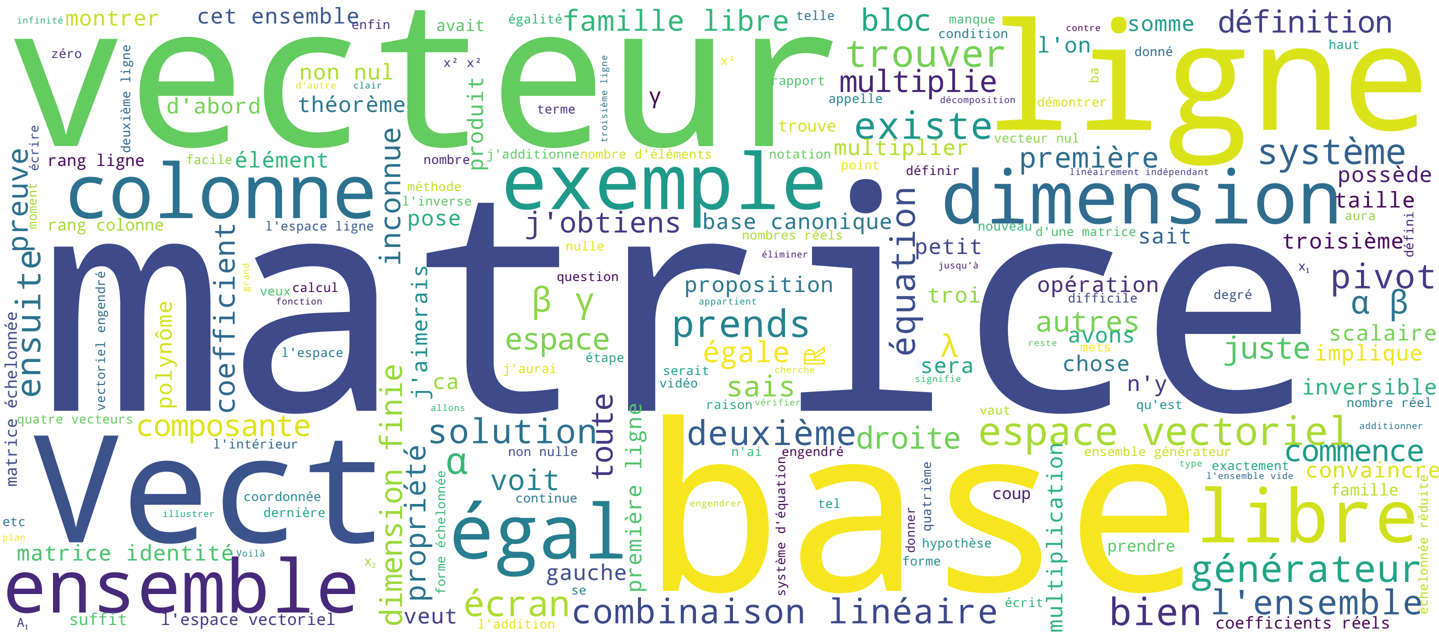
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.4 Dimension

