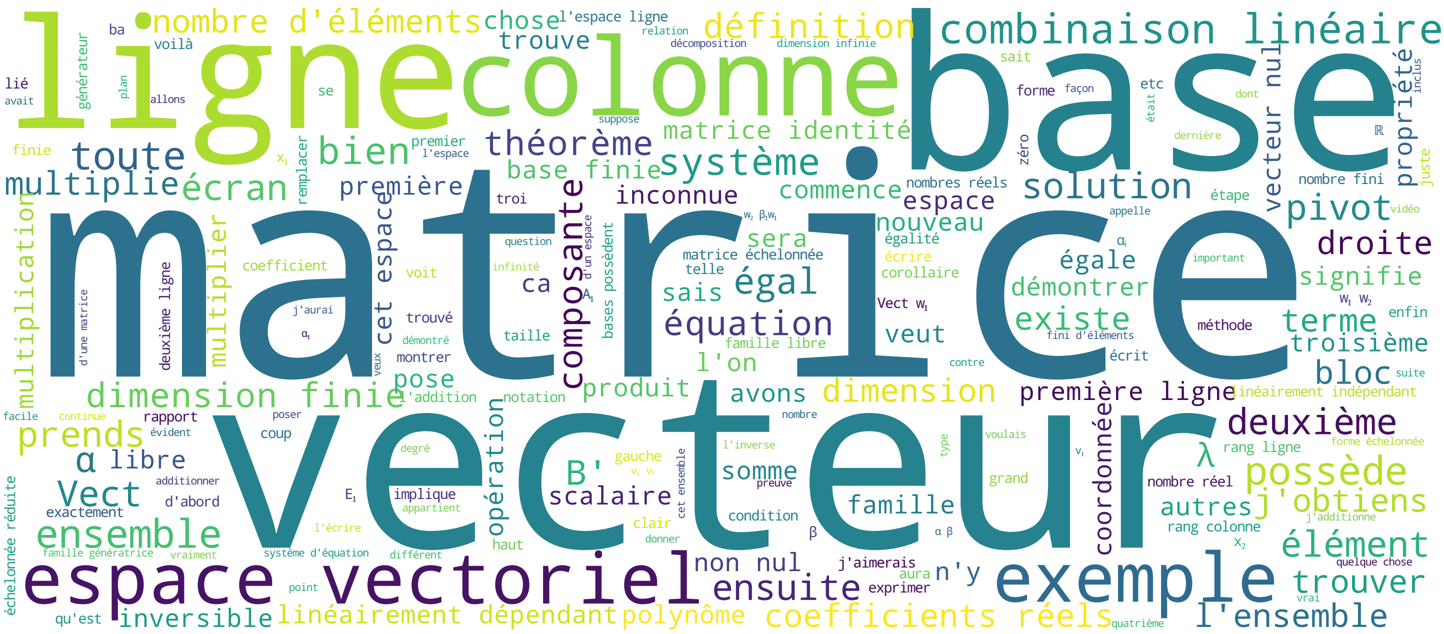
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.3 Bases

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Exemples.

