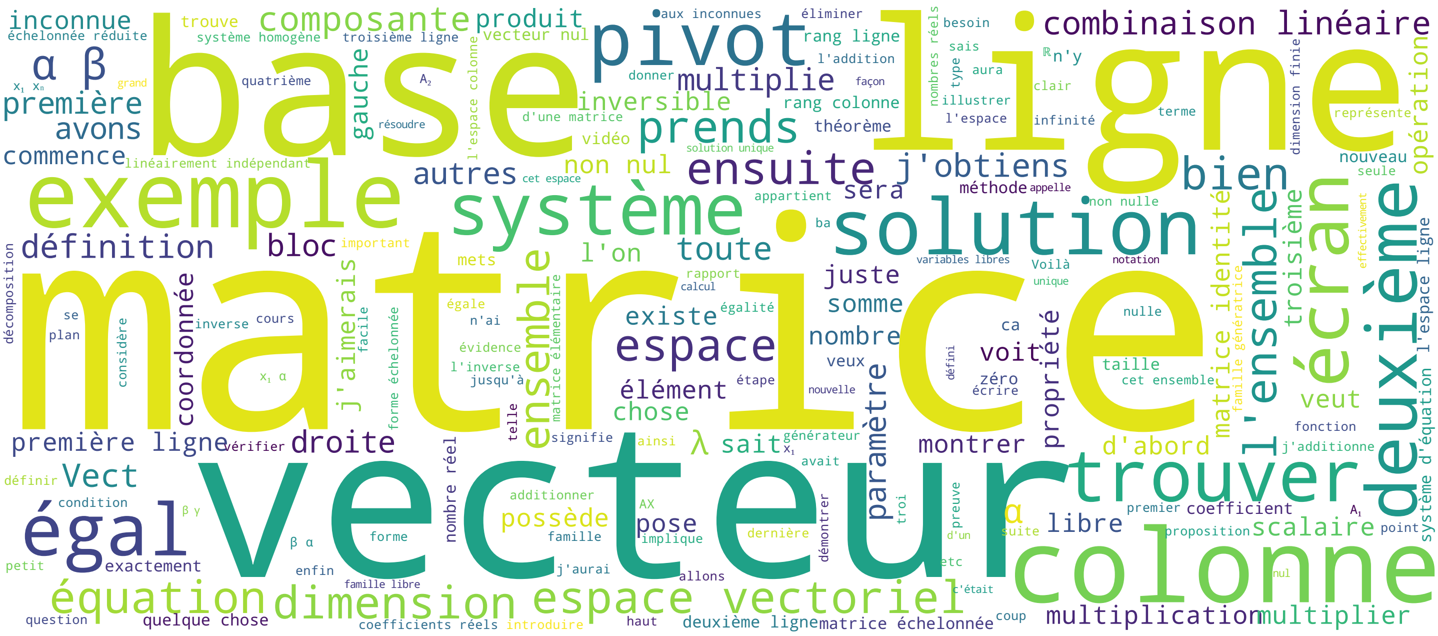
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.6 Systèmes homogènes et base de l'espace des solutions

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Rappel. Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x_1, \dots, x_n$ sont des inconnues. Alors l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

4.6 Systèmes homogènes et base de l'espace des solutions

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dans cette vidéo, nous allons considérer des sous-espaces formés de l'ensemble des solutions d'un système homogène. On sait déjà ce qu'est un sous-espace et maintenant on aimerait savoir comment trouver une base de ce sous-espace.

Notes

Summary

0m 04s

Rappel. Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x_1, \dots, x_n$ sont des inconnues. Alors l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

La solution : $x_2 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Questions : Quelle est sa dimension ?
Comment trouver une base ?

4.6 Systèmes homogènes et base de l'espace des solutions

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

D'abord je rappelle le contexte. Je me donne une matrice *m x n* et des inconnues x_1,..., x_n, que je range dans une colonne, que j'appelle *X*. Nous avons déjà vu que l'on représente un système d'équations linéaires aux inconnues x_1,..., x_n par l'équation matricielle : $AX = 0$. C'est un système homogène que je considère et nous avons déjà démontré que c'est un sous-espace vectoriel de R^n. Donc on se pose deux questions. On aimerait savoir quelle est la dimension de cet espace et en plus, comment trouver une base. C'est quelque chose que nous utiliserons énormément dans le cours donc c'est assez important de bien comprendre. Je vais illustrer cela avec un exemple qui je crois est assez parlant. Je commence avec la matrice *A* qui comme vous voyez est déjà échelonnée. Je considère le système $AX = 0$. Comme l'échelonnage est déjà fait, je vois quel est l'ensemble des solutions. Je vais introduire des paramètres. J'ai trois pivots. Je note des paramètres α et β Je pose $x_1 = \alpha$ et $x_5 = \beta$ et ici on sait que α et β peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Ce sont les paramètres.