Algèbre linéaire

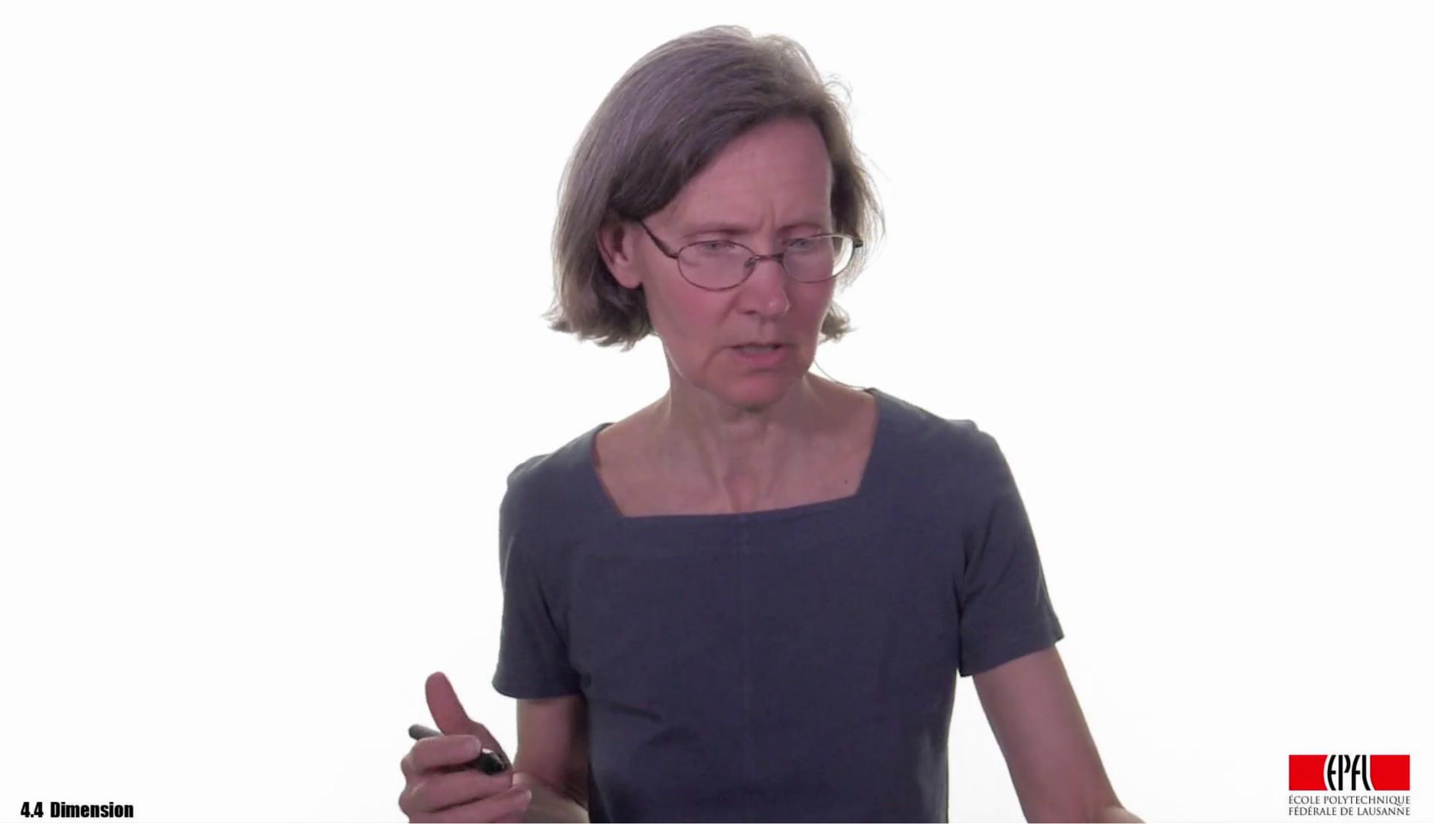
Prof. Donna Testerman



[Search MOOC](#)

[Video](#)

EPFL



Dans la vidéo précédente, nous avons montré un théorème qui n'est pas évident. Si on est dans un espace vectoriel, de dimension finie, ça veut dire qu'il existe une base finie et alors toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ça nous permet enfin de définir ce qu'est la notion de la dimension d'un espace vectoriel. C'est une mesure de la taille de l'espace vectoriel.

Notes

Summary

0m 04s

<u>Def'n</u> Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le nombre d'éléments dans une base de V s'appelle la <u>dimension de V</u> ; on la désigne par $\dim V$.

Exemples.

(1) $V = \mathbb{R}^n$ base canonique $\{(1,0,..,0), (0,1,0,..0), \ldots, (0,0,..,1)\}$ $\quad (0,0..,1,0..,0) = e_i$
$\dim V = n$. i-ème

(2) $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

(3) $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$

(4) $V = \{\mathbf{0}\}$

(5) $V = \mathrm{Vect}\{(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

4.4 Dimension

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je commence par donner la définition et après on verra des exemples. Définition : Soit V un R-espace vectoriel de dimension finie Alors, le nombre d'éléments dans une base de V s'appelle la dimension de V. Il faut une notation pour ça, on la désigne par *dim(V)*. Donc je répète, la raison pour laquelle c'est bien défini, c'est parce qu'on sait que si on est dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Maintenant regardons ici, on a déjà donné des exemples de bases qu'on va étendre et dire quelle est la dimension. Ici, dans $V = R^n$, on avait la base canonique c'est l'ensemble des vecteurs *(1, 0, 0,...), (0,1, 0,...), etc. Donc, pour des raisons de simplicité, quand le vecteur a un 1 à la i-ème place, on le note par* e_i. *Ça, c'est la base canonique. On compte et on voit qu'il y a n coordonnées. Donc la dimension ici est égale à n. Maintenant, ici on avait aussi une jolie base de polynômes de degré au plus n.*

Notes

Summary

0m 27s

Def'n Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le nombre d'éléments dans une base de V s'appelle la dimension de V ; on la désigne par $\dim V$.

