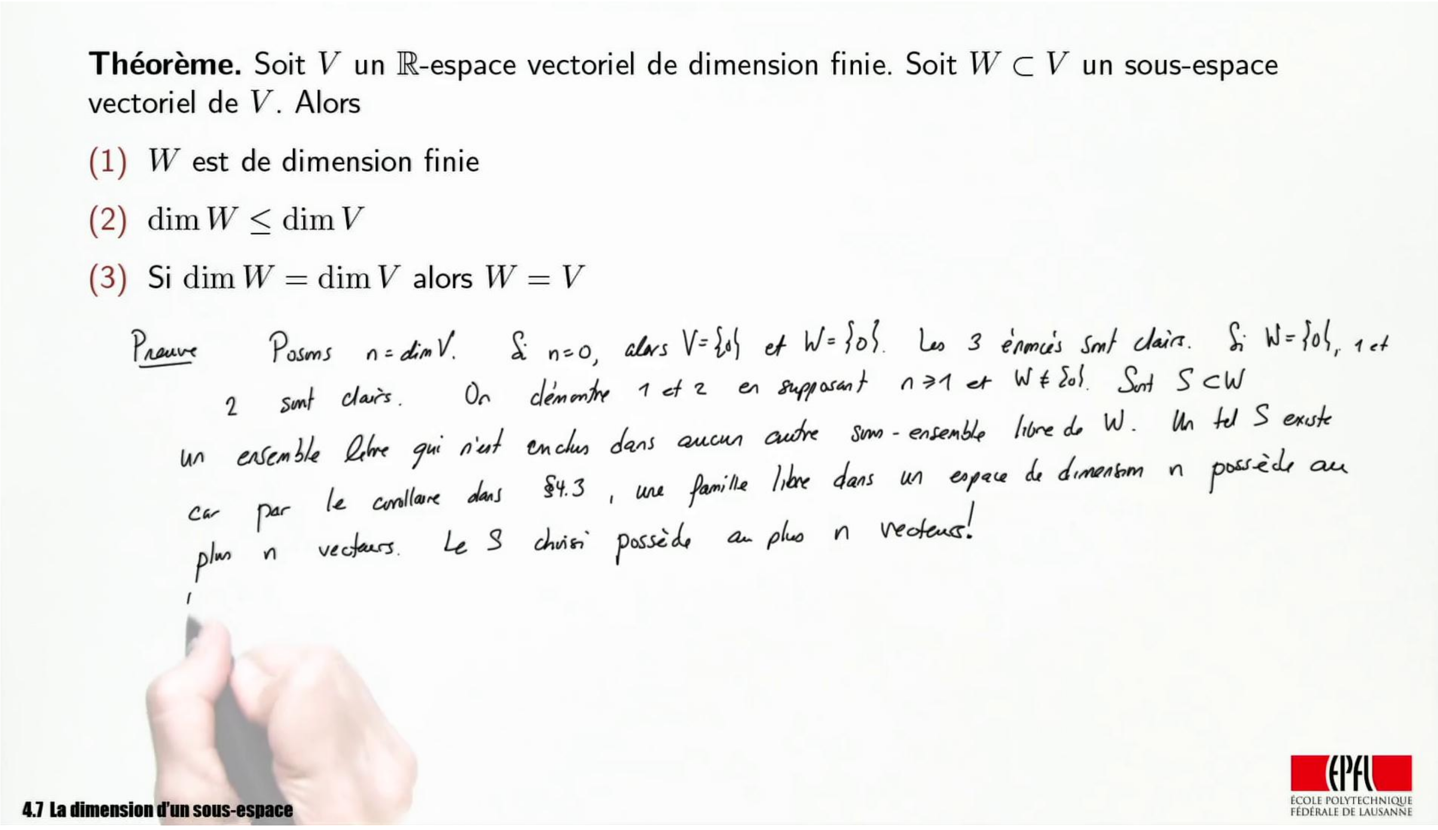
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Voici le théorème. Je me donne un *R*espace vectoriel *V* qui est de dimension finie et un sous-espace de *V*. On va démontrer que *W* est aussi de dimension finie, que sa dimension est au plus la dimension de *V* et si la dimension de *W* est égale à la dimension de *V*, alors *W* = *V*. Je commence la preuve. Comme *V* est de dimension finie, je pose *n=dim(V)*. Maintenant il se peut que *n = 0* donc si *n = 0*, cela signifie que *V* n'est que l'espace nul et *W* aussi parce que *W* est un sous-espace. À ce moment-là, les trois énoncés sont clairs. Il y a un autre cas qui est facile, c'est que si *W = {0}*, c'est aussi le cas que *W* est de dimension finie, *0* en l'occurrence, dimension au plus la dimension de *V* donc si *W = {0}*, (1) et (2) sont clairs. Maintenant, je m'occupe de (1) et (2). Dans le cas où *W* n'est pas *0*, et où *n* n'est pas *0*. On démontre (1) et (2) en supposant que *n* est plus grand ou égal à *1* et que *W* est différent de *{0}*. Je choisis dans *W* un ensemble libre qui est maximal dans le sens qu'il n'est pas inclus dans un autre sous-ensemble libre de *W*.