(1) $V = \mathbb{R}^n$

(2) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$

(3) $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

(4) $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$

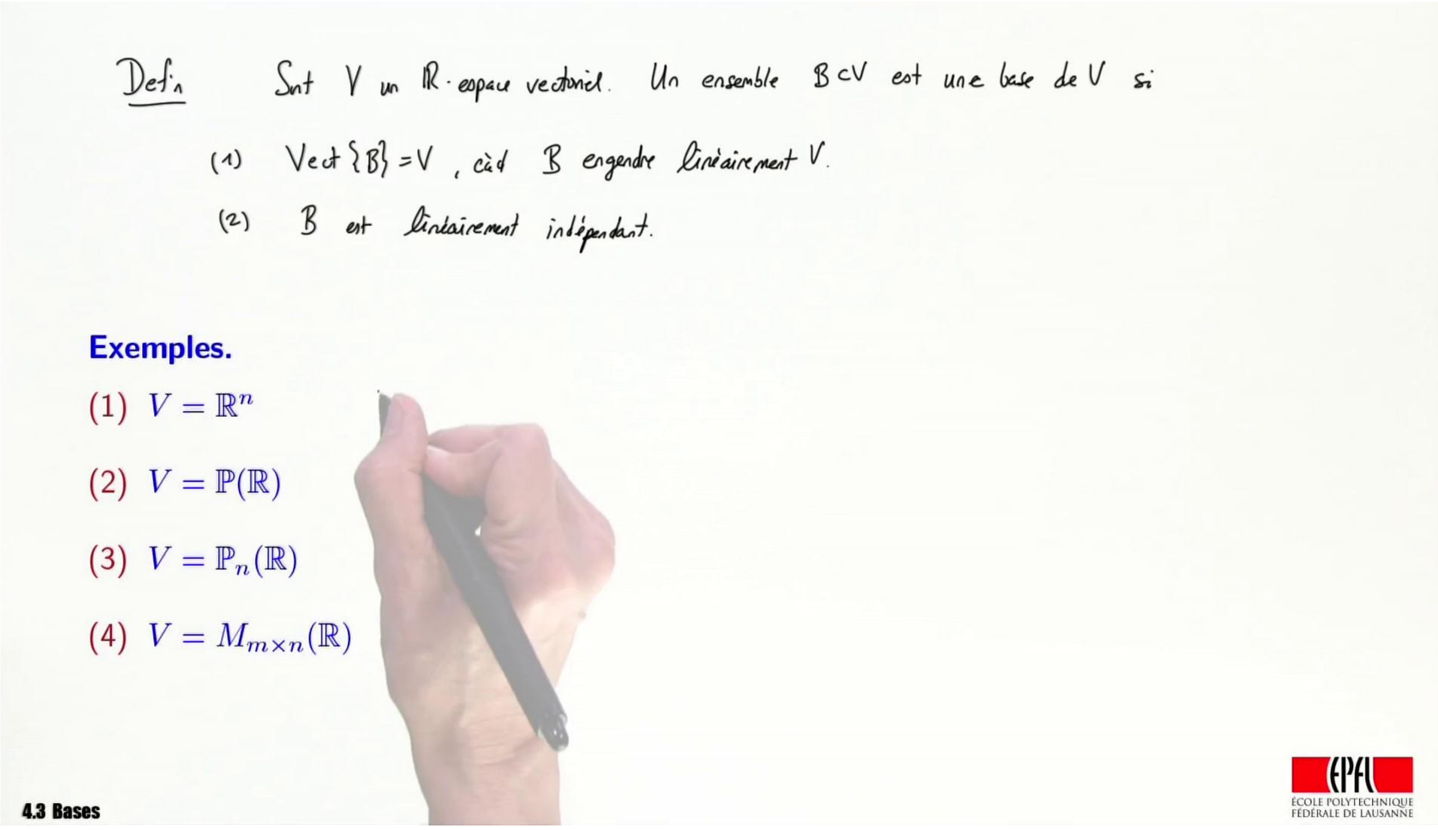
4.3 Bases

Enfin, nous allons définir ce qu'est une base d'un espace vectoriel. On a tous les éléments pour, on a parlé de l'indépendance et dépendance linéaire et de génération. Maintenant on met ces deux concepts ensemble et on définit ce qu'est une base.