Exemples.

(1) $V = \mathbb{R}^n$ base canonique $\{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$. $\dim V = n$. $(0,0\dots,1,0\dots,0) = e_i$ (i-ème)

(2) $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. $\dim \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = n+1$.

(3) $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ base $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}\}$ $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = m\cdot n$

(4) $V = \{\mathbf{0}\}$ base $\emptyset$, $\dim V = 0$.

(5) $V = \mathrm{Vect}\{(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ base $\{(1,0)\}$. $\dim V = 1$.

Ici on peut prendre la base, il y en a d'autres, mais on peut prendre la base {1, x, x²,..., x^n}) Si on compte la dimension ici, elle est égale à n + 1 Ensuite, pour les matrices m x n, on a pris la base des matrices dont il y a une seule composante non nulle à la place (i,j). donc on a la base {E_{11}, E_{12},..., E_{mn}}, donc on a ici la dimension de l'espace des matrices m x n à coefficients réels est égal à m x n Ici, qu'est-ce qu'on a défini comme base pour l'espace nul. Alors ici, il n'y a aucun vecteur linéairement indépendant. Par convention, on a dit que les sous-espaces engendrés par l'ensemble vide est 0, donc ici, une base, c'est l'ensemble vide et donc la dimension est 0. Ici, comme exemple, si je prends dans R² la droite qui est en fait l'axe des x dans notre cas, c'est un espace vectoriel engendré par un seul vecteur. Ça fait une base qui est juste le vecteur lui-même. Donc la dimension de V est égale à 1. Voilà quelques exemples. Maintenant, la question qui se pose est à quel point il est difficile de trouver une base.

Notes

Summary

2m 15s

Def'n Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le nombre d'éléments dans une base de V s'appelle la dimension de V ; on la désigne par $\dim V$.

Exemples.

(1) $V = \mathbb{R}^n$ base canonique $\{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$. $(0,0\dots,1,0\dots,0) = e_i$ (i-ème)
$\dim V = n$.

(2) $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. $\dim \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = n+1$.

(3) $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ base $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}\}$ $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = m\cdot n$

(4) $V = \{\mathbf{0}\}$ base $\emptyset$, $\dim V = 0$.

(5) $V = \mathrm{Vect}\{(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ base $\{(1,0)\}$. $\dim V = 1$.

4.4 Dimension

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Là on a des bases, mais est-ce que dans un sous-espace engendré par un certain nombres de vecteurs même dans R^n est-ce qu'on arrive à trouver une base ? Je donnerai deux propositions qui montrent qu'on peut utiliser différentes méthodes pour trouver une base. On ne cherche pas complètement dans le vide.

Notes

Summary

3m 55s

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1. Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un ensemble générateur de V. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V avec $\mathcal{B} \subset \{v_1, \ldots v_r\}$. (extraction d'une base)

Preuve. $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$.

Si S est libre, alors S est une base ; on prend $\mathcal{B} = S$.

Si S est linéairement dépendant, alors

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

4.4 Dimension

Je commence par cette première proposition. Je me donne un espace vectoriel de dimension finie. Ça je sais déjà. Après, je prends un ensemble de vecteurs qui engendrent V linéairement. Ce que je vais vous montrer c'est qu'il existe à l'intérieur de cet ensemble une base de V. On appelle ça l'extraction d'une base parce qu'on prend un sous-ensemble de cet ensemble générateur et on trouve une base. Preuve : Appelons cet ensemble $S = \{v_1,..., v_r\}$ C'est déjà générateur, c'est ce qui est donné dans l'énoncé. Si S est un ensemble libre alors S est générateur et libre, donc c'est une base. À ce moment-là, on prend pour cette base qu'on cherche, la base S. Sinon, si S est linéairement dépendant, alors on sait par un des critères que nous avons donnés qu'il existe un des v_i qui est une combinaison linéaire des autres. Alors il existe un entier i entre 1 et r, tel que v_i est dans le Vect des autres et, en particulier, on a que Vect(S) est égal au même Vect, mais sans le v_i.

