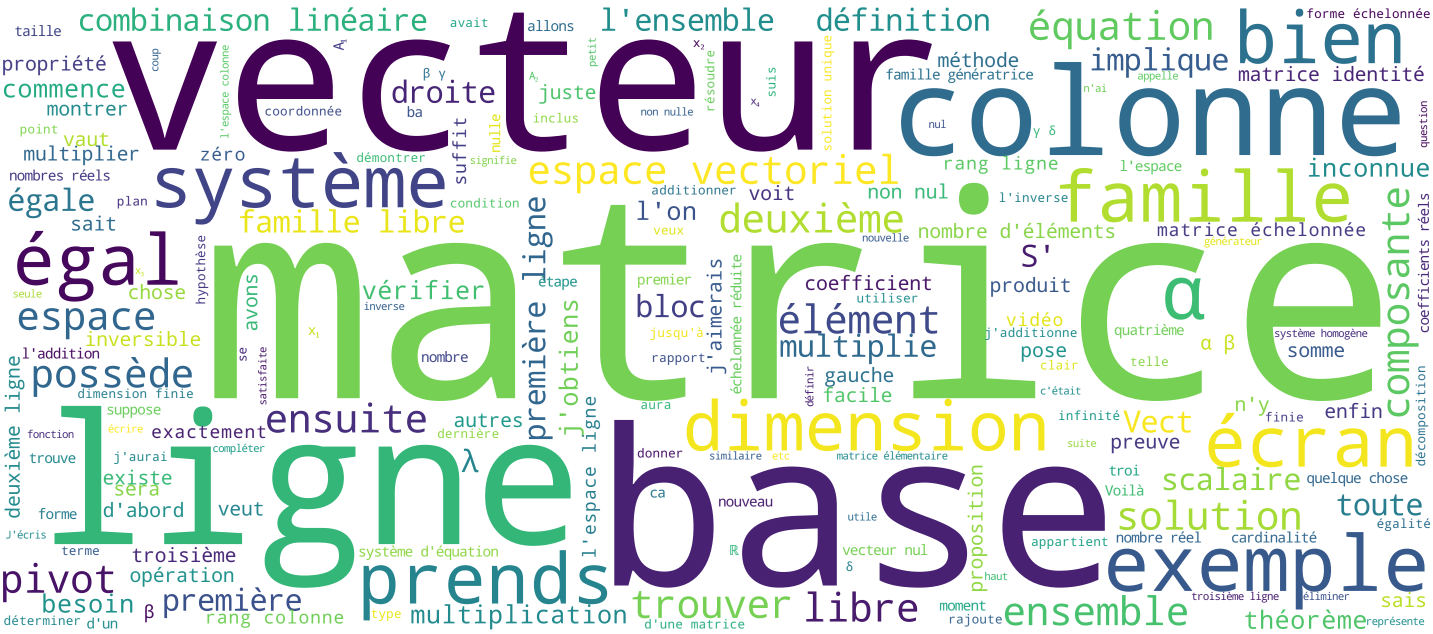
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(1) Si $S \subset V$ est une famille génératrice qui possède n éléments alors S est une base de V.

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dans cette vidéo, nous allons voir une méthode pour déterminer si un ensemble donné est une base ou non, dès le moment où l'on est dans un espace de dimension connue.

Notes

Summary

0m 03s

Théorème. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(1) Si $S \subset V$ est une famille génératrice qui possède n éléments alors S est une base de V.

Preuve Par la proposition sur l'extraction d'une base, il existe une base B de V avec $B \subset S$.

Mais B une base $\Rightarrow |B| = n$.

Aussi $|S| = n$.

$\Rightarrow B = S$ et donc S est une base de V.

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Voilà le théorème, la première partie : je prends un *R*-espace vectoriel *V* qui est de dimension *n* finie, et je prends une famille dans *V* qui est une famille génératrice possédant *n* éléments. De ça, je vais pouvoir déduire que *S* est une base de *V*. C'est à dire que je n'aurai pas besoin de vérifier que *S* est une famille libre, il suffit de savoir que c'est le bon nombre d'éléments et que c'est génératrice. Voilà la preuve : Par la proposition, sur l'extraction d'une base, on sait que *V* possède une base qui est un sous-ensemble de *S*. Dès le moment où l'on a une famille génératrice, on peut, éventuellement, réduire cette famille, si nécessaire, pour trouver une base. Donc, voilà la base *B*. Mais, comme *B* est une base, ça implique que la cardinalité de *B* est égale à *n*. On a aussi, par hypothèse, que *S* possède *n* éléments. Donc j'ai un sous-ensemble de l'ensemble à *n* éléments, le sous-ensemble possède *n* éléments, donc ça implique que *B* est égal à *S*. Et donc, *S* est une base de *V*. Donc ça, c'est la preuve du *(1)*. Là, on a gagné quelque chose parce qu'on n'aura pas besoin de vérifier que *S* est une famille libre, on n'a besoin que de vérifier les deux hypothèses : génératrice et le bon nombre d'éléments.

