ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 4 : Bases et dimension

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman

Search MOOC

Video

EPFL

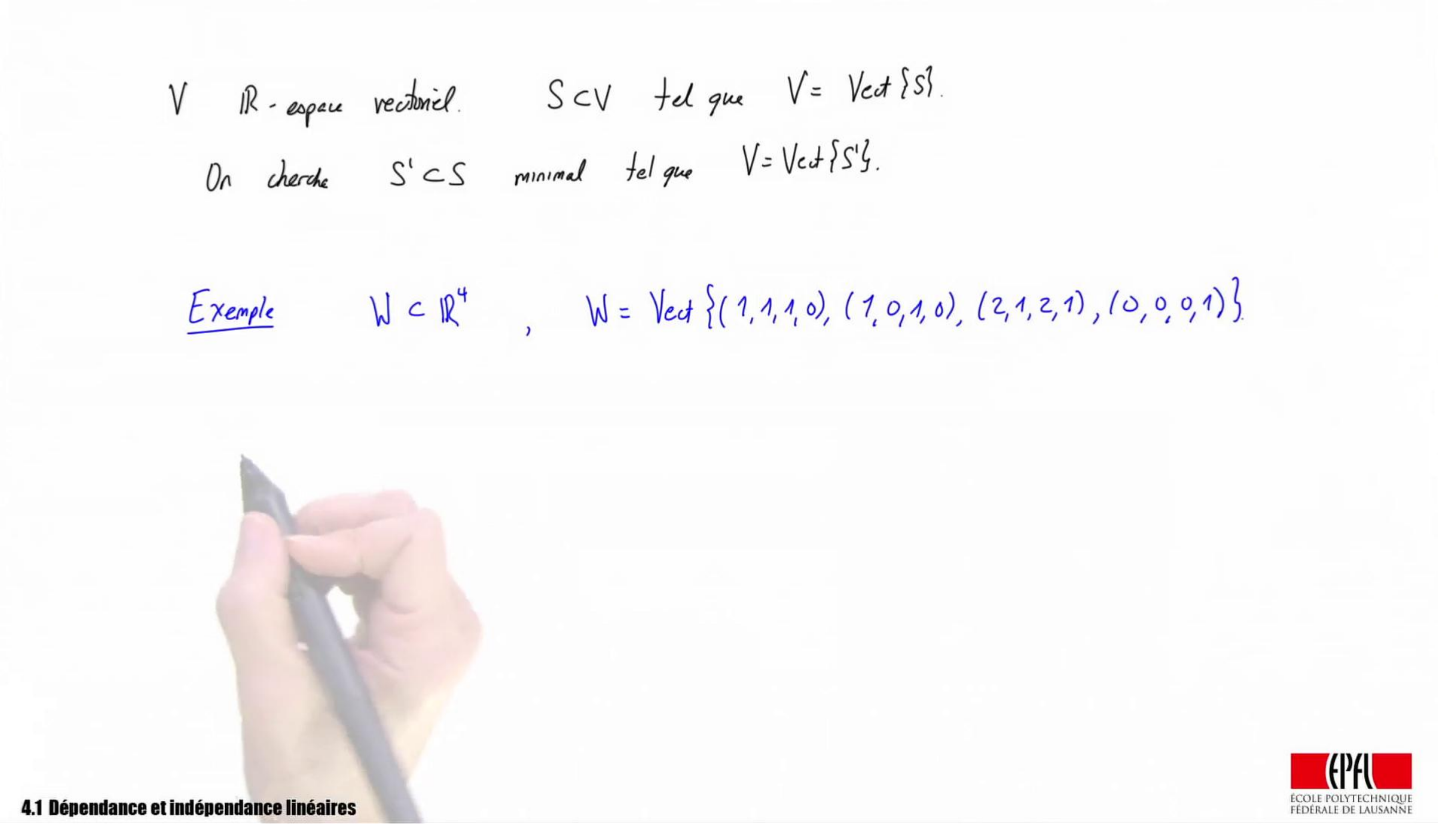
4.1 Dépendance et indépendance linéaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire une notion qui est très importante dans l'étude de l'algèbre linéaire et c'est la notion de la base d'un espace vectoriel. Ça nous donnera la possibilité de parler de, entre guillemets, la taille d'un espace vectoriel. Je vais commencer par une petite motivation pour cette notion.

Notes

Summary

0m 04s



Je me donne V, un R-espace vectoriel et je me donne un S dans V, tel que V est engendré linéairement par S. C'est un ensemble générateur pour V. On cherche un sous-ensemble S' de S aussi petit que possible, donc S' minimal, tel que V est aussi engendré par S'. On commence avec une famille génératrice, elle peut être très grande, cela pourrait même inclure tous les vecteurs de V, et ce qu'on souhaite, c'est de trouver là-dedans un ensemble aussi petit que possible tel que V est aussi engendré par cette famille-là. Exemple: si je prends W dans R^4, l'espace vectoriel engendré par les vecteurs *(1,1,1,0)*, *(1,0,1,0)*, *(2,1,2,1)* et *(0,0,0,1)*, voilà l'espace vectoriel que je veux considérer et j'ai une famille génératrice qui consiste en ces quatre vecteurs-là. Maintenant, j'ai fait exprès, je sais déjà que le vecteur *(2,1,2,1)*, si je regarde bien, c'est tout simplement la combinaison linéaire des trois autres vecteurs...

