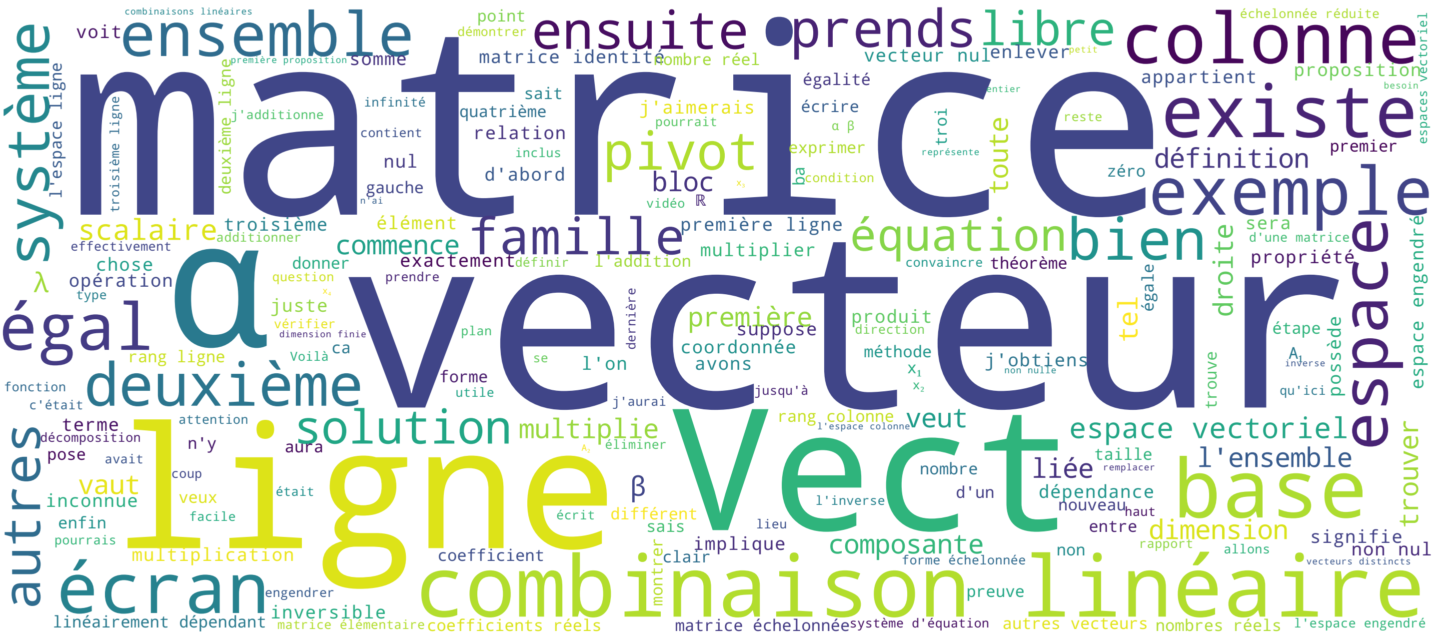
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.2 Dépendance et indépendance linéaires : propriétés et critères

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Proposition. Soient $v_1, \ldots, v_r$ des vecteurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V. Alors $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement dépendants