Notes

Summary

4m 12s

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1. Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un ensemble générateur de V. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V avec $\mathcal{B} \subset \{v_1, \ldots v_r\}$. (extraction d'une base)

Proposition 2. Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une partie libre de V. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V avec $\{v_1, \ldots v_r\} \subset \mathcal{B}$. (complétion en une base)

4.4 Dimension

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Si j'ai v_i dedans ou pas, j'ai le même espace vectoriel engendré mais par hypothèse, on a supposé que le Vect(S) est égal à V. Maintenant, j'ai un ensemble générateur plus petit que le S. Je continue, je descends. Si c'est ensemble-là est libre alors j'ai une base qui est incluse dans S. Si c'est ensemble n'est pas libre, alors je peux encore enlever un vecteur et je continue à descendre et on continue et on trouve enfin une base B qui est à l'intérieur de S. On peut extraire de S une base. C'est déjà une bonne méthode, on a un ensemble générateur et dedans, on peut trouver un sous-ensemble qui est une base. Deuxième proposition : Je mets les deux pour comparer. Je ne me donne pas un ensemble générateur mais un ensemble qui est libre. Alors, je dis qu'il existe... (Ici, je ne donne pas la démonstration mais je vais juste esquisser) Alors il existe une base de V qui est plus grande que cet ensemble-là. On appelle ça : complétion en une base. Je ne peux pas complètement donner la preuve parce qu'il manque un tout petit peu de théorie.

Notes

Summary

6m 02s

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1. Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ un ensemble générateur de V. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V avec $\mathcal{B} \subset \{v_1, \dots v_r\}$. (extraction d'une base)

Proposition 2. Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ une partie libre de V. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V avec $\{v_1, \dots v_r\} \subset \mathcal{B}$. (complétion en une base)

L'idée de la preuve du 2.

Si $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_r\} = V$, alors $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une base.

Si $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_r\} \neq V$, il existe $v_{r+1} \in V$, $v_{r+1} \notin \text{Vect}\{v_1, \dots, v_r\}$.

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ est libre.

L'idée de la preuve : L'idée de la preuve de la deuxième proposition, c'est que, si on prend l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs-là, si ceci est déjà égal à V alors on a un ensemble de vecteurs qui est générateur et libre par hypothèse. Alors on a déjà une base on prendrait B égal à ça. Sinon, si le Vect de ça n'est pas égal à V alors il existe un vecteur à l'extérieur Donc il existe un vecteur v_{r+1} dans V qui n'est pas dans le Vect des vecteurs que nous avons déjà. Et par l'un de nos critères pour la dépendance linéaire, ça implique que l'ensemble des vecteurs V_1,..., v_r, v_{r+1} est aussi libre. Maintenant on fait le même raisonnement, c'est un ensemble libre si c'est déjà générateur de V alors c'est une base, sinon je peux prendre un vecteur à l'extérieur etc. Maintenant, ce qui manque un peu dans l'argument c'est de savoir que ça s'arrête. Mais, ça doit s'arrêter parce que l'espace vectoriel est de dimension finie.

Notes

Summary

7m 18s

Exemples.

(1) $S = \{(1,1,0,0),(0,1,0,0),(0,1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

$\alpha \qquad \beta \qquad \gamma$

S est libre.

$(\alpha, \alpha+\beta+\gamma, \gamma, 0) = (0,0,0,0)$

$\left.\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \alpha+\beta+\gamma = 0\\ \gamma = 0\end{array}\right\} \quad \alpha = 0 = \beta = \gamma$