Notes

Summary

0m 04s

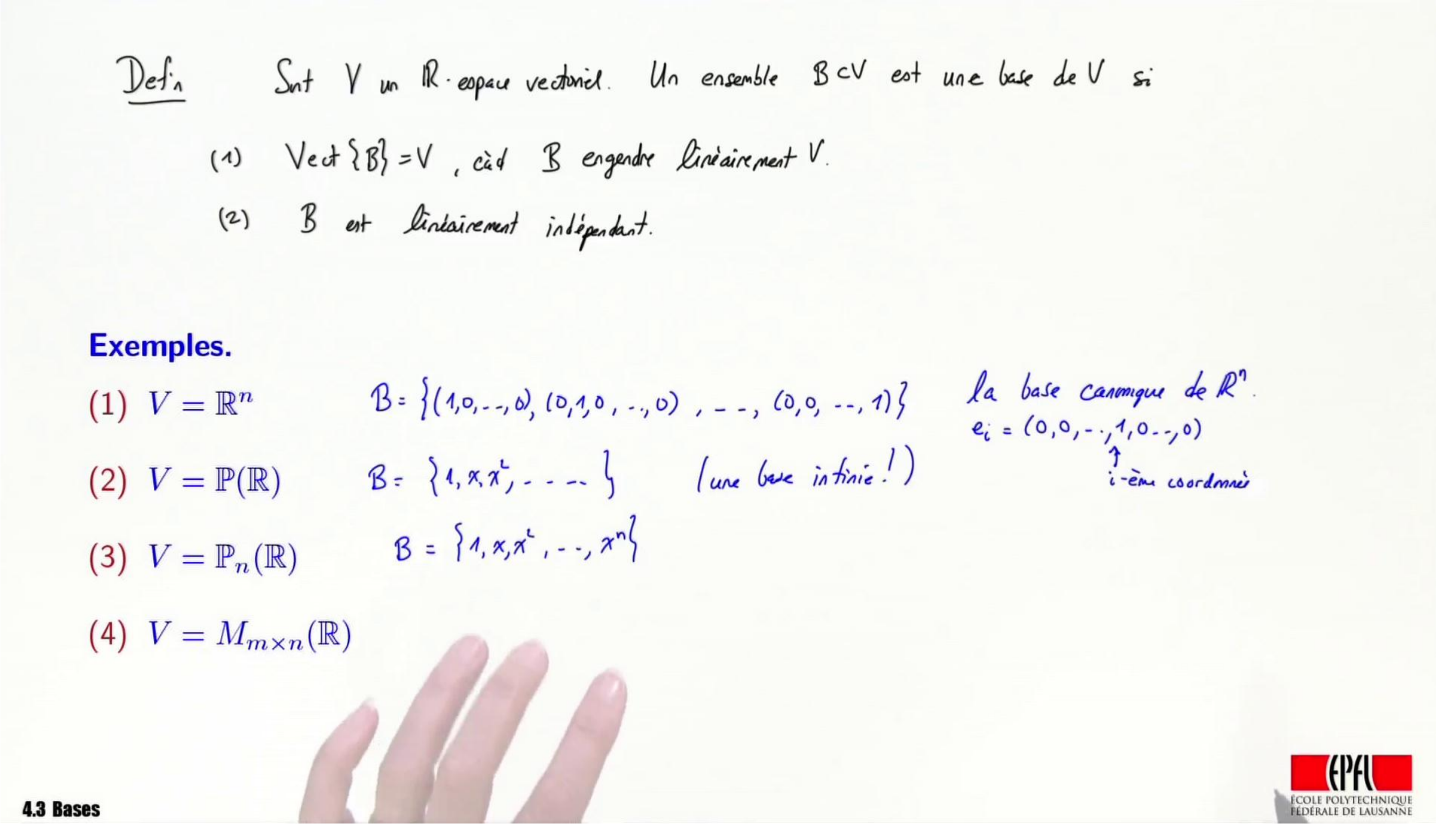


Je pose la définition. Soit *V* un *R*-espace vectoriel Un ensemble *B* dans *V* est une base de *V* si les deux conditions suivantes sont respectées: d'abord si *Vect{B}* = *V*, c'est-à-dire que *B* engendre linéairement *V* et deuxièmement, *B* est linéairement indépendant. Il faut penser que ces deux conditions sont comme suit: La première condition dit que *B* est assez grand pour engendrer tous les vecteurs dans *V*, en faisant des combinaisons linéaires de vecteurs dans *B*. La deuxième condition dit que *B* n'est pas trop grand. Linéairement indépendant signifie qu'on ne peut pas enlever un vecteur et engendrer le même espace. Voyons nos exemples. Dans chacun des espaces vectoriels que nous utilisons fréquemment, on a déjà une famille de vecteurs qu'on préfère à toutes les autres, qui va nous servir de base. Nous aurons d'autres bases aussi mais ici je pose les bases habituelles. Donc ici prenons *B*, l'ensemble des vecteurs, *(1,0,…,0)*, *(0,1,0,…,0)*, etc.