4.2 Dépendance et indépendance linéaires: propriétés et critères

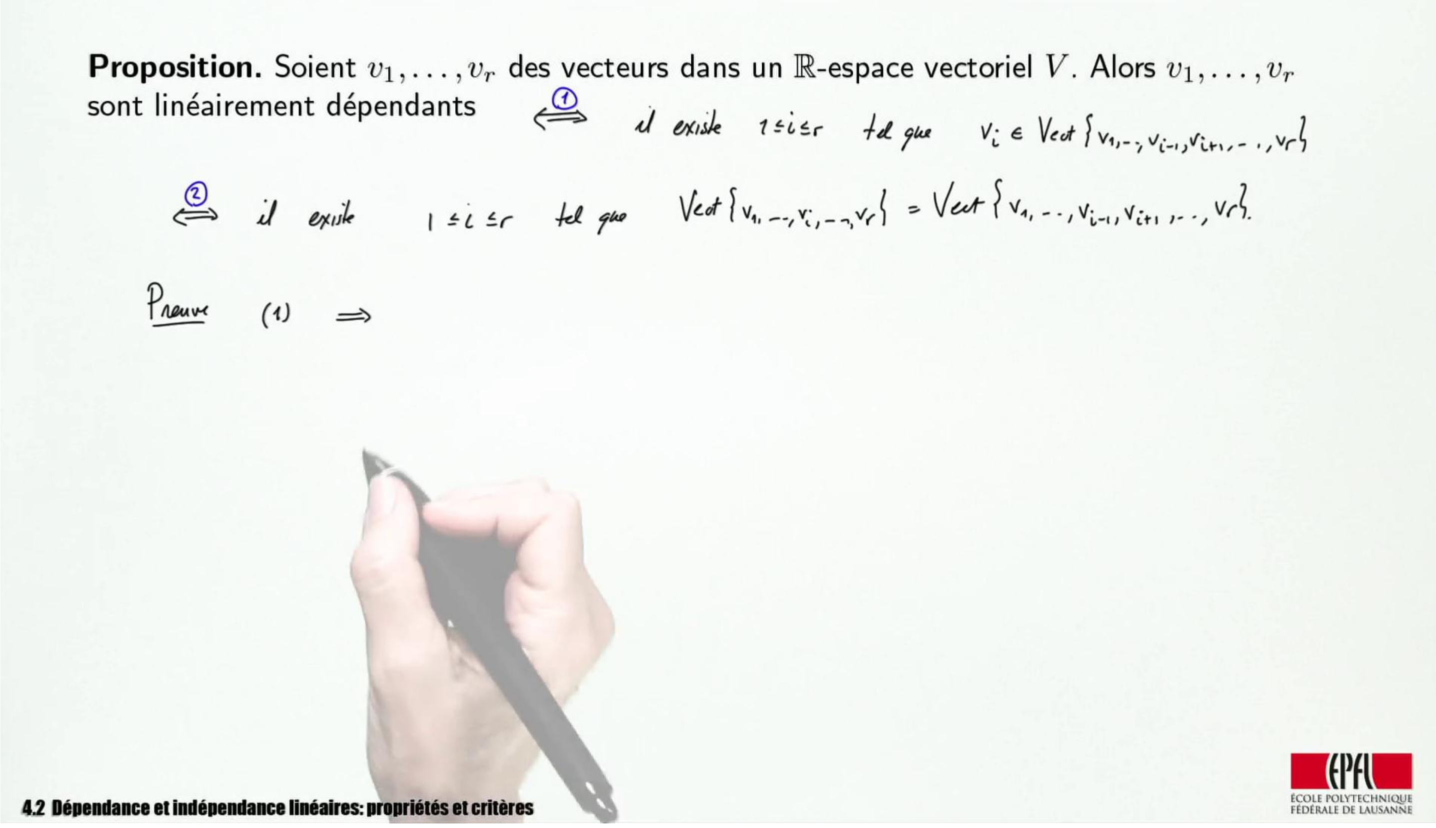
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Nous continuons avec l'étude de la notion de dépendance et d'indépendance linéaire. Je vais donner deux critères importants pour déterminer si une famille est linéairement indépendante ou dépendante.