(2) $S = \{x^2-1, x^2+1, x-1, x+1\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je n'ai pas donné tous les détails mais c'est l'idée de la preuve Je voudrais faire deux exemples pour illustrer l'utilité de ces deux propositions. Parce qu'elles sont vraiment utiles. Je choisis des exemples pas trop compliqués parce qu'il nous manque un petit peu de technique de calcul mais on aura ces techniques bientôt. C'est juste pour illustrer les propositions. Ici, le premier exemple. Je suis sûre que ce S n'est pas une base parce que la dimension de $\mathbb{R}_4$ c'est 4 et là je n'ai que trois vecteurs. Je vais juste vérifier que S est une famille libre. Pour vous convaincre de ça, j'imagine que j'ai multiplié ici par α, là par β, là par γ, et que la combinaison linéaire donne 0. Quand je regarde la première coordonnée, je n'aurai que α et puis la deuxième coordonnée ce serait α + β + γ La troisième coordonnée c'est juste γ et la quatrième coordonnée c'est 0. Si ça, ça donne 0, alors α est 0, α + β + γ = 0 et γ = 0. Du coup, on voit que α,β,γ = 0. Donc c'est bien une famille libre.

Notes

Summary

8m 45s

Exemples.

(1) $S = \{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$
$\qquad\qquad\alpha \qquad\qquad \beta \qquad\qquad \gamma$

Cherchons $v \notin \mathrm{Vect}\{S\}$. $\quad (0,0,0,1) \notin \mathrm{Vect}\{S\}$.

$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$. libre.

générateur $(0,0,0,1) \in \mathcal{B}$,

S est libre.

$(\alpha, \alpha+\beta+\gamma, \gamma, 0) = (0,0,0,0)$

$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \quad \alpha = 0 = \beta = \gamma$

(2) $S = \{x^2 - 1, x^2 + 1, x - 1, x + 1\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

4.4 Dimension

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

D'après la proposition, la deuxième, la complétion en une base, il existe une base de $\mathbb{R}^4$ qui contient l'ensemble S. Ici, pour trouver une base, il suffit de trouver un vecteur comme dans la preuve, qui est à l'extérieur de Vect(S) Cherchons un V qui n'est pas dans le Vect de S. C'est facile à voir, parce que le Vect(S) est comme ça et je ne peux jamais avoir une coordonnée non nulle. Je prends le vecteur (0, 0, 0,1) et ce n'est pas dans le Vect(S) et après je pose B égal à l'ensemble {(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)} Maintenant, je prétends que c'est une base. Pour voir ça, il faut déjà que ça soit une famille libre mais ça c'est libre parce que le S est libre et ici, celui-là n'est pas dans le Vect(S) Donc c'est une famille libre. Il faut aussi voir que c'est générateur. Pour voir que c'est générateur, il suffit de voir que je peux écrire la base canonique en termes de ces générateurs. Comme ça, je sais que dans le Vect(B), j'ai tout le monde. On a (0,0,0,1) dans la base. On a aussi (0,1, 0, 0) dans la base.

Notes

Summary

10m 04s

Exemples.

(1) $S = \{(1,1,0,0),(0,1,0,0),(0,1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

$\alpha \qquad \beta \qquad \gamma$

S est libre.

$(\alpha, \alpha+\beta+\gamma, \gamma, 0) = (0,0,0,0)$

$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \quad \alpha = 0 = \beta = \gamma$

Cherchons $v \notin \mathrm{Vect}\{S\}$. $(0,0,0,1) \notin \mathrm{Vect}\{S\}$.

$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0),(0,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$. libre.

générateur $(0,0,0,1) \in \mathcal{B}$, $(0,1,0,0) \in \mathcal{B}$, $(1,1,0,0) - (0,1,0,0) = (1,0,0,0) \in \mathrm{Vect}\{\mathcal{B}\}$.

$(0,1,1,0) - (0,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{\mathcal{B}\}$.

$\overset{\shortparallel}{(0,0,1,0)}$

$\mathcal{B}$ générateur et libre.

(2) $S = \{x^2-1, x^2+1, x-1, x+1\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

dimension $= 3$.

S est générateur car:

Si je fais la différence de ces deux : (1,1,0,0) - (0,1,0,0) = (1,0,0,0), ça donne le premier vecteur de la base canonique. C'est dans le Vect(B) Puis ensuite, il manque la troisième : si je fais (0,1,1,0) - (0,1,0,0) = (0,0,1,0), c'est aussi dans le Vect(B). Du coup, j'ai écrit les quatre vecteurs de la base canonique. Ça, ça et puis ceci est égal à (0, 0, 1, 0). J'ai les quatre vecteurs de la base canonique qui sont dans le Vect(B) donc B est générateur. L'ensemble B est générateur et libre Maintenant, dans le deuxième exemple, ici j'ai une famille de quatre vecteurs dans $P_2(\mathbb{R})$ on se rappelle que la dimension, c'est trois. Donc, c'est sûr que S n'est pas une base. Par contre, je vais vous convaincre que S est générateur. Ensuite, on va chercher une base, à l'intérieur de S. S est générateur car... Bon, je vais raisonner exactement comme j'ai raisonné là-haut. Je vais vous convaincre que ma base préférée de $P_2(\mathbb{R})$. peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs. Après, je saurai que je peux engendrer tous les vecteurs à partir de S.