Notes

Summary

0m 27s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $S \subset V$ une collection de vecteurs dans V. On dit que S est linéairement dépendante (ou une famille liée) s'il existe des vecteurs distincts $v_1, \ldots, v_r \in S$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$.

S'il n'existe pas de tels vecteurs dans S alors on dit que S est linéairement indépendante (ou que S est une famille libre).

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

qui est égale à *(1,1,1,0)* + *(1,0,1,0)* + *(0,0,0,1)* Donc je vois que si j'enlève ce vecteur de la famille génératrice, je vais quand même engendrer le même sous-espace vectoriel Donc *W* est aussi égal au *Vect* de ces trois vecteurs-là. Faisons le raisonnement. Ici, si je prends une combinaison linéaire de ces vecteurs, ensuite pour ce vecteur-ci je vais substituer la somme des trois autres et j'aurai une combinaison linéaire de ces trois vecteurs-là. Cet espace vectoriel-ci est inclus là-dedans. Il est clair que si je prends une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, c'est inclus là-dedans. Donc il est vrai que *W* est égal au *Vect* de ces trois vecteurs-là. Donc je vois que je pourrais diminuer la taille de cette famille génératrice, au lieu d'avoir quatre vecteurs, je pourrais n'avoir que ces trois là. En fait, on peut montrer qu'on ne peut pas diminuer plus. Le but est de trouver un ensemble minimal et ici on aura un ensemble minimal. Avant de faire la définition, je veux souligner quelque chose ici. D'une part, j'ai ce vecteur qui est écrit comme une combinaison linéaire des trois autres, mais je peux aussi mettre tout d'un côté dans cette équation et j'aurai que le vecteur nul est égal à la somme des trois, moins ce vecteur-là. C'est à partir de cette égalité-là que nous allons construire notre définition.

Notes

Summary

2m 15s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $S \subset V$ une collection de vecteurs dans V. On dit que S est linéairement dépendante (ou une famille liée) s'il existe des vecteurs distincts $v_1, \ldots, v_r \in S$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$.

une combinaison linéaire de vecteurs dans S se réduit au vecteur nul.

S'il n'existe pas de tels vecteurs dans S alors on dit que S est linéairement indépendante (ou que S est une famille libre).

<u>Remarques</u> (1) Si $0 \in S$, alors S est liée. Pourquoi

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Voici la définition formelle. Je me donne V un R-espace vectoriel et S une collection de vecteurs dans V. On dit que S est linéairement dépendante ou bien on dit que S est une famille liée s'il existe des vecteurs distincts $v_1,\ldots,v_r$ dans S et des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ non tous nuls tel qu'on a cette combinaison linéaire des vecteurs égale à zéro. C'est-à-dire, une combinaison linéaire de vecteurs dans S se réduit au vecteur nul. C'est important ici on a des scalaires et il y a au moins un de ces scalaires qui n'est pas 0. S'il n'existe pas de tels vecteurs dans S, donc si on ne peut pas aller chercher un nombre fini de vecteurs et faire une combinaison linéaire qui vaut zéro, alors on dit que S est linéairement indépendante ou bien que S est une famille libre. Voilà la définition. Avant de passer aux exemples, j'aimerais faire quelques remarques. La première remarque, c'est que si le vecteur nul appartient à S, alors forcément S est une famille liée. Maintenant pourquoi ? On regarde la définition.

Notes

Summary

4m 04s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $S \subset V$ une collection de vecteurs dans V. On dit que S est linéairement dépendante (ou une famille liée) s'il existe des vecteurs distincts $v_1, \ldots, v_r \in S$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$.

une combinaison linéaire de vecteurs dans S se réduit au vecteur nul.

S'il n'existe pas de tels vecteurs dans S alors on dit que S est linéairement indépendante (ou que S est une famille libre).

Remarques (1) Si $0 \in S$, alors S est liée. Pourquoi : $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. $\underbrace{\lambda \cdot 0}_{\text{combinaison linéaire de vecteurs dans } S.} = 0$

(2) S n'est pas nécessairement un ensemble fini.

(3) $S = \emptyset$ est-il libre ou li

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

EPFL ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je dois aller chercher une combinaison linéaire des vecteurs dans *S* qui vaut *0* sans que tous les coefficients soient *0* donc je prends *λ=1*, c'est un nombre réel différent de *0* et je fais *λ* fois un vecteur dans *S*: *0*, et ça donne effectivement le vecteur nul. Ceci est une combinaison linéaire, qui est toute petite, mais c'est une combinaison linéaire de vecteurs dans *S* qui donne le vecteur nul. Le deuxième point, il est important, c'est que *S* n'est pas forcément un ensemble fini. On peut être dans un espace vectoriel avec énormément de vecteurs et on pose une question sur un nombre fini de vecteurs: existe-t-il un nombre fini de vecteurs là-dedans, tel qu'il y a une combinaison linéaire qui vaut *0*? Mais l'ensemble *S* peut être un ensemble infini, avec un nombre infini de vecteurs. D'ailleurs nous ferons un exemple à ce sujet. Ensuite, un dernier point, on peut considérer *S* comme l'ensemble vide, c'est un sous-ensemble, et on se demande si l'ensemble vide est libre ou lié. Donc l'ensemble vide est-il libre ou lié ? Alors on regarde la définition.