Notes

Summary

0m 04s

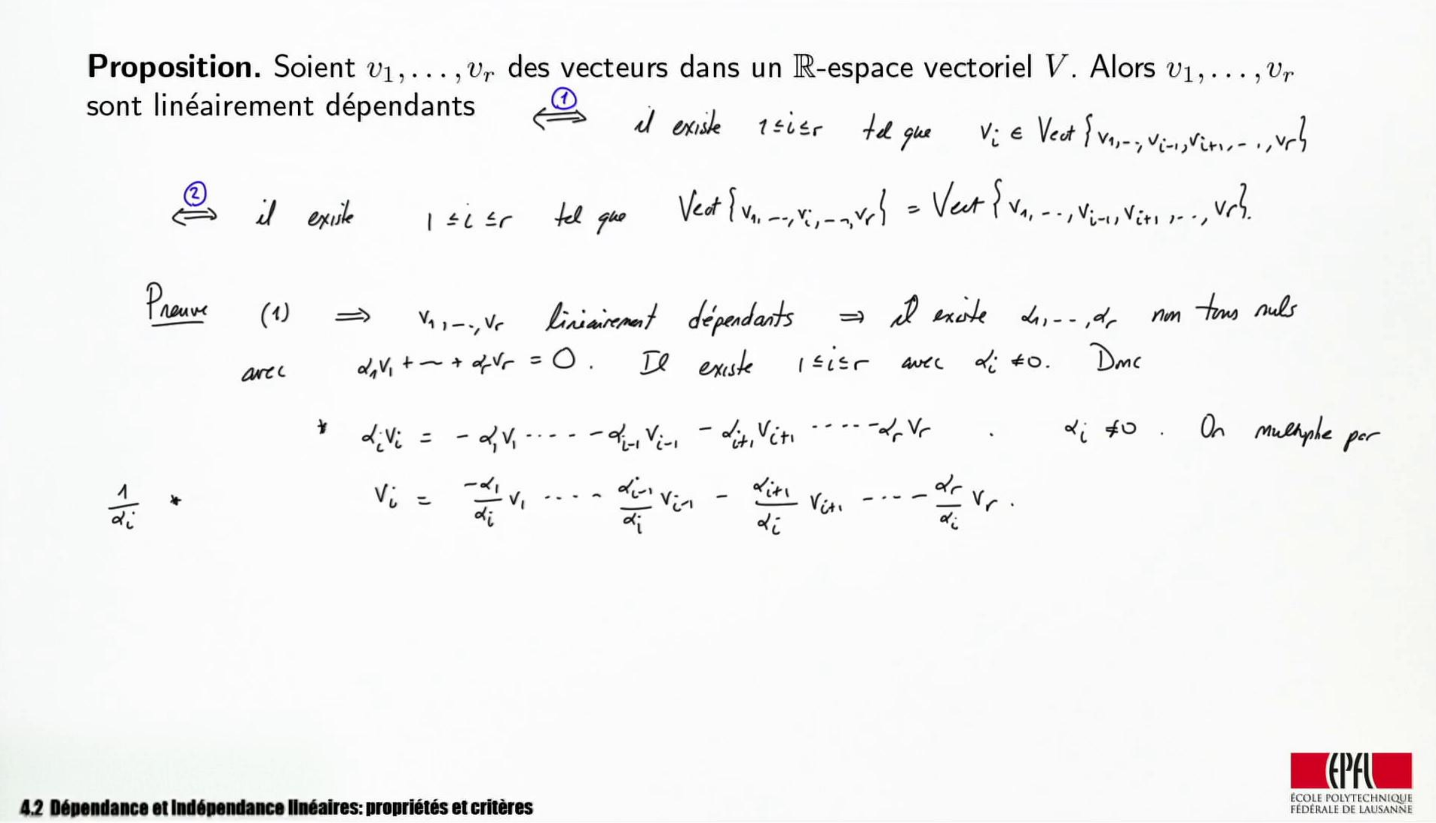


Je commence par une proposition. Je me donne des vecteurs $v_1, \dots, v_r$, dans un R-espace vectoriel V. Alors $v_1, \dots, v_r$ sont linéairement dépendants si et seulement si il existe un entier i entre 1 et r tel que v_i appartient à l'espace engendré par tous les autres, i.e. à $vect(\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\})$. C'est une équivalence. Aussi, si et seulement si il existe un entier i entre 1 et r tel que $vect(\{v_1, \dots, v_r\})$, i.e. l'espace engendré par tous les vecteurs est égal à $vect(\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\})$. Cela signifie que cet espace-là, on l'engendre avec moins de vecteurs mais ça donne quand même le même espace. Je vais numéroter cela donc ceci est une équivalence que j'aimerais montrer, et une deuxième. Preuve : Je commence par la première équivalence. Je vais faire la direction comme ceci, c'est-à-dire que je suppose que j'ai des vecteurs qui sont linéairement dépendants. Maintenant comme ils sont dépendants, il existe des scalaires.