Notes

Summary

0m 14s

Exemple. Déterminer si $S = \{(1,0,1,1),(1,2,1,1),(0,1,1,0),(0,1,2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Il y a un deuxième énoncé, qui est similaire. Je me donne une famille S', et je suppose que je sais que cette famille est libre et possède n éléments (la dimension de V). Alors, là aussi, je peux montrer que S' est une base. La preuve est similaire. S' est une famille libre, donc on peut la compléter en une base. Par la proposition, sur la complétion en une base, V possède une base B, avec S' inclus dans B. À chaque fois qu'on a une famille libre, on peut l'agrandir pour trouver une base. C'est dans un espace de dimension finie que nous avons montré ça. Alors, maintenant, c'est comme avant : Mais B, une base, implique que la cardinalité de B est égale à n. Mais, par hypothèse, la cardinalité de S' est aussi égale à n. Donc, B est égale à S'. Et, par conséquent, S' est une base. Voilà le théorème. Vraiment, ce théorème est utile, parce qu'on gagné quelque chose, on connaît la dimension de l'espace V, on a une famille génératrice avec le bon nombre d'éléments, ça fait une base, ou bien, on a une famille libre avec le bon nombre d'éléments, ça fait une base. Maintenant, je fais un exemple.

Notes

Summary

2m 07s

Exemple. Déterminer si $S = \{(1,0,1,1),(1,2,1,1),(0,1,1,0),(0,1,2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Comme S possède 4 éléments et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, il suffit de déterminer si S est libre.

Supposons que $\alpha(1,0,1,1)+\beta(1,2,1,1)+\gamma(0,1,1,0)+\delta(0,1,2,1)=(0,0,0,0)$ pour $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je commence avec une famille *S*. Il y a quatre vecteurs et je suis dans l'espace vectoriel R^4. Et je veux savoir si cette famille-là est une base de R^4. Comme c'est le bon nombre d'éléments, il suffit de voir, ou bien, que cette famille est génératrice, ou bien, qu'elle est libre. Si l'une des deux n'est pas satisfaite, alors, ce n'est pas une base, on n'a pas besoin de vérifier les deux. Comme c'est plus facile de voir si une famille est libre ou non que de voir si cette famille est génératrice, je vais plutôt faire ça. J'écris tout ça. Comme *S* possède quatre éléments, et la dimension de R^4 est égale à *4*, il suffit de déterminer si *S* est libre. C'est plus facile. Donc, je suppose qu'il y a une combinaison linéaire des vecteurs dans *S* qui vaut *0*. Donc $\alpha\ (1,0,1,1) + \beta\ (1,2,1,1) + \gamma\ (0,1,1,0) + \delta\ (0,1,2,1)$, cette combinaison linéaire vaut *0* pour des scalaires α, β, γ, δ, appartenant à *R*. Alors, je regarde ce que ça donne comme système d'équations.

Notes

Summary

3m 58s

Exemple. Déterminer si $S = \{(1,0,1,1),(1,2,1,1),(0,1,1,0),(0,1,2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Comme S possède 4 éléments et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, il suffit de déterminer si S est libre.

Supposons que $\alpha(1,0,1,1) + \beta(1,2,1,1) + \gamma(0,1,1,0) + \delta(0,1,2,1) = (0,0,0,0)$ pour $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\beta + \gamma + \delta &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + 2\delta &= 0 \\ \alpha + \beta + \delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 pivots, aucune variable libre $\Rightarrow$ Solution unique $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 = \delta$.

Donc S est libre et par le théorème S est une base de $\mathbb{R}^4$.

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc, la première coordonnée de ce vecteur-là, à gauche, c'est $\alpha + \beta$ qui doit être égal à *0*, la deuxième coordonnée, c'est $2\beta + \gamma + \delta$ qui vaut *0*, la troisième coordonnée, c'est $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta$ qui vaut *0*, et, enfin, la quatrième coordonnée, c'est $\alpha + \beta + \delta$ qui vaut *0*. Alors, je vais utiliser la méthode pour résoudre le système homogène. Je pose la matrice des coefficients. Et l'échelonnage sera très rapide. Je garde la première ligne, la deuxième ligne, et, maintenant, je rajoute *-1* fois la première ligne à la troisième: *0 0 1 2*, et *-1* fois la première ligne à la quatrième. Maintenant, cette matrice, elle est échelonnée. Il y a quatre pivots, aucune variable libre. Donc, ça implique qu'il n'y a que la solution triviale, solution unique : $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ et $\delta=0$ aussi. Donc, *S* est une famille libre, et, par le théorème, *S* est une base de R^4.

Notes

Summary

5m 33s