Notes

Summary

6m 04s

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $S \subset V$ une collection de vecteurs dans V. On dit que S est linéairement dépendante (ou une famille liée) s'il existe des vecteurs distincts $v_1, \ldots, v_r \in S$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$.

une combinaison linéaire de vecteurs dans S se réduit au vecteur nul.

S'il n'existe pas de tels vecteurs dans S alors on dit que S est linéairement indépendante (ou que S est une famille libre).

Remarques (1) Si $0 \in S$, alors S est lié. Pourquoi : $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. $\underbrace{\lambda \cdot 0}_{\text{combinaison linéaire de vecteurs dans } S} = 0$

(2) S n'est pas nécessairement un ensemble fini.

(3) $S = \emptyset$ est-il libre ou lié ?
S est une famille indépendante.

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

La définition dit que l'ensemble serait lié s'il existe des vecteurs ici dedans avec une certaine propriété. Comme il n'y a pas de vecteurs dans *S*, on aura beau chercher des vecteurs dedans pour faire une combinaison linéaire, on n'en trouvera pas. Donc par la définition, *S* est forcément une famille indépendante. Maintenant cela vous dérange peut-être parce que parler de l'ensemble vide est un peu dérangeant, donc si vous n'aimez pas, vous pouvez prendre cela comme une convention, mais c'est une conséquence de la définition.

Notes

Summary

8m 05s

Exemples. Question : S linéairement dépendant ou indépendant

(1) $V = \mathbb{R}^4$

$S = \{(1,1,1,2),(0,1,0,3),(-1,0,1,0),(1,3,3,7)\}$

(2) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$

$S = \{x^3 - 2x, x^2 + x + 1, x - 2\}$

(3) $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$S = \{f, g, h\}$ où $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$

(5) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R}), \quad S = \{1, x, x^2, \ldots\}$

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

(1) Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$\alpha(1,1,1,2) + \beta(0,1,0,3) + \gamma(-1,0,1,0) + \delta(1,3,3,7) = (0,0,0,0)$