Notes

Summary

0m 20s

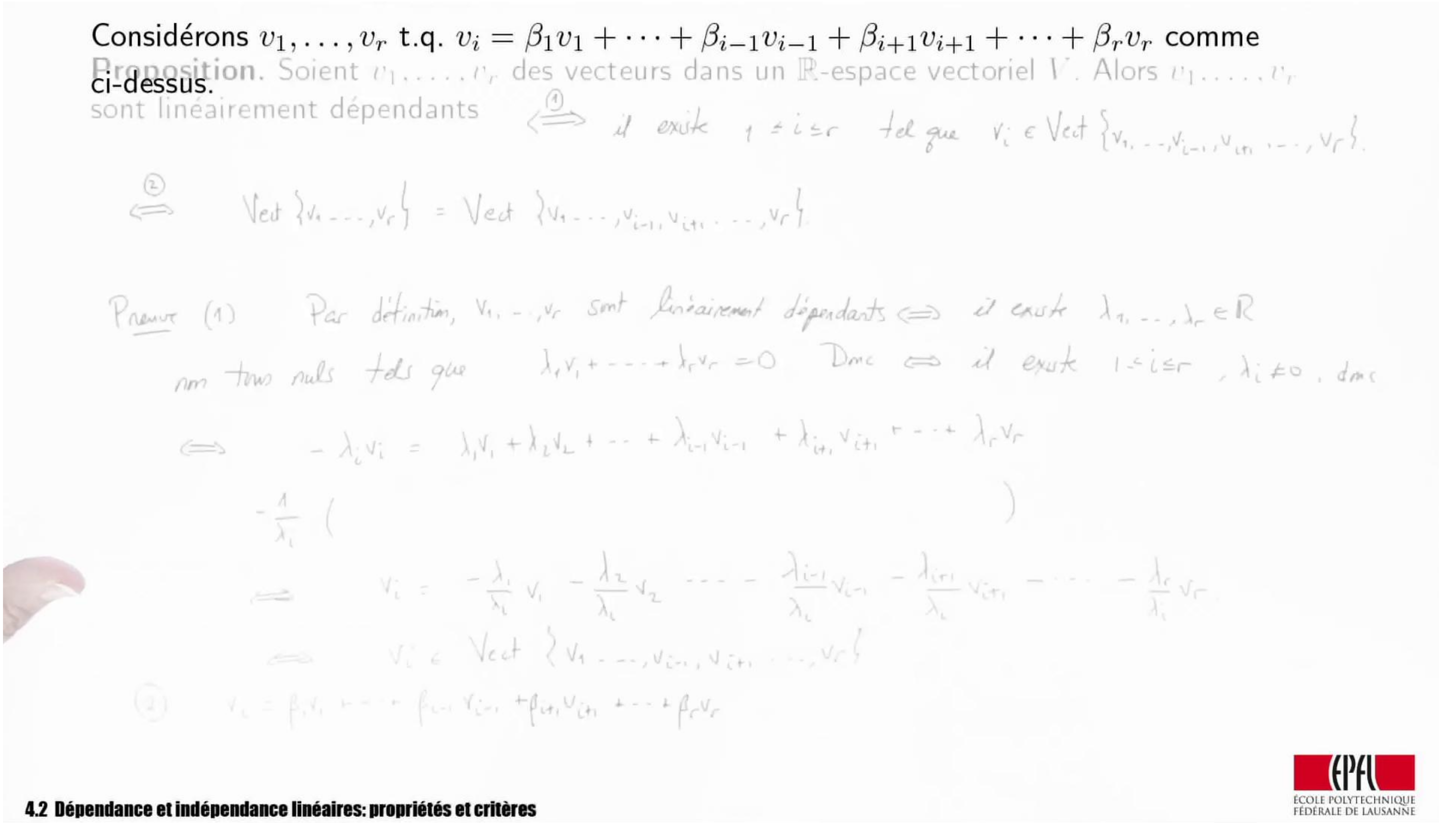


Je répéte : $v_1, \ldots, v_r$ linéairement dépendants, Cela implique qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ non tous nuls tels que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = 0$, le vecteur nul. Alors comme ils ne sont pas tous nuls, il existe un i entre 1 et r avec α_i différent de 0. Je vais utiliser celui-là. Je réécris l'égalité ici : j'ai $\alpha_i v_i = - \alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_{i-1} v_r - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \ldots - \alpha_r v_r$ De plus, le α_i est différent de 0 donc je peux multiplier par $1/\alpha_i$, cette égalité et on obtient $v_i = -(\alpha_1/\alpha_i) v_1 - \ldots$ *[voir écran] Quel était le but ? Le but c'était de voir qu'il existe un i tel que* v_i *appartient au Vect de tous les autres vecteurs et maintenant on voit qu'on a* v_i *écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs, donc ça c'est effectivement dans le* $\mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r\})$.