Notes

Summary

0m 21s

Rappel. Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x_1, \dots, x_n$ sont des inconnues. Alors l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

$$\{(\alpha-\beta, \alpha, -\beta/2, 0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(\alpha-\beta, \alpha, -1/2\beta, 0, \beta) = \alpha(1,1,0,0,0) + \beta(-1, 0, -1/2, 0, 1)$$

4.6 Systèmes homogènes et base de l'espace des solutions

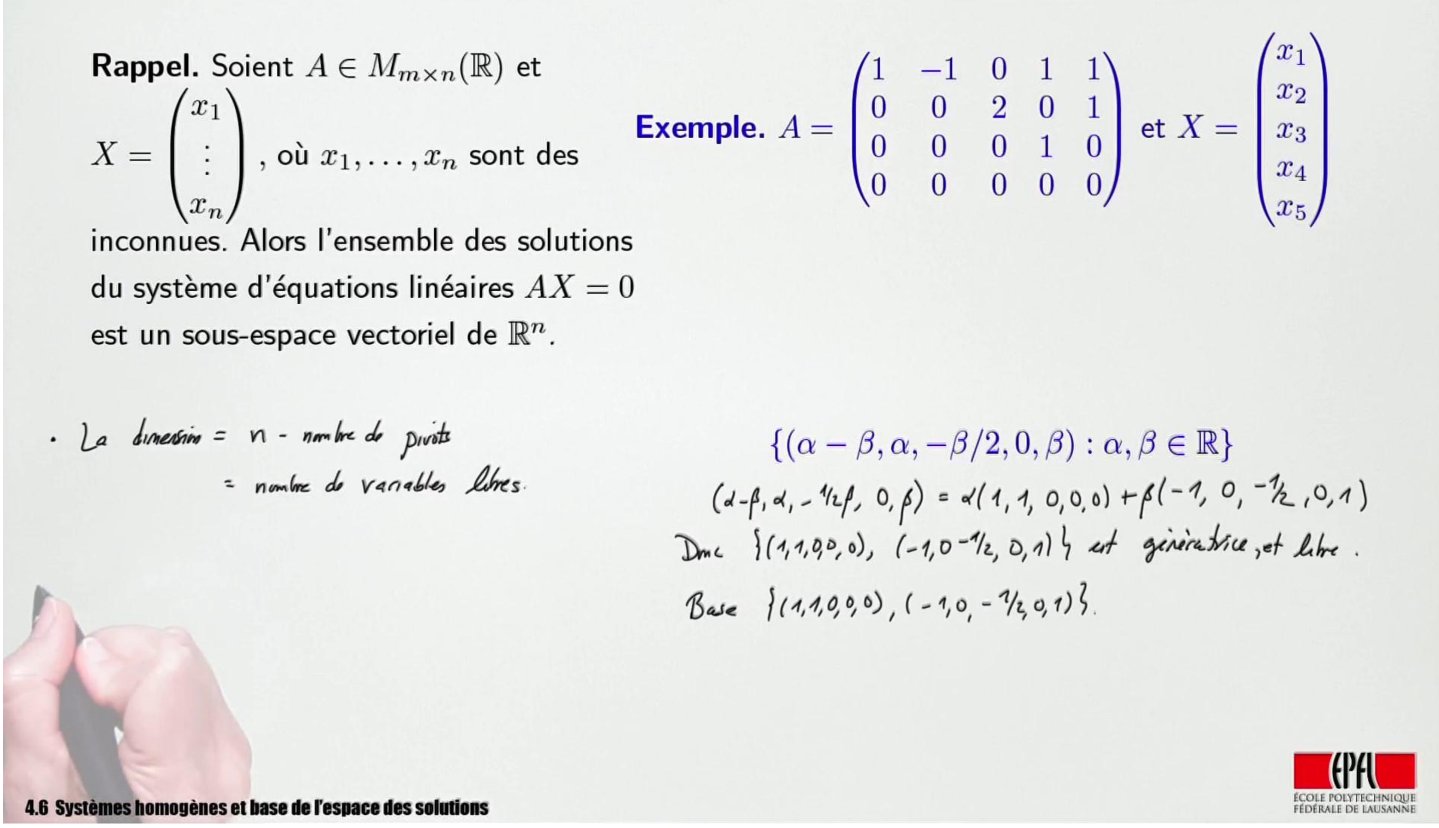
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ensuite je trouve les autres en fonction de ces paramètres. Donc la troisième ligne me dit que $x_4 = 0$. et la deuxième ligne me dit que $2x_3 + x_5 = 0$ et donc $x_3 = (-1/2)\beta$ et cette première ligne dit que $x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0$, ou en remplaçant $x_1 - \alpha + 0 + \beta = 0$. Donc $x_1 = \alpha - \beta$. Donc le sous-espace des solutions est l'ensemble des cinq clés de la forme suivante : $(\alpha - \beta, \alpha, (-1/2)\beta, 0, \beta)$ où α et β sont des valeurs réelles quelconques. J'ai l'ensemble des solutions qui est un sous-espace vectoriel et maintenant je m'intéresse à trouver une base de ce sous-espace. Ce que je veux vous montrer, c'est que le fait d'avoir mis en évidence ces paramètres nous aide à trouver une famille génératrice donc ici je prends une solution, donc un élément de ce sous-espace, et puis je mets en évidence et j'obtiens $(\alpha - \beta, \alpha, (-1/2)\beta, 0, \beta) = \alpha(1, 1, 0, 0, 0) + \beta(-1, 0, -1/2, 0, 1)$. Donc chaque membre du sous-espace précédent, chaque vecteur dedans, on peut l'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0, 0, 0)$ et $(-1, 0, -1/2, 0, 1)$. Ainsi on a une famille génératrice.