$\alpha - \gamma + \delta = 0$

$\alpha + \beta + 3\delta = 0$

$\alpha + \gamma + 3\delta = 0$

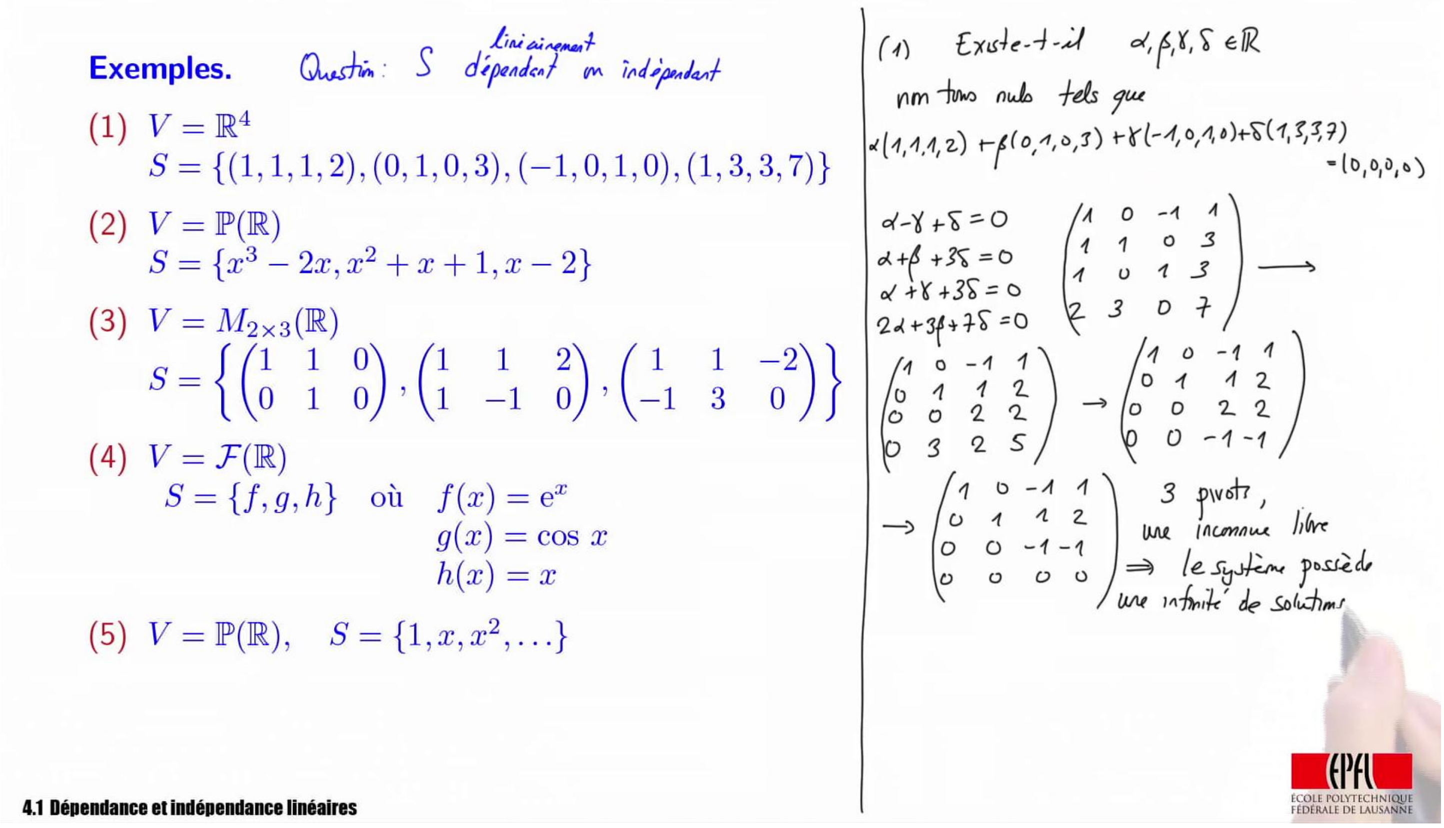
$2\alpha + 3\beta + 7\delta = 0$

Maintenant regardons les exemples. Je vais les développer au fur et à mesure ici, donc je fais un exemple après l'autre. Je ferai beaucoup de calculs au début et ensuite quand vous aurez compris je ferai moins de calculs. Dans le premier exemple, à chaque fois, la question que je me pose est : ces familles sont-elles linéairement dépendantes ou indépendantes ? Donc la question est: *S*, linéairement dépendant ou indépendant ? Exemple 1. La question que je dois me poser est : existe-t-il des scalaires *α*, *β*, *γ*, *δ* dans *R*, parce que j'ai quatre vecteurs, non tous nuls tel que *α* fois le premier vecteur plus *β* fois le deuxième plus *γ* fois le troisième plus *δ* fois le quatrième est égal au vecteur nul. Maintenant, je compare les coordonnées à gauche et les coordonnées à droite et cela donne un système d'équations. J'ai *α + 0β - γ + δ = 0*. Deuxième coordonnée : *α + β + 3δ = 0*. Troisième coordonnée : *α + γ + 3δ = 0*. Et enfin, quatrième coordonnée : *2α + 3β + 7δ = 0*. Maintenant j'ai un système d'équations qui est un système homogène et c'est pour cela qu'on s'est tellement donné de peine à apprendre à résoudre ces systèmes.