Notes

Summary

0m 19s



On appelle cela la plupart du temps la base canonique de R^n, on a la notation e_i pour indiquer le vecteur où l'on met un *1* à la *i*-ème place et des zéros ailleurs et c'est clair que c'est une base puisque chaque vecteur dans R^n peut être écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là et on ne peut pas faire une combinaison linéaire de ces vecteurs et trouver le vecteur nul. Dans les polynômes à coefficients réels, une bonne base serait de prendre tous les monômes : *1*, *x*, x^2, etc. De nouveau, tout polynôme à coefficients réels peut être écrit comme une combinaison linéaire d'un certain nombre de ces monômes. Et, il n'y a aucune combinaison linéaire de ces monômes qui donne zéro, d'ailleurs on l'a déjà vu dans un exemple, ils sont linéairement indépendants. Ici, je voulais vous donner cet exemple parce qu'il y a une base infinie. Ici, par contre dans les polynômes à coefficients réels mais de degré au plus *n*, on peut poser comme base ces mêmes monômes, allant jusqu'à la puissance *n*. C'est une famille libre parce que c'est inclus dans une famille libre là-haut, et c'est générateur pour cet espace vectoriel là.

Notes

Summary

1m 58s

4.3 Bases

Dans le quatrième exemple, des matrices $m \times n$ à coefficients réels, j'aimerais introduire une notation que nous utiliserons par la suite. Posons : E_{ij} la matrice $m \times n$ dont la composante (i,j) est égale à 1 et toutes les autres composantes sont égales à 0. Par exemple, la matrice $E_{1,1}$, je mettrais un 1 là et des zéros ailleurs. Alors une base de cet espace vectoriel, on pourrait prendre justement toutes les matrices comme cela, donc $E_{1,1}$, $E_{1,2}$,... à la dernière place sur la première ligne E_{1n}, $E_{2,1}$, etc. jusqu'à la dernière place, E_{mn}. Donc voilà les exemples. Nous avons deux situations différentes. Dans cet espace-ci et cet espace-là, ici, il y a une base avec un nombre fini d'éléments alors que là, il n'y a pas de base avec un nombre fini d'éléments. Cela se voit assez facilement.

Notes

Summary

3m 28s

Defn On dit que V est de dimension finie s'il possède une base finie. ($\Longleftrightarrow$ il possède une famille génératrice finie). Si V ne possède aucune base finie, on dit que V est de dimension infinie.

Exemples $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie

$\mathbb{P}(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

4.3 Bases

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc cela nous amène à la définition suivante. On dit que V, notre R-espace vectoriel, est de dimension finie s'il possède une base finie. Si il possède une base finie, cela signifie qu'il possède une famille génératrice finie. On peut démontrer que c'est équivalent: si et seulement si il possède une famille génératrice finie. Dans le cas où V ne possède aucune base finie, on dit que V est de dimension infinie. Donc on a la notion de dimension finie et dimension infinie. Exemple : R^n possède une base finie, donc est de dimension finie et les polynômes à coefficients réels est de dimension infinie. La façon de voir cela c'est que si on se donne un ensemble fini de polynômes, alors il y aura un degré maximal, donc ensuite il suffirait de prendre un polynôme d'un degré plus élevé et on ne peut pas l'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là. Maintenant, je vais énoncer un théorème et démontrer ce théorème, qui est très important. Ce théorème dit que si l'on est dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases sont finies et toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments. Ce n'est pas du tout évident.

Notes

Summary

5m 08s

Defn On dit que V est de dimension finie s'il possède une base finie. ($\Longleftrightarrow$ il possède une famille génératrice finie). Si V ne possède aucune base finie, on dit que V est de dimension infinie.

Exemples $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie

$\mathbb{P}(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Théorème Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de V sont finies. Toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments.

Preuve V possède une base finie $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. On montre que tout ensemble $S \subset V$ qui possède plus que n vecteurs est lié. $S = \{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_m\}$.