Notes

Summary

2m 03s



Et on voit aussi que ce sont deux vecteurs qui sont linéairement indépendants parce que, par exemple, si j'ai une combinaison linéaire de ces vecteurs qui vaut zéro, alors j'obtiens dans la cinquième composante que $\beta = 0$. C'est quelque chose qui fonctionne de manière générale, si vous posez un des paramètres est égal à *1* et les autres à *0*, et vous faites cela au fur et à mesure, vous fabriquez un ensemble de vecteurs qui seront linéairement indépendants et générateurs. Donc ça c'est quelque chose que l'on peut toujours faire. Ici, elle est génératrice et aussi libre. Donc une base, c'est justement cet ensemble-là, donc on a appris deux choses (d'ailleurs on a répondu à nos questions). Donc les deux questions c'était : quelle est sa dimension ? Donc on voit ici, la dimension est... on avait *n* inconnues et certaines de ces inconnues avaient un pivot et les autres correspondaient aux inconnues libres qui donnaient les paramètres. Donc c'est *n - le nombre de pivots*, (je mets ça en évidence parce que je vais y faire référence plus tard dans le cours), qui est égal au nombre de variables libres. Puis, comment trouver une base ? C'était la deuxième question.

Notes

Summary

4m 26s

Rappel. Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x_1, \dots, x_n$ sont des inconnues. Alors l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

- La dimension = n - nombre de pivots
  = nombre de variables libres.

- Pour trouver une base, on pose (successivement) une des variables libres égale à 1 et les autres 0.

$$\{(\alpha - \beta, \alpha, -\beta/2, 0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(\alpha-\beta, \alpha, -\tfrac{1}{2}\beta, 0, \beta) = \alpha(1,1,0,0,0) + \beta(-1,0,-\tfrac{1}{2},0,1)$$

Donc $\{(1,1,0,0,0), (-1,0,-\tfrac{1}{2},0,1)\}$ est génératrice, et libre.

Base $\{(1,1,0,0,0), (-1,0,-\tfrac{1}{2},0,1)\}$.

4.6 Systèmes homogènes et base de l'espace des solutions

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Pour trouver une base, on pose successivement une des variables libres = 1 et les autres = 0. On fait cela pour chaque variable libre et comme cela on constitue une base. J'espère que vous avez compris parce que c'est très important pour la suite du cours.

Notes

Summary

6m 04s