Notes

Summary

8m 51s

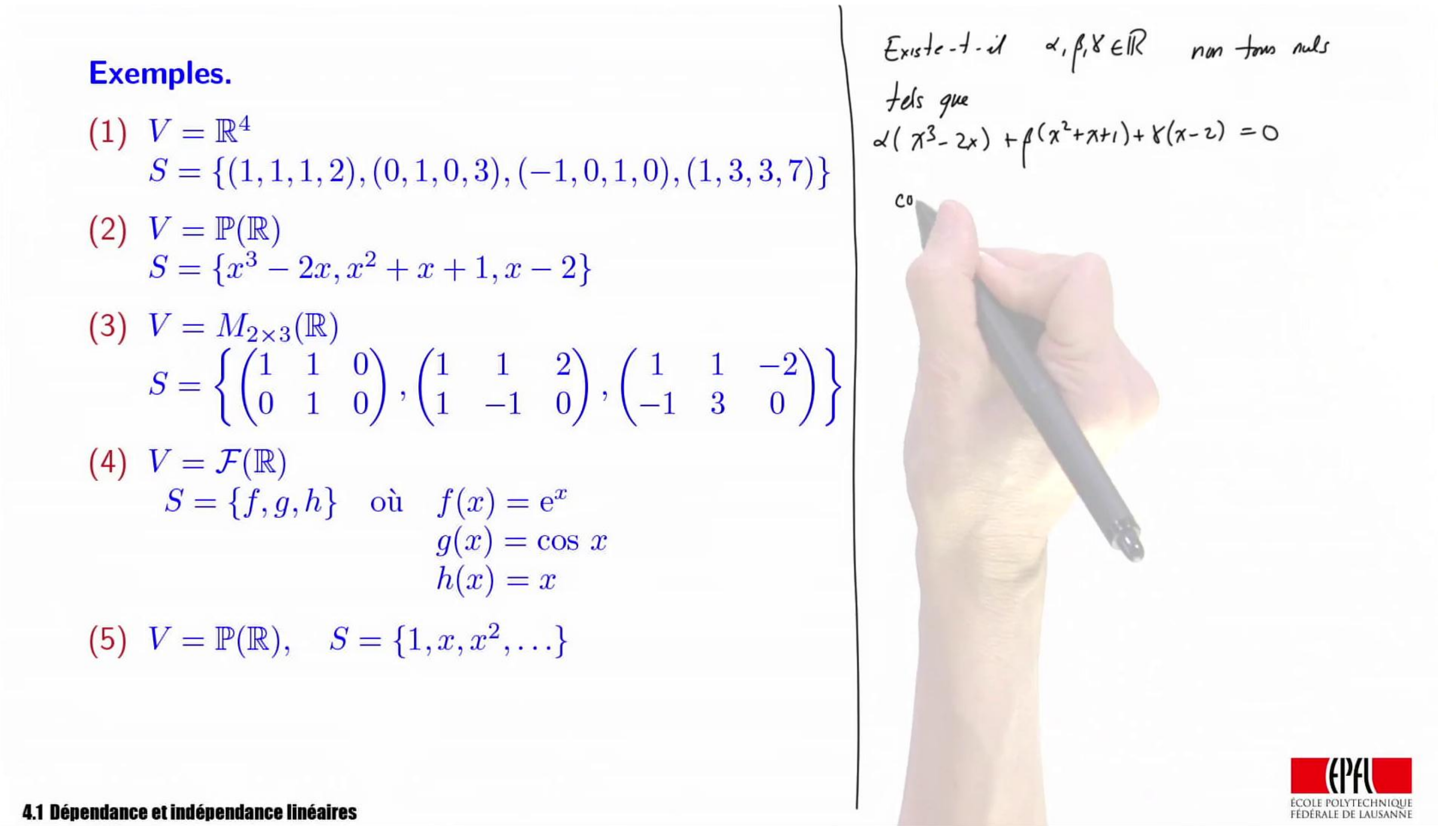


Je pose la matrice du système. Je vais échelonner cette matrice comme on a appris. Voici la matrice du système, la matrice des coefficients. On n'a pas besoin de mettre la colonne des constantes car c'est un système homogène. Je vais vite échelonner cette matrice. D'abord, je m'occupe de la première colonne, donc je rajoute *-1* fois la première ligne à la deuxième. Je rajoute *-1* fois la première ligne à la troisième. Et je rajoute *-2* fois la première ligne à la quatrième. Maintenant je m'occupe de la deuxième colonne. Ici je n'ai rien à faire. Je rajoute *-3* fois la deuxième ligne à la quatrième. Enfin, je vais sauter une étape. Je vais déjà échanger la troisième et quatrième ligne. Ensuite je vais rajouter *2* fois cette ligne à la ligne *(0,0,2,2)* et j'obtiens une ligne de zéros. On se rappelle ce que cela signifie. Cela signifie que l'on a trois pivots, par contre on avait quatre inconnues, donc on a une variable libre. On a une inconnue libre et cela implique qu'il y a une infinité de solutions. Le système possède une infinité de solutions. On est dans un cas homogène donc on sait qu'il y a au moins une solution.