Notes

Summary

2m 16s

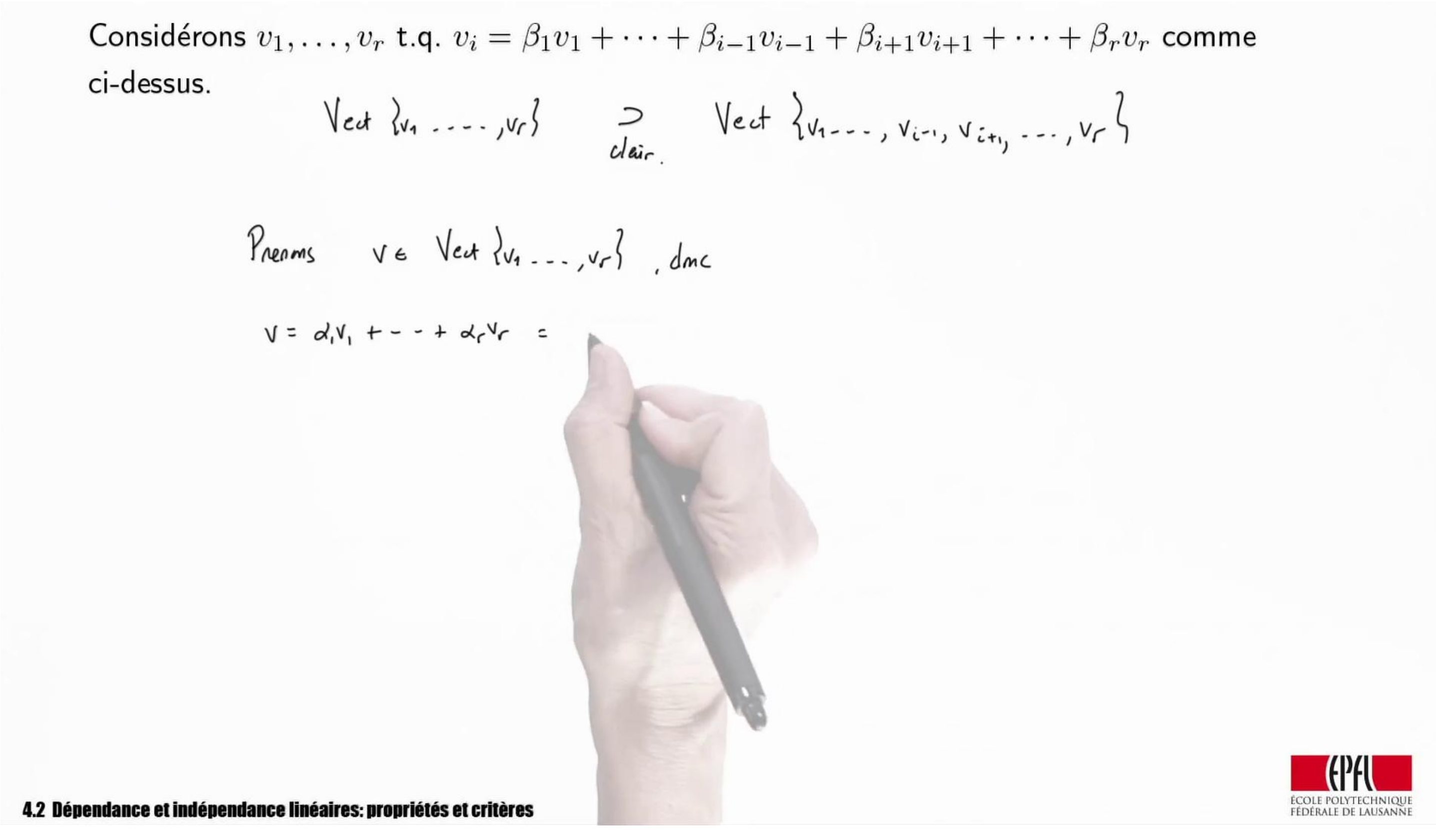


On a montré que si les vecteurs sont linéairement dépendants, il existe un i tel que v_i appartient au sous-espace engendré par les autres vecteurs. Maintenant, la preuve de l'autre implication est très similaire donc je ne la ferai pas, je laisse cela pour vous. Maintenant, la deuxième équivalence. Ici, je suis censée montrer que si il existe un i tel que $v_i \in Vect(\{v_1,\dots, v_{i-1}, v_{i+1},\dots, v_r\})$, alors il existe un i tel que les deux espaces vectoriels engendrés par ces vecteurs-là sont égaux. Je commence ici en supposant qu'il existe un i donc on suppose que v_i est dans le vect($\{v_1,\dots, v_{i-1}, v_{i+1},\dots, v_r\}$), en laissant tomber le v_i. Donc je suppose que $v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_r v_r$ Voilà l'hypothèse, c'est que j'ai v_i qui est dans le Vect de ces vecteurs-là donc je peux l'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs. C'est ce que j'écris ici.

Notes

Summary

4m 45s



J'ai des vecteurs et je peux écrire v_i en terme des autres : $v_1,\dots, v_r$ où j'enlève v_i. Maintenant j'aimerais vous convaincre que le sous-espace engendré par $v_1,\dots, v_r$ est le même que le sous-espace engendré par $v_1,\dots, v_{i-1}, v_{i+1},\dots, v_r$. J'ai les deux sous-espaces, le Vect de $v_1,\dots, v_r$ et le sous-espace Vect($\{v_1,\dots, v_{i-1}, v_{i+1},\dots, v_r\}$). Maintenant il faut se rappeler la définition. Ceci est le sous-espace de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs. Il est clair que si j'ai une combinaison linéaire de ces vecteurs, elle est incluse là-dedans. Cette inclusion-là est claire. Ce que je dois faire c'est commencer avec une combinaison linéaire de ces vecteurs, donc prenons v dans le Vect($v_1,\dots, v_r$), donc $v = \alpha_1 v_1 +\dots+ \alpha_r v_r$. Maintenant j'aimerais l'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là. Donc c'est [voir écran] et puis, c'est α_i et là je vais remplacer.

Notes

Summary

6m 20s

Considérons $v_1, \dots, v_r$ t.q. $v_i = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1}v_{i-1} + \beta_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \beta_r v_r$ comme ci-dessus.

$$\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_r\} \underset{\text{clair.}}{\supset} \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}$$

Prenons $v \in \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_r\}$, donc

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1}v_{i-1} + \alpha_i(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1}v_{i-1} + \beta_{i+1}v_{i+1} + \dots + \beta_r v_r) + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \dots + \alpha_r v_r$$