Notes

Summary

11m 48s

Exemples.

(1) $S = \{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

$\quad\ \alpha \qquad\qquad \beta \qquad\qquad \gamma$

S est libre.

$(\alpha, \alpha+\beta+\gamma, \gamma, 0) = (0,0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \quad \alpha = 0 = \beta = \gamma$$

Cherchons $v \notin \mathrm{Vect}\{S\}$. $\quad (0,0,0,1) \notin \mathrm{Vect}\{S\}$.

$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$ libre.

générateur $\underline{(0,0,0,1)} \in \mathcal{B}$, $\underline{(0,1,0,0)} \in \mathcal{B}$, $(1,1,0,0) - (0,1,0,0) = \underline{(1,0,0,0)} \in \mathrm{Vect}\{\mathcal{B}\}$.

$(0,1,1,0) - (0,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{\mathcal{B}\}$.

$= \underline{(0,0,1,0)}$

$\mathcal{B}$ générateur et libre.

(2) $S = \{x^2 - 1, x^2 + 1, x - 1, x + 1\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

dimension $= 3$

S est générateur car:

$1 = \frac{1}{2}\big((x+1) - (x-1)\big) \in \mathrm{Vect}\{S\}$

$x = \frac{1}{2}\big((x-1) + (x+1)\big) \in \mathrm{Vect}\{S\}$

$x^2 = \frac{1}{2}\big(x^2 - 1 + x^2 + 1\big) \in \mathrm{Vect}\{S\}$.

$\mathcal{B} = \{x^2 - 1, x - 1, x + 1\}$ est une base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

4.4 Dimension

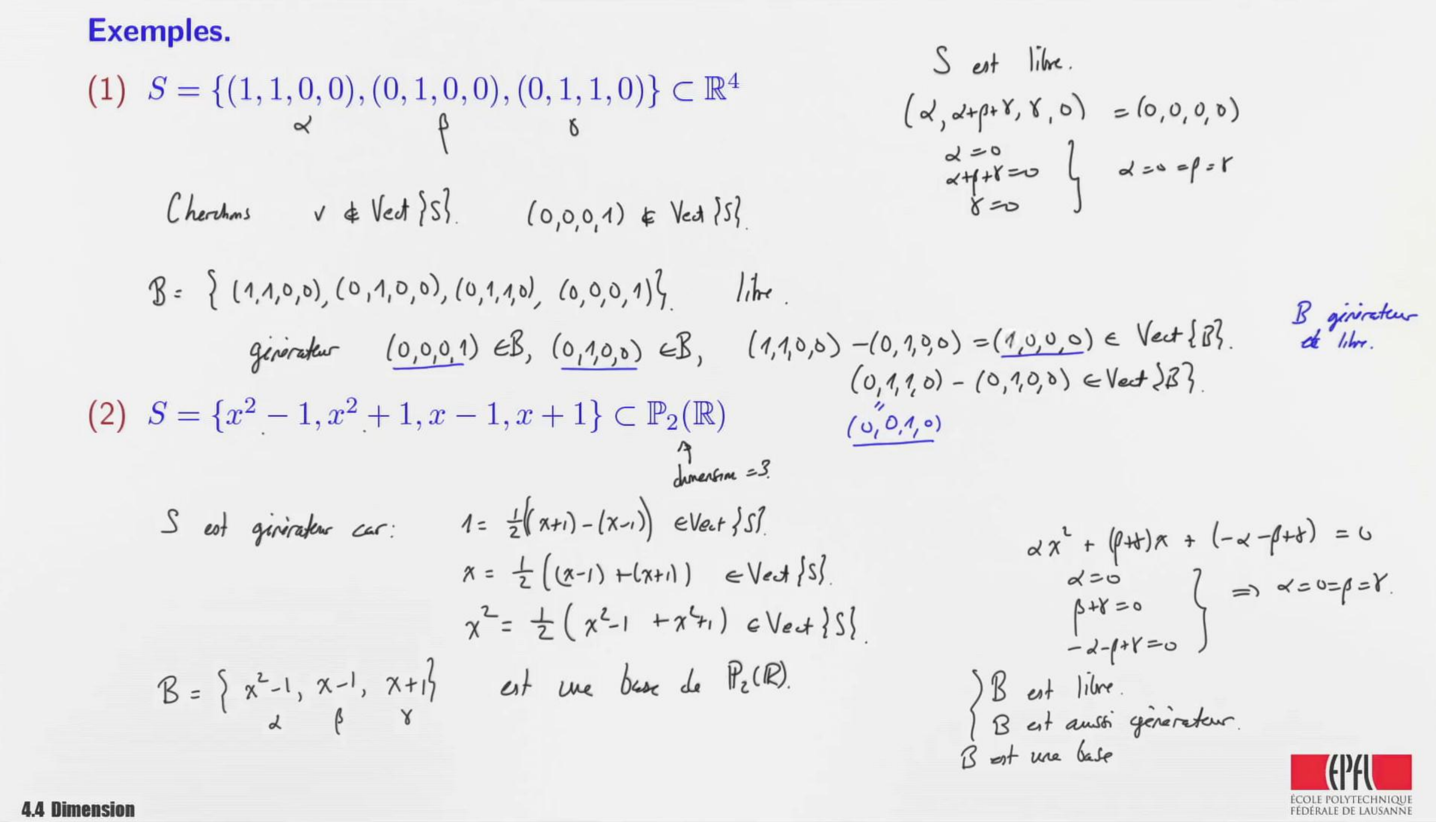
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

