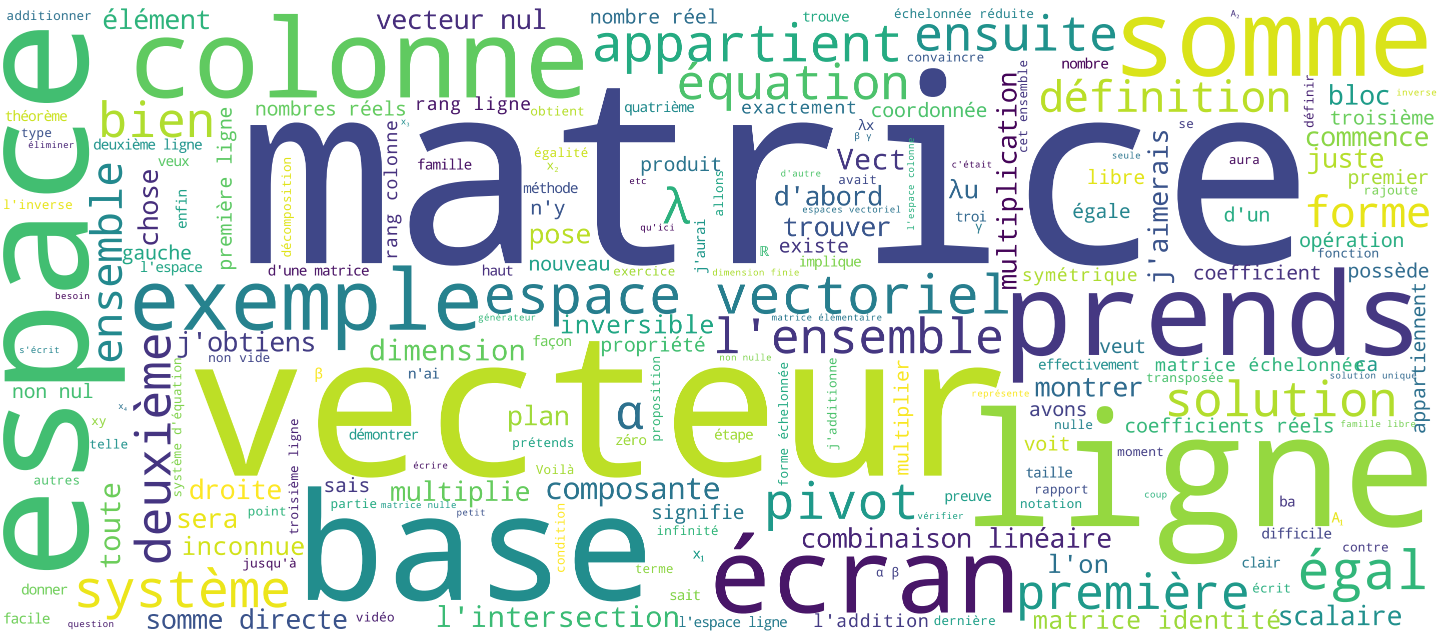
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