Notes

Summary

0m 23s



Donc soit *S* dans *W*, un ensemble libre qui n'est inclus dans aucun autre sous-ensemble libre de *W*. Maintenant, on pourrait se demander pourquoi un tel sous-ensemble existe et là j'utilise un corollaire qu'on a vu dans le paragraphe 4.3, donc un tel *S* existe car le corollaire, dans le paragraphe 4.3, dit que si on a une famille libre dans un espace de dimensions *n*, il possède au plus *n* vecteurs. L'idée c'est qu'on commence comme ça: on prend *S*, on pense que *S* n'a peut-être qu'un élément, mais ensuite on se rend compte qu'il n'est pas maximal il y a un ensemble avec plus qu'un élément, ensuite on agrandit, on agrandit mais cela doit s'arrêter car on ne peut pas avoir une famille libre avec plus que *n* vecteurs. Donc je choisis un *S* qui est maximal avec la propriété que c'est inclus dans *W* et c'est libre. Maintenant je veux montrer que *S* est en fait une base. Donc notre *S* le *S* choisi, possède au plus *n* vecteurs. C'est bien, c'est un ensemble fini avec au plus *n* vecteurs. Maintenant je prétends que cet ensemble *S* est une base. Donc on montre que *S* est une base de *W*.

Notes

Summary

2m 36s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors

(1) W est de dimension finie

(2) $\dim W \leq \dim V$

(3) Si $\dim W = \dim V$ alors $W = V$

Preuve Posons $n = \dim V$. Si $n=0$, alors $V=\{0\}$ et $W=\{0\}$. Les 3 énoncés sont clairs. Si $W=\{0\}$, 1 et 2 sont clairs. On démontre 1 et 2 en supposant $n \geq 1$ et $W \neq \{0\}$. Soit $S \subset W$ un ensemble libre qui n'est inclus dans aucun autre sous-ensemble libre de W. Un tel S existe car par le corollaire dans §4.3, une famille libre dans un espace de dimension n possède au plus n vecteurs. Le S choisi possède au plus n vecteurs!
On montre que S est une base de W. Par choix, S est libre. Si S n'est pas générateur, il existe $w \in W$, $w \notin Vect(S)$. On considère $S \cup \{w\} \supset S$. Mais $w \notin Vect(S) \Rightarrow S \cup \{w\}$ libre.
Ceci contredit le choix de S. Donc $Vect(S) = W$. $\Rightarrow$ S est une base.

4.7 La dimension d'un sous-espace

EPFL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Il faut montrer deux choses : que S est libre et générateur mais on sait déjà, par choix, que S est libre donc il faut montrer que S est générateur. Si S n'est pas générateur, il existe un $w \in W$ qui n'est pas dans *Vect(S)*. Et à ce moment-là, on considère l'ensemble $S \cup \{w\}$, qui est un ensemble qui contient S proprement, et comme w n'est pas dans *Vect(S)*, comme on l'a déjà vu, ça fait que cet ensemble-là est une famille libre. w pas dans *Vect(S)* implique que la famille $S \cup \{w\}$ est libre. Donc ça contredit quoi? Ça contredit la maximalité de S. On avait choisi S maximal, c'est-à-dire pas inclus dans une autre famille libre de W. Ceci contredit le choix de S donc on ne trouve pas un w qui n'est pas dans *Vect(S)*, donc *Vect(S)* = W. Donc on a S qui est libre et qui engendre W donc S est une base. Maintenant, on a à la fois que W est de dimension finie, parce qu'on a dit ici plus haut que S possède au plus n vecteurs, en plus que la dimension de W, qui sera la cardinalité de S, est au plus n, donc au plus la dimension de V. Donc on a le (1) et le (2). Passons au (3).

Notes

Summary

5m 09s

Exemple. Soit $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $W = \mathrm{Vect}\{x^3 + x^2 + 1, x^3 - x - 2, x^2 + x - 1, 2x - 3\}$.
Déterminer si $W = V$.

