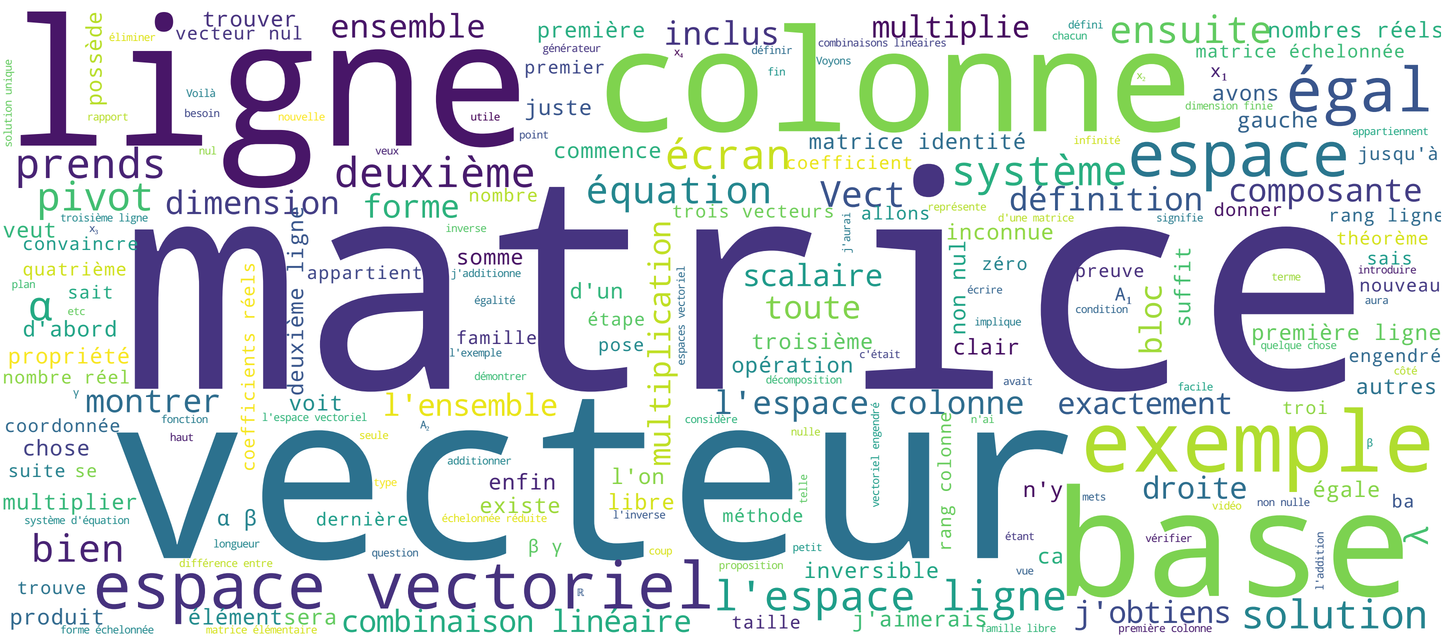
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

3.7 Espace ligne, espace colonne d'une matrice

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Nous arrivons à la fin du chapitre 3. J'aimerais encore introduire un sous-espace vectoriel de R^n ou R^m. Nous avons un peu laissé nos matrices de côté et maintenant nous allons les reprendre. Je vais associer à une matrice donnée deux sous-espaces vectoriels d'un R^n ou d'un R^m. Cela nous sera très utile par la suite. Ce n'est pas une notion difficile. Je vais vous en donner la définition.

Notes

Summary

0m 04s

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

On peut voir les lignes de A comme des vecteurs dans $\mathbb{R}^4$.

càd $(1, 2, 3, 4)$
$(0, \alpha, \beta, \gamma)$ $\in \mathbb{R}^4$.
$(0, 0, 5, 6)$

On se donne une matrice, voici un exemple, une matrice *3 x 4*. Nous voyons que les lignes de cette matrice, on peut les considérer comme étant des vecteurs dans R^4. Donc on peut voir les lignes de *A* comme des vecteurs dans R^4. Évidemment cela ne dépend pas de cet exemple-ci, c'est-à-dire ici que *(1, 2, 3, 4) (0, α, β, γ)* et *(0, 0, 5, 6)* sont tous des vecteurs dans R^4. Maintenant je généralise cela.