$V = \mathrm{Vect}\{B\}$. On a $w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

4.3 Bases

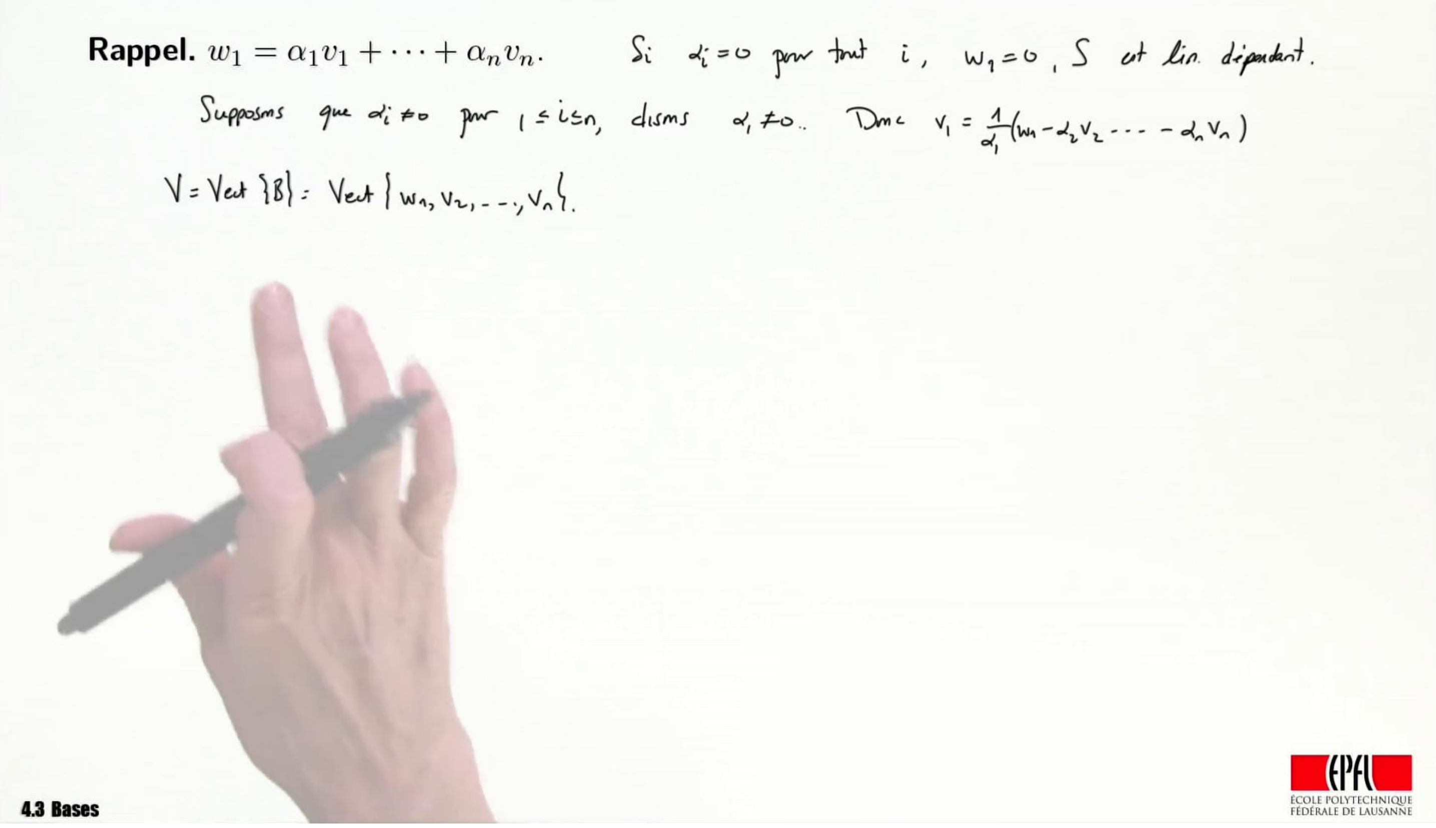
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