4.7 La dimension d'un sous-espace

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc maintenant je suis dans une bonne situation parce que je sais que W est de dimension finie, donc je choisis une base: soit B_W, une base de W. Comme on a supposé que la dimension de W est égale à la dimension de V, B_W possède n vecteurs. B_W, étant une base, est libre, et possède $n=dim(V)$ vecteurs. Et on a déjà un critère, dans le paragraphe 4.5, qui dit que si on a un ensemble libre qui possède le nombre de vecteurs qui est la dimension de l'espace, alors cet ensemble est une base. Donc cela implique (voir 4.5), que B_W est une base de V. Maintenant c'est ce qui va donner l'égalité. On a W qui est engendré par sa base B_W, mais B_W est aussi une base de V donc ça engendre aussi V. Donc on a que $W=V$. Je vais donner un exemple de l'utilisation de ce théorème. Je prends V l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3, et W, le sous-espace engendré par ces quatre polynômes. Je veux savoir si W est égal à V.

Notes

Summary

7m 32s

Exemple. Soit $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $W = \mathrm{Vect}\{x^3+x^2+1, x^3-x-2, x^2+x-1, 2x-3\}$. S
Déterminer si $W = V$.

Quelle est $\dim W$? Si $\dim W = 4$ alors $W = V$. Sinon, $W \neq V$.

Il existe une base B_W de W, avec $B_W \subset S$.

Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\alpha(x^3+x^2+1) + \beta(x^3-x-2) + \gamma(x^2+x-1) + \delta(2x-3) = 0$$

$$\alpha+\beta = 0$$
$$\alpha+\gamma = 0$$

4.7 La dimension d'un sous-espace

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Par le résultat précédent, si j'arrive à avoir la dimension de W, je saurai si c'est égal à V ou non. Donc je pose la question. Quelle est la dimension de W? Si la dimension de W vaut 4, alors $W = V$; sinon, $W \neq V$. Ici, j'ai une famille génératrice donc je sais que là-dedans il existe une base, B_W de W avec B_W inclus dans S où S est cet ensemble-là. Donc je vais aller à la recherche de cette base-là, je me demande déjà si ça c'est peut-être déjà une base, donc est-ce que ces vecteurs-là sont linéairement indépendants ou non ? Donc existe-t-il $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, des nombres réels, tels que $\alpha(x^3+x^2+1) + \beta(x^3-x-2)+ \gamma(x^2+x-1) + \delta(2x-3)=0$? Donc ça c'est un polynôme qui est égal au polynôme nul et donc je compare les coefficients des degrés 3, 2, 1 et 0 ici à droite. Donc je trouve que pour le degré x^3 j'ai que $\alpha + \beta = 0$. Pour x^2 j'ai $\alpha + \gamma = 0$. Maintenant je regarde le terme linéaire, donc ici j'ai $-\beta + \gamma + 2\delta = 0$ et le terme constant, $\alpha - 2\beta - \gamma - 3\delta = 0$.

Notes

Summary

9m 37s

Exemple. Soit $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $W = \mathrm{Vect}\overbrace{\{x^3+x^2+1, x^3-x-2, x^2+x-1, 2x-3\}}^{S}$.
Déterminer si $W = V$.

Quelle est $\dim W$? Si $\dim W = 4$ alors $W = V$. Sinon, $W \neq V$.

Il existe une base $\mathcal{B}_W$ de W, avec $\mathcal{B}_W \subset S$.

Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\alpha(x^3+x^2+1) + \beta(x^3-x-2) + \gamma(x^2+x-1) + \delta(2x-3) = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 0 \\ \alpha+\gamma &= 0 \\ -\beta+\gamma+2\delta &= 0 \\ \alpha-2\beta-\gamma-3\delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Seule solution est la solution triviale $\alpha = 0 = \beta = \gamma = \delta$.

$\Rightarrow$ S est libre $\Rightarrow$ S est une base.

$\dim W = 4 \Rightarrow W = V$.

4.7 La dimension d'un sous-espace

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C'est un système homogène, je pose la matrice des coefficients, je n'ai pas besoin de la colonne des constantes. Je vais vite échelonner la matrice pour voir si il y a un paramètre ou si j'ai quatre pivots. Donc la première ligne reste, maintenant je fais *-1* fois la première ligne que j'additionne à la deuxième. Je garde la troisième. Je fais *-1* fois la première ligne que j'additionne à la quatrième. Maintenant je garde la deuxième, j'additionne *-1* fois la deuxième à la troisième. J'additionne *-3* fois la deuxième à la quatrième. Et puis ensuite j'échange la troisième et la quatrième, et la matrice échelonnée que j'obtiens c'est celle-là. Je vois qu'il y a quatre pivots, donc la seule solution est la solution triviale : $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants, donc S est une famille libre. C'est déjà générateur donc cela signifie que S est une base. La dimension de W est égale à 4 et donc, par le théorème, $W = V$.

Notes

Summary

11m 42s