Notes

Summary

10m 55s

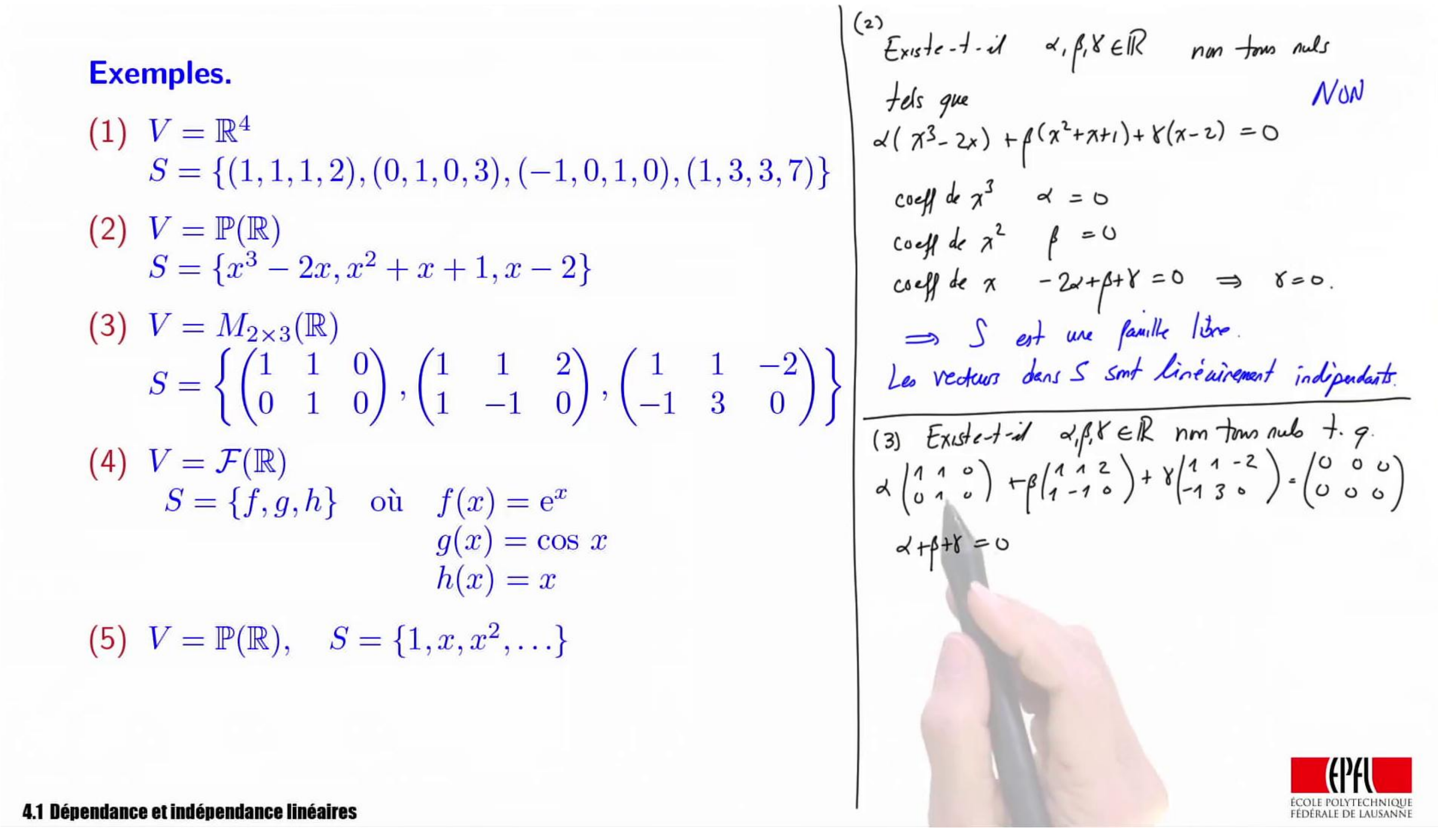


Quand on trouve qu'il y a une variable libre, il y a une infinité de solutions. La réponse à la question : existe-t-il α, β, γ, δ dans R non tous nuls ? Comme il existe une infinité de solutions la réponse est oui, donc cette famille-là est une famille de vecteurs linéairement dépendants. On peut dire que les vecteurs sont linéairement indépendants ou que la famille est une famille linéairement dépendante ou bien que c'est une famille liée. Le premier exemple est terminé. Passons au deuxième exemple. C'est toujours la même question. Cette fois j'ai trois vecteurs dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, existe-t-il α, β, γ, des nombres réels non tous nuls tel que α fois le premier vecteur plus β fois le deuxième plus γ fois le troisième est égal au vecteur nul. Ceci est le polynôme *0* et ici à gauche c'est un polynôme de degré *3*. Maintenant je compare les coefficients de différents termes de x. Donc le coefficient de x^3 à gauche est seulement α et comme il n'y a pas de x^3 à droite, α doit être égal à *0*.

Notes

Summary

13m 03s



Le coefficient de x^2 à gauche est simplement β et comme il n'y a pas de x^2 à droite, $\beta=0$. Le coefficient de x à gauche est $-2\alpha + \beta + \gamma$ qui doit être égal à 0 car il n'y a pas de x à droite, mais comme α et β valent déjà 0 cela implique que $\gamma=0$. Donc la réponse à la question cette fois, existe-t-il α, β, γ non tous nuls tel que... La réponse est non car la seule solution que l'on a trouvée ici est que les trois nombres réels sont égaux à 0 et donc ici, S est une famille libre ou bien on dit que les vecteurs dans S sont linéairement indépendants. Passons au troisième exemple. Je vais faire moins de calculs ici parce que maintenant nous avons l'habitude. Exemple 3. Même question : existe-t-il α, β, γ dans R non tous nuls tel que α fois cette matrice plus β fois celle-ci plus γ fois celle-là soit égal à la matrice nulle? J'écris le système d'équations que cela donne. Je regarde la première coordonnée, le $1,1$. J'ai $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Deuxième coordonnée, le $1,2$: $\alpha + \beta + \gamma = 0$, c'est la même équation.

Notes

Summary

14m 38s

Exemples.

(1) $V = \mathbb{R}^4$
$S = \{(1,1,1,2),(0,1,0,3),(-1,0,1,0),(1,3,3,7)\}$

(2) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$
$S = \{x^3 - 2x, x^2 + x + 1, x - 2\}$

(3) $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
$S = \{f, g, h\}$ où $f(x) = \mathrm{e}^x$
$g(x) = \cos x$
$h(x) = x$

(5) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R}), \quad S = \{1, x, x^2, \dots\}$

(4)