On est content que cela soit vrai. Je vais donc démontrer ce théorème. Soit V un R-espace vectoriel de dimension finie. Deux énoncés : toutes les bases de V sont finies, ça c'est une chose; l'autre chose est que toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments. Je vais démontrer ce théorème. Ce n'est pas évident que c'est vrai. Alors V est un R-espace de dimension finie donc il existe une base finie. V possède une base finie par définition, B, donc il y a un nombre fini d'éléments, je les liste : $v_1,\dots,v_n$. Maintenant je commence par montrer quelque chose qui, même à part est utile, on montre que tout ensemble S dans V qui possède plus que n vecteurs est lié. Si j'ai un ensemble avec plus de vecteurs que cela, c'est forcément un ensemble linéairement dépendant. C'est ce que je vais démontrer. Donc je prends mon S et je dis : il a $w_1,\dots,w_n,\dots,w_m$. Donc il y a plus que n vecteurs dedans. Je sais que $V = Vect\{B\}$ car B est une base, c'est une des conditions pour être une base. Donc je sais que je peux écrire le w_1 comme une combinaison linéaire. Donc on a $w_1=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$.

Notes

Summary

7m 10s



Maintenant, si toutes les α_i sont égales à 0, donc si $\alpha_i=0$ pour tout i, alors $w_1=0$ et donc S est linéairement dépendant et c'est ce qu'on voulait démontrer. Je suppose maintenant qu'il y en a un qui est différent de 0 et pour simplifier l'argument je vais supposer que c'est α_1. Supposons que $\alpha_i \neq 0$ pour un certain i, disons juste question de simplicité, que c'est α_1. Cela signifie que je peux écrire le v_1 comme $1/\alpha_1$ $(w_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots \ldots - \alpha_n v_n$. Donc je passe tous ces termes-là de l'autre côté et je divise par α_1. Je peux le faire parce qu'on a supposé que $\alpha_i \neq 0$. Donc cela signifie que V, qui est $Vect\{B\}$, est aussi le *Vect* de... donc en fait, je peux remplacer le v_1 par w_1 et ensuite je continue avec les v. On va juste s'assurer que c'est correct. Donc B c'est $v_1, \ldots, v_n$, tout vecteur s'écrit comme une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$. Mais le v_1, je peux l'écrire en termes de $w_1, v_2, \ldots, v_n$, donc cela fonctionne. Tous les vecteurs qui s'écrivent comme une combinaison linéaire de v_i sont là-dedans.

Notes

Summary

9m 35s

Rappel. $w_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Si $\alpha_i = 0$ pour tout i, $w_1 = 0$, S est lin. dépendant.

Supposons que $\alpha_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$, disons $\alpha_1 \neq 0$. Donc $v_1 = \frac{1}{\alpha_1}(w_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n)$

$V = \mathrm{Vect}\{B\} = \mathrm{Vect}\{w_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Donc $w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$. Si $\beta_i = 0$ pour tout $i \geq 2$,

alors $w_2 = \beta_1 w_1 \Rightarrow S$ est lin. dépendant. Supposons que $\beta_j \neq 0$ pour $j \geq 2$, disons $\beta_2 \neq 0$.

$v_2 = \frac{1}{\beta_2}(w_2 - \beta_1 w_1 - \beta_3 v_3 - \cdots - \beta_n v_n)$.

$V = \mathrm{Vect}\{w_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n\}$. On continue et on trouve