$$\in \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}.$$

4.2 Dépendance et indépendance linéaires: propriétés et critères

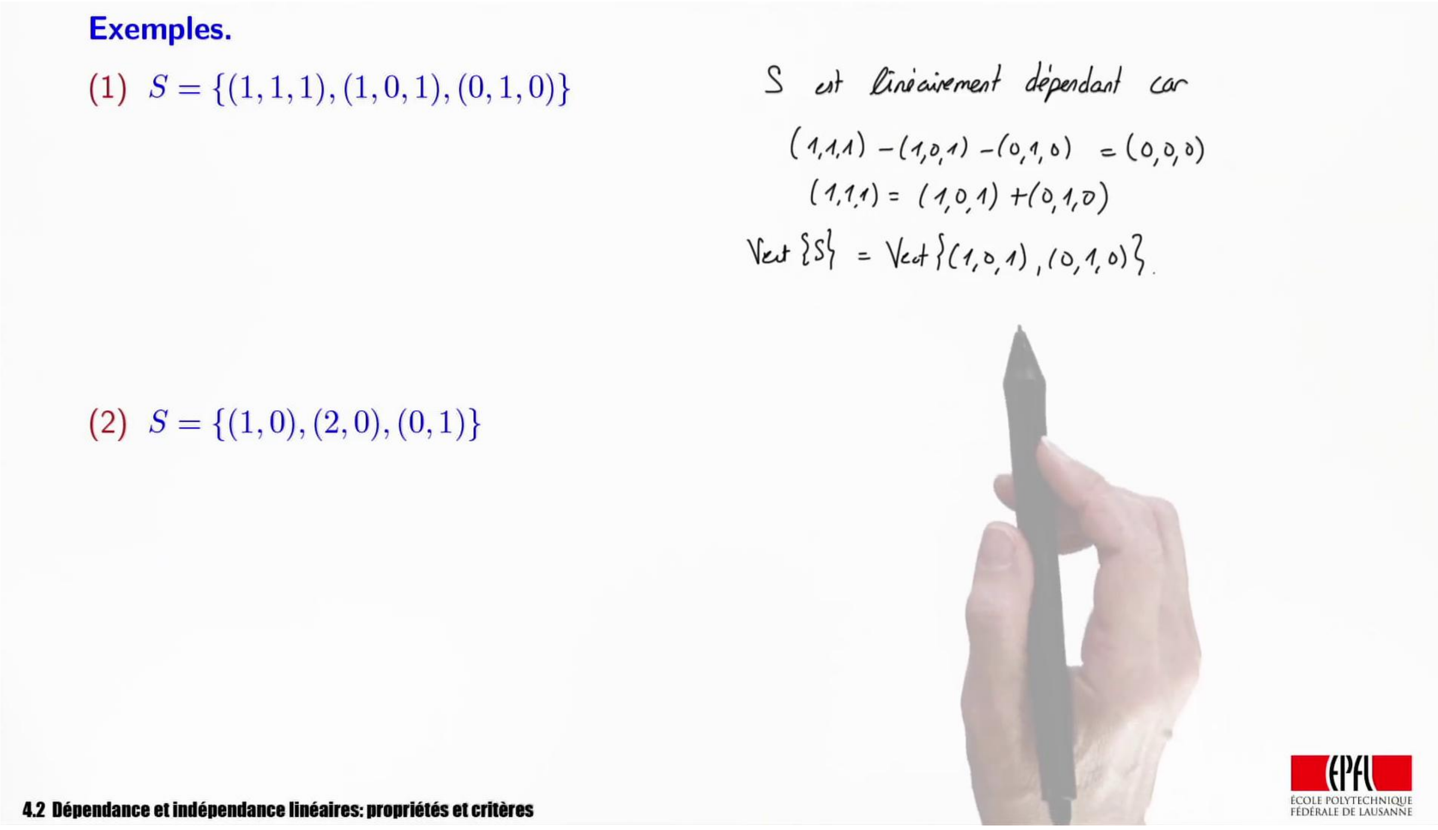
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc là, je vais mettre cette expression que j'ai pour v_i, [voir écran] Et ensuite je continue [voir écran] Donc je commence avec une combinaison linéaire de v_1,..., v_r, quand j'arrive au terme v_i je le remplace par cette combinaison linéaire et on voit que tout ce qui reste est une combinaison linéaire des vecteurs v_1,..., v_{i-1}, v_{i+1},..., v_r. Cela montre l'autre inclusion, et donc on a l'égalité des deux ensembles et par conséquent, (1) implique (2). Pour le (2) implique (1), il est clair que si le Vect de v_1,... v_r est égal au Vect de v_1,..., v_r sans le v_i alors on peut écrire v_i comme une combinaison linéaire des autres. C'est exactement ce que je voulais montrer. Donc avoir une relation de dépendance dans une famille, cela signifie que l'on peut trouver un ensemble de vecteurs distincts finis telle qu'une combinaison linéaire qui vaut le vecteur 0. Cela veut aussi dire qu'on peut trouver un vecteur dans la famille qui s'exprime comme une combinaison linéaire des autres et cela veut aussi dire qu'on peut engendrer le même sous-espace par ces vecteurs-là qu'en enlevant le vecteur qui était une combinaison linéaire des autres. Voyons des exemples.