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Troisième coordonnée : *2β - 2γ = 0*. Quatrième ici : *β - γ = 0*. C'est essentiellement la même équation. Ensuite, cette coordonnée-ci : j'ai *α - β + 3γ = 0*. Et ensuite la sixième ici : la coordonnée est simplement *0*. Dans ce système, je n'ai pas besoin d'avoir deux fois la même chose ici, ni deux fois la même là donc dans le système d'équations je ne place que trois équations. C'est vite échelonné. Donc je rajoute *-1* fois la première ligne à la troisième. On voit que cette ligne-là est un multiple de la deuxième donc j'ai ceci. Et de nouveau, la réponse, c'est comme dans le premier exemple. Ici il y a une variable libre ce qui implique qu'il y a une solution non-triviale. Donc, la réponse à la question : existe-t-il… C'est oui, il existe, donc *S* est une famille liée, linéairement dépendante. Passons maintenant à l'exemple 4 qui est un exemple plus difficile et plus intéressant, de ce fait. Exemple 4. Ici on est dans un très grand espace vectoriel l'espace des fonctions de *R* dans *R*. Je prends la fonction exponentielle, la fonction cosinus et la fonction *h(x)=x*, une fonction polynomiale.

Notes

Summary

16m 53s

Exemples.

(1) $V = \mathbb{R}^4$
$S = \{(1,1,1,2),(0,1,0,3),(-1,0,1,0),(1,3,3,7)\}$

(2) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$
$S = \{x^3 - 2x, x^2 + x + 1, x - 2\}$

(3) $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$
$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(4) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
$S = \{f, g, h\}$ où $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$

(5) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \dots\}$

(4) Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q.
$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.
Une égalité de fonctions $\Rightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$
$\alpha e^x + \beta \cos x + \gamma x = 0$

Prenons : $x = 0$ $\alpha + \beta = 0$ $\beta = -\alpha$
$x = \pi/2$ $\alpha e^{\pi/2} + \gamma \cdot \pi/2 = 0$
$x = -\pi/2$ $\alpha e^{-\pi/2} + \gamma(-\pi/2) = 0$
$\alpha(\underbrace{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}_{\neq 0}) = 0$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0,$

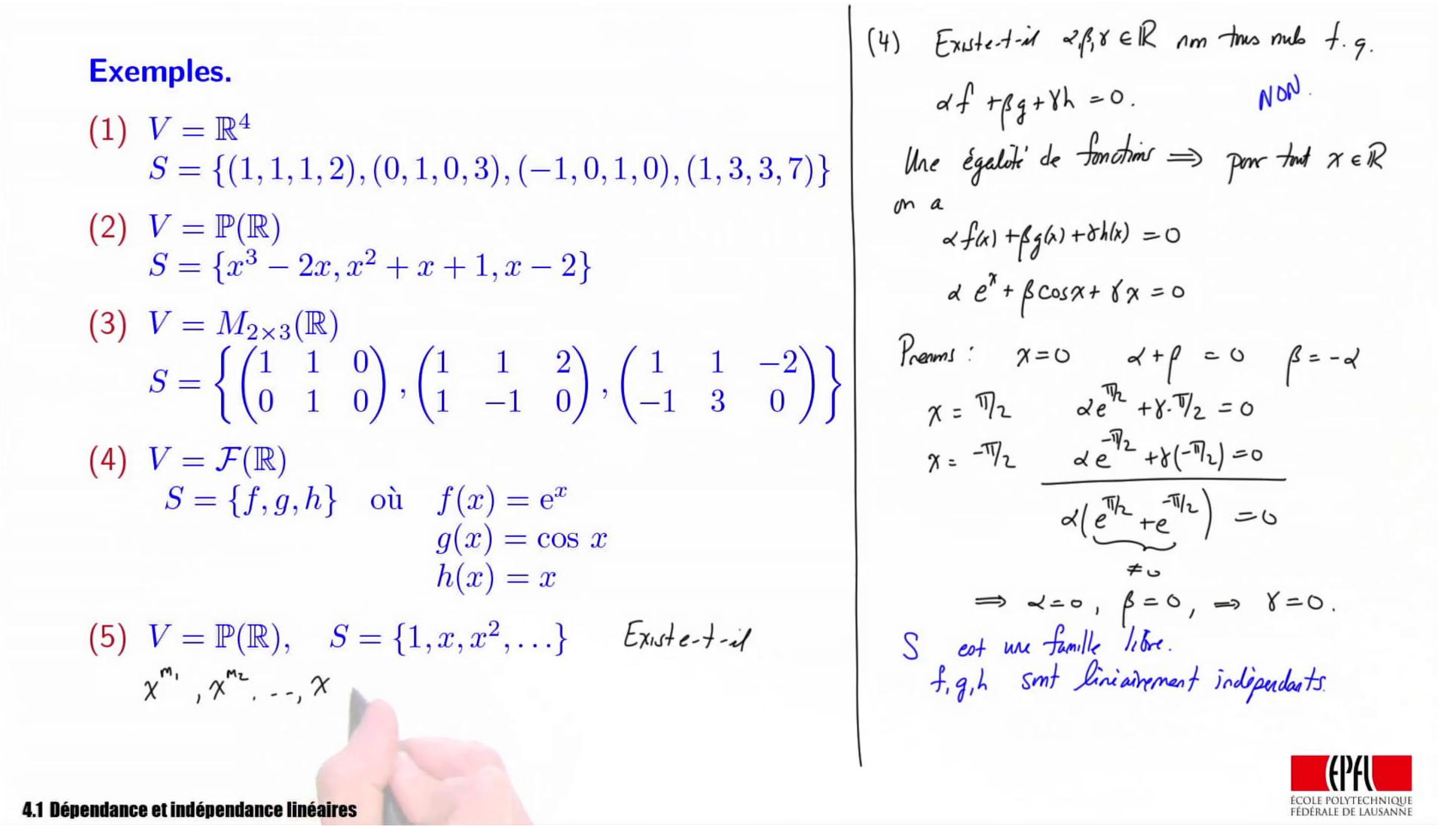
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je pose, comme d'habitude la même question : existe-t-il α, β, γ dans R non tous nuls tel que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$? Cette équation est une égalité de fonctions. Ce qui veut dire que pour tout x nombre réel, on a $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$ Donc je vais mettre mes fonctions là-dedans. J'ai $\alpha e^x + \beta\cos(x) + \gamma x$, c'est une fonction qui est 0 Cela veut dire que pour tout x, je peux substituer dans cette égalité et j'obtiens que le côté gauche donne 0. Je choisis: prenons différentes valeurs de x par exemple $x=0$. Quand je prends $x=0$, je substitue et j'ai $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0$ donc $\beta = -\alpha$. Ensuite si je pose, bon pour faire disparaître le cosinus par exemple $x = \pi/2$, j'aurai $\alpha e^{\pi/2} + 0 + \gamma \cdot \pi/2 = 0$. Si je pose $x = -\pi/2$, j'aurai $\alpha e^{-\pi/2} + \gamma \cdot (-\pi/2) = 0$. Ensuite je vais faire la somme de ces deux équations et j'obtiens $\alpha(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}) = 0$. Il est facile de vérifier que ceci est un nombre non-nul, donc $\alpha=0$. On savait déjà que $\beta=-\alpha$ donc $\beta=0$. Et ensuite, ici j'aurai $\gamma x=0$ pour tout x donc cela implique que $\gamma=0$.