4.3 Bases

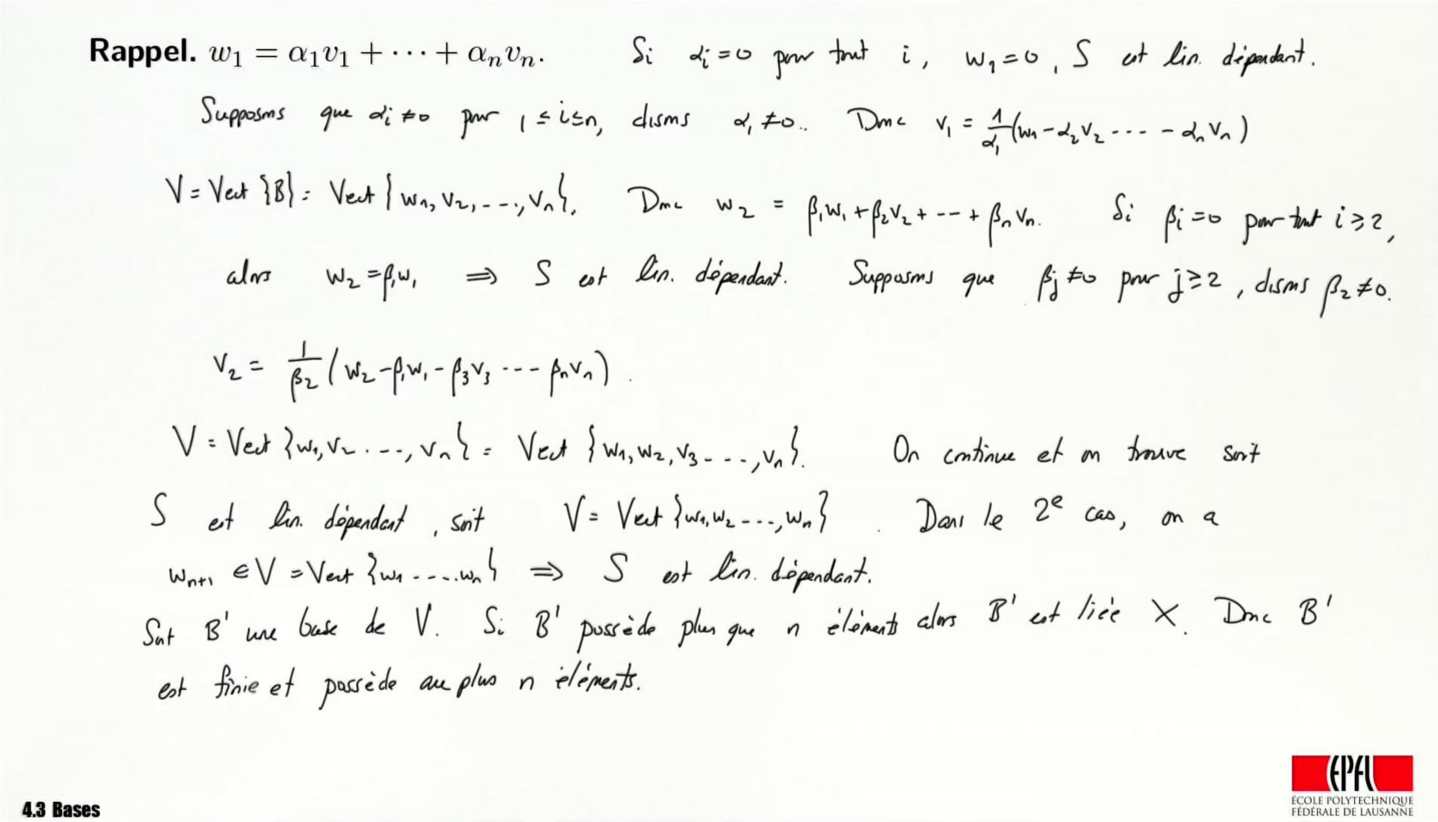
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant je prends w_2, donc w_2 est dans V donc je peux l'exprimer comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là, $w_2=\beta_1 w_1+\beta_2 v_2+\ldots \ldots+\beta_n v_n$. Si $\beta_i=0$, pour tout i plus grand ou égal à 2, on a $w_2=\beta_1 w_1$, on a exprimé un des w en terme des autres, cela implique que S est linéairement dépendant. C'est que qu'on voulait démontrer. Supposons que $\beta_j \neq 0$ pour un j plus grand ou égal à 2, disons pour simplicité que c'est le β_2. Je reprends cette égalité-là et j'obtiens que $v_2=1/\beta_2(w_2-\beta_1 w_1 - \beta_3 v_3-\ldots-\beta_n v_n)$, et du coup, le V qui était le $Vect\{w_1,v_2,\ldots \ldots v_n$, c'est la même chose que le $Vect\{w_1,w_2,v_3,\ldots,v_n$. Donc ici j'ai vu que je peux exprimer v_2 en terme de cela, donc je peux remplacer le v_2 ici par le w_2. La prochaine étape est de dire que je peux exprimer w_3 comme une combinaison linéaire de tous ces vecteurs-là. On continue et on trouve... ou bien on va trouver comme on a trouvé là et là, une relation de dépendance, ou bien on arrive jusqu'au bout et on trouve soit S est linéairement dépendant, soit V est le $Vect\{w_1,w_2,\ldots,w_n$.