Notes

Summary

7m 58s



Dans ces exemples je voudrais illustrer un point, c'est que l'on sait que quand on a une relation de dépendance dans une famille et qu'on veut engendrer le sous-espace, on peut enlever un des vecteurs. Mais il faut quand même faire attention, on ne peut pas enlever n'importe quel vecteur. C'est ce que je voulais illustrer. Ici la famille S est linéairement dépendante car (bon je ne donne pas un exemple compliqué) si je fais (1, 1, 1) - (1, 0, 1) - (0, 1, 0), ce la vaut le vecteur nul. Je vois aussi que (1, 1, 1) = la somme des deux autres. Enfin, je vois que si je fais le Vect(S), c'est la même chose que le Vect de ces deux vecteurs-là [voir écran]. Donc c'est exactement ce qu'on a vu dans la preuve. J'ai une combinaison linéaire qui vaut 0, ça veut dire que je peux exprimer un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres et cela veut aussi dire que si je fais l'espace engendré par cette famille-là, c'est le même que le sous-espace engendré par les vecteurs qui restent quand j'enlève celui-là. Ici on voit qu'en fait, je pourrais aussi exprimer ce vecteur comme la différence des deux autres, ce vecteur-là comme la différence des deux autres.

Notes

Summary

9m 47s

Exemples.

(1) $S = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,0)\}$

S est linéairement dépendant car

$(1,1,1) - (1,0,1) - (0,1,0) = (0,0,0)$

$(1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0)$

$\mathrm{Vect}\{S\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,1), (0,1,0)\}$

$= \mathrm{Vect}\{(1,1,1), (1,0,1)\}$

$= \mathrm{Vect}\{(1,1,1), (0,1,0)\}$

(2) $S = \{(1,0), (2,0), (0,1)\}$

S est une famille liée car

$2(1,0) + 0\cdot(0,1) = (2,0)$

$2(1,0) = (2,0).$

$\mathrm{Vect}\{S\} = \mathrm{Vect}\{(1,0), (0,1)\}.$

$\neq \mathrm{Vect}\{(1,0), (2,0)\}.$

4.2 Dépendance et indépendance linéaires: propriétés et critères

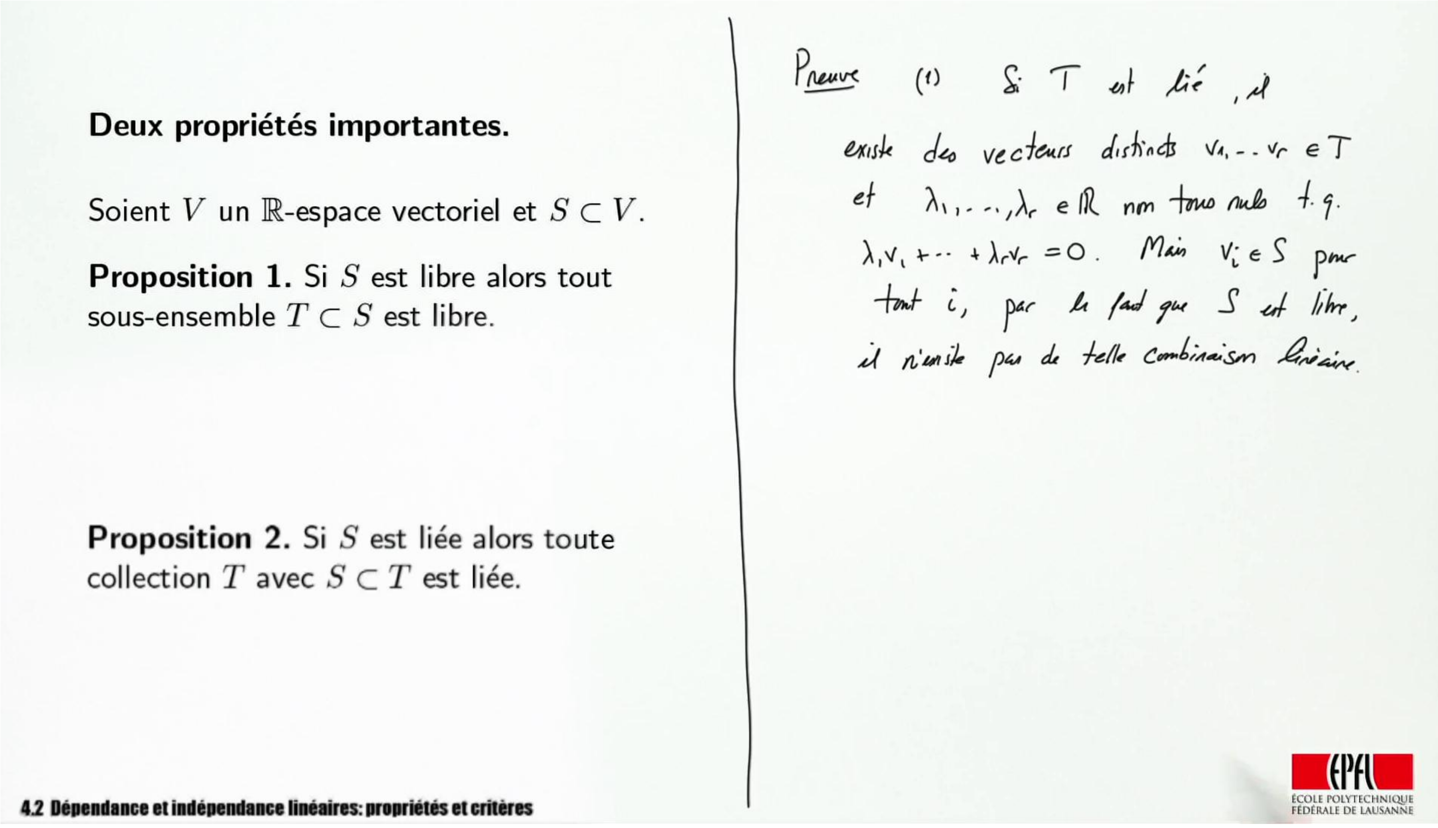
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ici, on a que le Vect(S) est égal aussi à Vect({(1, 1, 1), (1, 0, 1)}) donc les deux premiers vecteurs ou bien aussi à Vect({(1, 1, 1), (0,1,0)}), i.e. le premier et le troisième vecteur. Donc on peut enlever n'importe quel vecteur et on engendre le même sous-espace. À comparer avec cet exemple-ci, ici c'est aussi une famille liée car si je fais 2(1, 0) + 0(0, 1), c'est le deuxième vecteur. C'est-à-dire, 2 fois le premier vecteur est égal au deuxième. C'est une relation de dépendance. Donc je peux exprimer un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc le Vect(S), c'est... Bon je vais enlever le vecteur que je peux exprimer comme une combinaison linéaire des autres. Mais ici, cette fois, il faut faire attention parce que ceci n'est pas égal au Vect({(1, 0), (2, 0)}). C'est ce que je veux vous montrer. On a beau avoir une relation de dépendance, on doit regarder cette relation de dépendance pour savoir quel vecteur on peut enlever. Ici on peut enlever le (2, 0), on pourrait aussi enlever le (1, 0) parce que c'est la moitié du précédent, mais on ne pourrait pas enlever le troisième vecteur et engendrer le même sous-espace.