En effet, j'ai : 1 = 1/2 ((x + 1) - (x - 1)) donc ça c'est dans le Vect(S). Le x = 1/2 ((x - 1) +(x + 1)) C'est correct, c'est aussi dans le Vect(S). Le x^2 = 1/2 (x^2 - 1 + x^2 + 1) qui est aussi dans le Vect(S). Ça suffit pour voir que je peux écrire un polynôme a + bx + cx^2, comme une combinaison linéaire des vecteurs dans S. Donc S est générateur. Maintenant, il faudrait "tailler" là-dedans, parce que ce n'est pas une base car il y a trop de vecteurs, donc il faut trouver une base à l'intérieur. Il y aura différents choix : par exemple, je pourrais prendre les vecteurs x^2 - 1, x - 1 et x + 1, qui forment une base de $P_2(\mathbb{R})$ Comment faut-il vous convaincre ? Il faut voir déjà que c'est une famille libre alors si je prends α, β, γ et que je fais une combinaison linéaire [voir écran] alors j'aurai αx^2 et après j'aurai (β + γ)x Après pour le terme constant, j'aurai (-α - β + γ) donc ça serait le polynôme qui est la combinaison linéaire et si je pense que ça ça vaut 0 alors α = 0, car c'est le coefficient de x^2 β + γ = 0, c'est le coefficient de x.

Notes

Summary

13m 27s



et -α - β + γ = 0 et tout ça ensemble, ça implique que α = 0 = β = γ donc c'est bien libre. L'ensemble B est libre. Maintenant, pour voir que c'est une base, il reste à voir que c'est générateur. Regardez, je sais déjà que je peux engendrer 1 et x en n'utilisant que ces deux vecteurs, et comme j'ai engendré 1, je peux aussi trouver x^2 car $x^2 = (x^2 - 1) + 1$, donc c'est bien générateur. Donc, B est une base. Ça illustre les deux exemples : Ou bien on a un ensemble qui n'est pas tout à fait assez grand mais quand même libre, donc on peut l'agrandir pour faire une base, ça c'est une complétion d'une base, ou bien, on a un ensemble qui est trop grand mais qui est quand même générateur, c'est déjà une propriété, et on peut tailler là-dedans et trouver une base. Après, il faut imaginer qu'on peut avoir une situation pire, c'est qu'on a un ensemble devant nous qui n'est ni libre, ni générateur. Donc là ce serait beaucoup plus difficile de faire de ça une base, mais ici on a une situation que l'on peut gérer.

Notes

Summary

15m 35s