Notes

Summary

0m 33s

Définition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. On appelle l'espace ligne de A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A. i.e. si $L_1, L_2, \ldots, L_m$ sont les lignes de A, vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors l'espace ligne de A est $\text{Vect}\{L_1, \ldots, L_m\}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'espace ligne de A est le sous-espace vectoriel $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Par définition,

l'espace ligne de A est

$\text{Vect}\{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1)\}$

$= \{a(1,1,1,1) + b(0,1,1,1) + c(0,0,1,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

Je donne la définition. Je me donne une matrice *m x n* donc il y a *m* lignes et *n* colonnes. On appelle l'espace ligne de *A* le sous-espace vectoriel de R^n, parce qu'il y a *n* colonnes engendrées par les lignes de *A*. Précisément, si je prends les lignes L_1 jusqu'à L_m et que je les considère comme dans l'exemple que je vous ai montré comme étant des vecteurs dans R^n, alors l'espace ligne de *A* est le sous-espace $Vect\{L_1,\ldots,L_m\}$ Voyons un exemple. Je prends cette matrice-là et j'aimerais vous montrer que dans ce cas-ci, l'espace ligne de cette matrice est exactement le sous-espace des vecteurs de la forme $(\alpha, \beta, \gamma, \gamma)$ dans R^4. Je vais illustrer l'exercice. Par définition, l'espace ligne de *A* est le sous-espace vectoriel engendré par les lignes de *A*. Les lignes de *A* sont *(1, 1, 1, 1)*, etc. Cela signifie que c'est l'ensemble de tous les vecteurs de la forme *a (1, 1, 1, 1) + b(0, 1, 1, 1) + c (0, 0, 1, 1)* où *a*, *b* et *c* sont des nombres réels quelconques. Ce sont toutes les combinaisons linéaires comme ceci.

Notes

Summary

1m 20s

Définition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. On appelle l'espace ligne de A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A. i.e. si $L_1, L_2, \ldots, L_m$ sont les lignes de A, vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors l'espace ligne de A est $\mathrm{Vect}\{L_1, \ldots, L_m\}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'espace ligne de A est le sous-espace vectoriel $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$. $\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,1)$.

Par définition,

l'espace ligne de A est

$\mathrm{Vect}\{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1)\}$

$= \{a(1,1,1,1) + b(0,1,1,1) + c(0,0,1,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

$= \{(a, a+b, \underline{a+b+c}, \underline{a+b+c}) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \subset U$.

Il faut montrer que $U \subset$ l'espace ligne de A.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je mets tout cela ensemble et j'ai un vecteur de la forme: la première coordonnée c'est *a*, la deuxième c'est *a* + *b*, la troisième coordonnée c'est *a* + *b* + *c* et la quatrième aussi où *a*, *b* et *c* sont des nombres réels. Maintenant je regarde le sous-espace vectoriel *U* et je vois qu'il est défini par la propriété qui dit que les deux dernières coordonnées sont égales. Ici j'ai exactement *a* + *b* + *c* et *a* + *b* + *c* donc il est clair que ce sous-espace est inclus dans *U*. Pour terminer ma preuve, je dois vous convaincre que le *U* est inclus là-dedans. Donc il faut montrer que *U* est inclus dans l'espace ligne de *A*. Pour faire cela, je vais observer *U*. Je veux souligner quelque chose. Un vecteur dans *U* a la forme *α(1, 0, 0, 0) + β(0, 1, 0, 0) + γ(0, 0, 1, 1)*. Un vecteur général dans *U* a cette forme-là. Pour vous convaincre que *U* est inclus dans l'espace ligne, il suffit de voir que chacun de ces trois vecteurs est inclus dans l'espace ligne de *A* comme il s'agit d'un sous-espace.