Notes

Summary

18m 52s



Donc cette fois-ci, la réponse à la question existe-t-il α, β, γ non tous nuls... est non. Donc les vecteurs sont linéairement indépendants, Donc S est une famille libre ou bien f, g et h sont linéairement indépendants comme vecteurs. Enfin, je ne passerai pas beaucoup de temps sur le dernier exemple, je voulais seulement le mentionner parce qu'ici je vous donne une famille de vecteurs qui est une famille infinie. Donc il y a une infinité de vecteurs là-dedans. Comment va-t-on s'y prendre ? On doit se demander s'il existe un nombre fini de vecteurs distincts dans S et des scalaires, le même nombre de scalaires non tous nuls tels que la combinaison linéaire de ces vecteurs-là soit égale à 0. Donc ici, je veux simplement dire brièvement comment cela se passe. Je me demande : existe-t-il... cette fois, je dois poser même les vecteurs, existe-i-il donc les vecteurs là-dedans, ça serait disons x^{m_1}, x^{m_2},... x^{m_r} dans S et des scalaires, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, dans R non tous nuls tels que $\lambda_1 x^{m_1} + \ldots + \lambda_r x^{m_r} = 0$?

Notes

Summary

21m 26s

Exemples.

(1) $V = \mathbb{R}^4$
$S = \{(1,1,1,2),(0,1,0,3),(-1,0,1,0),(1,3,3,7)\}$

(2) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$
$S = \{x^3 - 2x, x^2 + x + 1, x - 2\}$

(3) $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
$S = \{f, g, h\}$ où $f(x) = e^x$
$g(x) = \cos x$
$h(x) = x$

(5) $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$ Existe-t-il $x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_r} \in S$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q. $\lambda_1 x^{m_1} + \cdots + \lambda_r x^{m_r} = 0$. NON. $\Longrightarrow$ S est une famille libre.

(4) Existe-t-il $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls t.q.
$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. NON.

Une égalité de fonctions $\Longrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$
$$\alpha e^x + \beta \cos x + \gamma x = 0$$

Prenons : $x = 0$ $\quad \alpha + \beta = 0 \quad \beta = -\alpha$

$x = \pi/2 \quad \alpha e^{\pi/2} + \gamma \cdot \pi/2 = 0$

$x = -\pi/2 \quad \alpha e^{-\pi/2} + \gamma(-\pi/2) = 0$

$$\alpha(\underbrace{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}_{\neq 0}) = 0$$

$\Longrightarrow \alpha = 0, \ \beta = 0, \ \Longrightarrow \gamma = 0.$

S est une famille libre.
f, g, h sont linéairement indépendants.

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Et la réponse est non mais je vous laisse réfléchir là-dessus, ce n'est pas difficile, la réponse est non, donc ces vecteurs sont linéairement indépendants et S est une famille libre. Je voulais donner cet exemple parce que c'est une famille infinie mais on doit quand même parler d'un nombre fini de vecteurs quand on pose la question : est-ce qu'il y a une relation de dépendance ou pas.

Notes

Summary

23m 17s