Notes

Summary

11m 32s



Donc je remplace au fur et à mesure et puis à la fin, j'aurai cela. Ou bien à un moment donné j'ai trouvé une relation, ou bien j'arrive jusqu'au bout. Mais ici, si ça c'est le cas, dans le deuxième cas, on a que w_{n+1}, qui existe dans V, qui est le $Vect\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$, donc je peux exprimer w_{n+1} en termes de $w_1,\ldots,w_n$ et par notre critère cela signifie aussi que S est linéairement dépendant. Donc on a démontré ce que je voulais : que dans un espace de dimension finie, si j'ai une base avec n éléments, et si j'ai un ensemble avec plus que n éléments, forcément cet ensemble est linéairement dépendant. Maintenant, je veux montrer que toutes les bases sont finies et que toutes bases possèdent le même nombre d'éléments, donc soit B' une base de V, si B' possède plus que n éléments alors B' est liée, ce qui est une contradiction, donc d'une part, B' est finie et d'autre part possède au plus n éléments. Maintenant, j'applique le même raisonnement, en disant que B' est une base qui possède un certain nombre d'éléments et B est une base qui ne peut posséder plus que ça.

Notes

Summary

14m 21s

Rappel. $w_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Si $\alpha_i = 0$ pour tout i, $w_1 = 0$, S est lin. dépendant.

Supposons que $\alpha_i \neq 0$ pour $1 \le i \le n$, disons $\alpha_1 \neq 0$. Donc $v_1 = \frac{1}{\alpha_1}(w_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n)$

$V = \mathrm{Vect}\{B\} = \mathrm{Vect}\{w_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Donc $w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$. Si $\beta_i = 0$ pour tout $i \geq 2$, alors $w_2 = \beta_1 w_1 \Rightarrow S$ est lin. dépendant. Supposons que $\beta_j \neq 0$ pour $j \geq 2$, disons $\beta_2 \neq 0$.

$$v_2 = \frac{1}{\beta_2}(w_2 - \beta_1 w_1 - \beta_3 v_3 - \cdots - \beta_n v_n).$$

$V = \mathrm{Vect}\{w_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n\}$. On continue et on trouve soit S est lin. dépendant, soit $V = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Dans le 2^e cas, on a $w_{n+1} \in V = \mathrm{Vect}\{w_1, \ldots, w_n\} \Rightarrow S$ est lin. dépendant.

Soit B' une base de V. Si B' possède plus que n éléments alors B' est liée $\times$. Donc B' est finie et possède au plus n éléments. On applique le même raisonnement aux bases B' et B et on voit que nombre d'éléments ds B est au plus le nombre d'éléments dans B'. ∎

4.3 Bases

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc j'applique le même raisonnement aux bases B' et B, dans l'autre sens, et on voit que le nombre d'éléments dans B est au plus le nombre d'éléments dans B'. Donc ici on a montré d'abord que cette deuxième base est finie, parce que tout ensemble avec plus que n éléments est lié, et en plus elle possède au plus n éléments, où n était le nombre d'éléments de la base que nous avons fixé. Ensuite j'inverse les rôles de B' et de B, et je vois que B ne peut posséder plus d'éléments que dans B'. Donc les deux bases possèdent le même nombre d'éléments. Donc cela démontre le théorème.

Notes

Summary

16m 13s

Corollaire : Si V est de dimension finie avec base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ alors tout ensemble $S \subset V$ avec plus que n éléments est lié.

4.3 Bases

Maintenant j'aimerais énoncer un corollaire que nous avons montré en cours de route, et ça c'est si *V* est de dimension finie, avec base *B* qui possède *n* éléments, alors tout ensemble *S* dans *V* avec plus que *n* éléments est lié. Donc cela est démontré. Ce n'est pas vraiment un corollaire du théorème mais c'est un corollaire de la démonstration comme je l'ai montré je vais l'utiliser par la suite dans d'autres arguments, je voudrais l'énoncer ici. Dans la prochaine vidéo, on va aborder la définition de ce qu'est la dimension d'un espace vectoriel.

Notes

Summary

17m 19s