Notes

Summary

2m 51s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Donc il suffit de voir que les vecteurs *(1, 0, 0, 0)*, *(0, 1, 0, 0)* et *(0, 0, 1, 1)* appartiennent à l'espace lignes. Il y a un vecteur où c'est clair car ce vecteur est carrément une ligne de *A* : *(0, 0, 1, 1)* c'est la troisième ligne de *A*. Ce vecteur-ci est la différence entre la deuxième ligne et la troisième donc c'est dans l'espace ligne. Et enfin, ce vecteur-ci est la différence entre la première ligne et la deuxième, qui est aussi dans l'espace ligne. Enfin, on voit que l'espace ligne de *A* est exactement le sous-espace *U* que j'ai décrit ici.

Notes

Summary

4m 25s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de A peut être vues comme des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.
$(1,0,0)$, $(2,\alpha,0)$, $(3,\beta,5)$, $(4,\gamma,6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Il n'y a rien de spécial avec la notion "ligne", on peut faire la même chose avec les colonnes de *A*. Donc les colonnes de cette matrice peuvent être vues comme des vecteurs, cette fois, dans R^3. C'est-à-dire que si je regarde *(1, 0, 0)*, *(2, α, 0)* *(3, β, 5)* et *(4, γ, 6)*, je peux imaginer que ce sont des vecteurs dans R^3.

Notes

Summary

5m 25s

Définition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. L'espace colonne de A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A. i.e. si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A, vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^m$, alors l'espace colonne de A est $\mathrm{Vect}\{C_1, \ldots, C_n\}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'espace colonne de A est égal à $\mathbb{R}^3$.