Notes

Summary

11m 26s



Maintenant j'énonce deux propriétés importantes. Donc je me donne un R-espace vectoriel et un sous-ensemble S dans V. La première proposition dit que si S est libre, alors tout sous-ensemble T dans S est aussi libre. La deuxième proposition dit que si S est liée, alors toute collection qui contient S est aussi liée. Je vais faire la preuve. Premièrement, je veux montrer que l'ensemble T est libre donc je suppose que T n'est pas libre. Donc si T est liée, cela signifie qu'il existe des vecteurs distincts v_1,..., v_r dans T et des scalaires, λ_1,..., λ_r dans R non tous nuls tels que j'ai une combinaison linéaire qui vaut 0. Ces vecteurs, étant dans T sont aussi dans S. I.e. v_i est dans S pour tout i, donc on aura une combinaison linéaire de vecteurs dans S qui sont liés et cela contredit le fait que S est libre. Il n'existe pas de telle combinaison linéaire ou bien les scalaires sont tous nuls. Deuxièmement, c'est presque pareil.

Notes

Summary

13m 07s

Deux propriétés importantes.

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$.

Proposition 1. Si S est libre alors tout sous-ensemble $T \subset S$ est libre.

Proposition 2. Si S est liée alors toute collection T avec $S \subset T$ est liée.

Preuve (1) Si T est lié, il existe des vecteurs distincts $v_1, \dots, v_r \in T$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$. Mais $v_i \in S$ pour tout i, par le fait que S est libre, il n'existe pas de telle combinaison linéaire. ∎

(2) Il existe $w_1, \dots, w_t \in S$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q. $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_t w_t = 0$. $w_i \in S \subset T$. On a une relation de dépendance entre des vecteurs dans T, donc T est liée. ∎

4.2 Dépendance et indépendance linéaires: propriétés et critères

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ici je commence avec une famille qui est liée, et cette fois au lieu de prendre un sous-ensemble, je prends un ensemble qui contient S et je prétends que cela implique que T est aussi liée. C'est assez clair d'après la première proposition parce qu'ici je prends les vecteurs dans S qui donnent une combinaison linéaire qui vaut 0 donc il existe, je les appelle autrement, il existe w_1,..., w_t dans S et des scalaires α_1,..., α_t dans R, non tous nuls tels que on a une combinaison linéaire qui vaut 0. Mais tous ces vecteurs sont dans S qui est inclus dans T donc on a une relation de dépendance entre des vecteurs dans T donc par définition T est liée. Ce sont deux propriétés qui peuvent aider quand on veut déterminer si une famille est liée ou libre. Donc on a commencé par une proposition qui donne une caractérisation différente de la dépendance linéaire et ensuite on a fait des exemples, j'espère que vous avez compris et j'ai terminé avec ces deux propositions qui sont aussi utiles quand on veut déterminer si une famille est libre ou liée.

Notes

Summary

15m 20s