Par définition, l'espace colonne de A est

Vect $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,1)\}$

$= \mathrm{Vect}\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

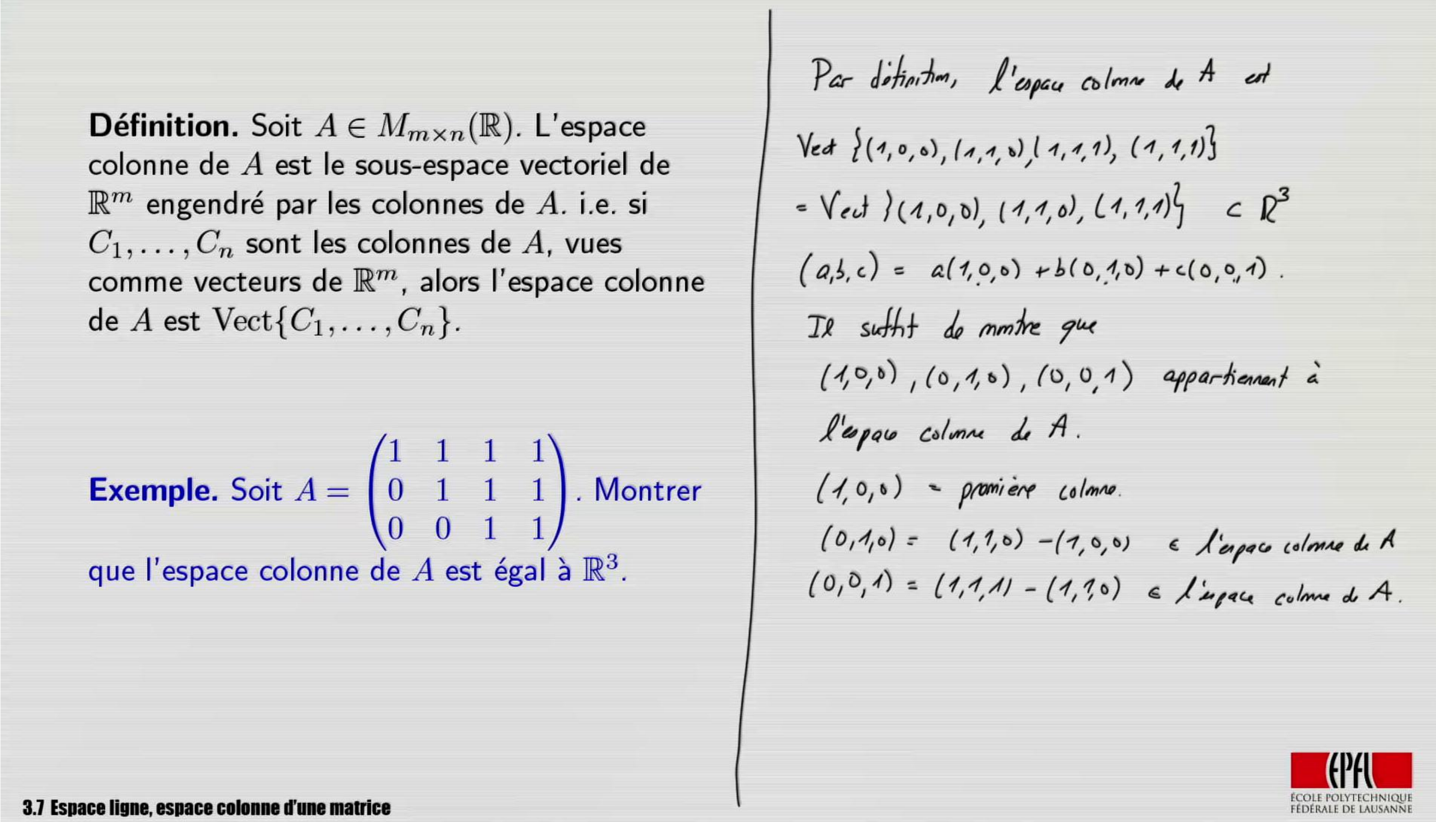
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je donne la définition formelle. Donc je prends une matrice *m x n*. L'espace colonne de cette matrice est le sous-espace vectoriel de R^m (parce que les colonnes ont une longueur *m*), engendré par les colonnes de *A*, c'est-à-dire qu'on considère ces colonnes comme des vecteurs dans R^m et on prend le sous-espace vectoriel engendré. Un autre exemple. Je prends la même matrice que nous avions avant. Cette fois, j'aimerais montrer que l'espace colonnes de cette matrice est égal à tout l'espace entier R^3. Je développe. Par définition, l'espace colonne de *A* est le *Vect* des colonnes de *A* vues comme vecteurs dans R^3 donc c'est *Vect{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 1)}*. La première chose que l'on constate c'est qu'il n'y a aucune raison de répéter le dernier vecteur parce que c'est le même que l'avant-dernier. Donc on l'enlève de la liste. Donc l'espace colonne de *A* est le sous-espace vectoriel deR^3 engendré par ces trois vecteurs.

Notes

Summary

5m 58s



Je dois montrer que R^3 est égal à ce sous-espace, et pour cela, je vais souligner qu'un vecteur *(a,b,c)* dans R^3 s'écrit comme la combinaison linéaire suivante [voir écran] et donc, pour vous montrer queR^3 est inclus là-dedans, il suffit de voir que chacun de ces trois vecteurs est inclus. Donc il suffit, pour faire l'exemple ici, de montrer que *(1, 0, 0)*, *(0, 1, 0)* et *(0, 0, 1)* appartiennent à l'espace colonne de *A*. Comme la dernière fois, l'un est évident parce que *(1, 0, 0)* c'est carrément la première colonne. Puis *(0, 1, 0)* est égal à *(1, 1, 0) - (1, 0, 0)* donc c'est la différence entre la deuxième et la première colonne. Donc cela appartient à l'espace colonne. Et enfin, le troisième vecteur que j'aimerais trouver, ce vecteur-là, est égal à la troisième colonne moins la deuxième colonne, qui est aussi pour cette raison, inclus dans l'espace colonne de *A*. Nous avons réussi à voir que l'espace colonne de cette matrice est égal à l'espace vectoriel R^3. Nous allons utiliser ces espaces colonne et espaces ligne des matrices comme des exemples assez importants dans la suite du cours.

Notes

Summary

7m 26s