3.6 La somme de sous-espaces

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

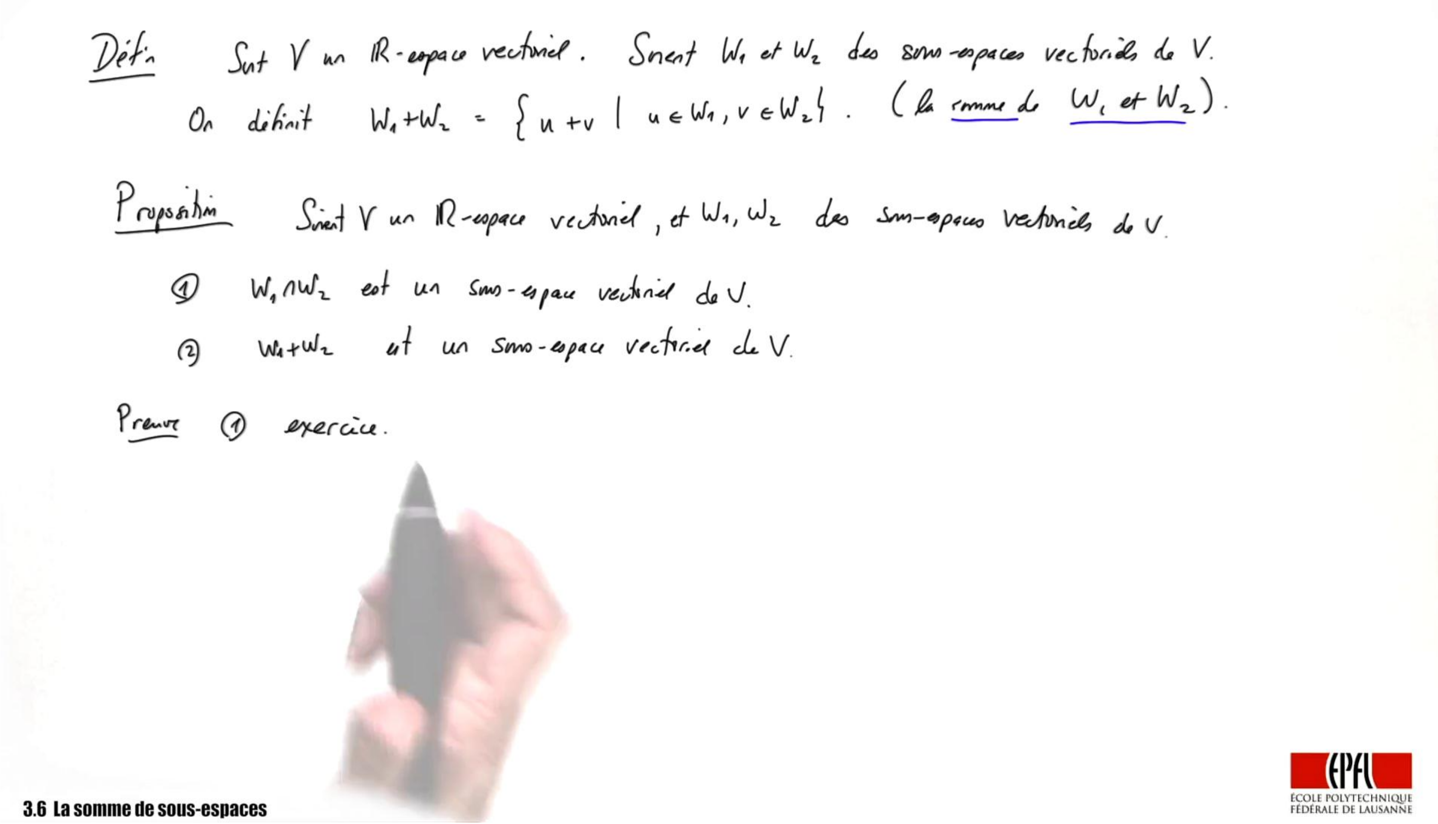
3.6 La somme de sous-espaces

Nous venons de voir que l'on peut, dans un *R*-espace vectoriel, fabriquer des sous-espaces en prenant un ensemble de vecteurs et créer le sous-espace engendré par cet ensemble. Ici, je vais vous donner une autre façon de fabriquer des sous-espaces à partir de sous-espaces déjà donnés.

Notes

Summary

0m 04s



Je commence par la définition. Soit V un R espace vectoriel et soit W_1 et W_2, des sous-espaces vectoriels de V. On définit la somme que je note ainsi, $W_1 + W_2$, d'être l'ensemble des vecteurs $u + v$ où u appartient à W_1 et v appartient à W_2. Donc c'est la somme de W_1 et W_2. On montre une première proposition. Soit V un R-espace vectoriel et W_1, W_2 des sous-espaces. La première chose, c'est que si je prends l'intersection de W_1 et W_2 qui est, comme l'intersection de deux ensembles, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à W_1 et W_2. Ceci est un sous-espace vectoriel de V. Deuxièmement, la somme, telle que définie ici, est un sous-espace. Alors je vais démontrer la deuxième proposition. Je vais laisser la première comme exercice parce que ce n'est pas difficile et c'est un bon exercice. Maintenant je démontre la deuxième.

Notes

Summary

0m 24s

Défin Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient W_1 et W_2 des sous-espaces vectoriels de V.

On définit $W_1+W_2 = \{u+v \mid u \in W_1, v \in W_2\}$. (la somme de W_1 et W_2).

Proposition Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V.

① $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

② W_1+W_2 est un sous-espace vectoriel de V.

Preuve ① exercice.

② $0 \in W_1+W_2$ car $0 \in W_1$, $0 \in W_2$, $0+0=0 \in W_1+W_2$.

$W_1+W_2 \neq \emptyset$.

Soient $x, y \in W_1+W_2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $x = u_1+u_2$, $y = v_1+v_2$, où $u_i, v_i \in W_i$. $i=1,2$.

3.6 La somme de sous-espaces

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

D'abord je dois montrer que $W_1 + W_2$ est non-vide et je sais que 0 appartient à $W_1 + W_2$ car 0 appartient à W_1 parce que c'est un sous-espace, de la même manière, 0 appartient à W_2 *et donc* $0 + 0 = 0$, *appartient à la somme. Donc,* $W_1 + W_2$ *n'est pas vide. Maintenant je prends deux vecteurs qui sont dans la somme. Soit* x *et* y*, des vecteurs qui appartiennent à la somme,* $W_1 + W_2$*, et soit* λ*, un nombre réel. Maintenant je dois montrer que* $\lambda x + y$ *appartient aussi à la somme. Mais avant de faire cela, je vais d'abord dire ce que signifie "*x *et* y *appartiennent à la somme* $W_1 + W_2$*". Cela signifie que* $x = u_1 + u_2$ *et* $y = v_1 + v_2$ *où les* u_i *et* v_i *appartiennent à* W_i*, avec* $i = 1,2$*. C'est la définition :* x *s'écrit comme un* $u_1 + u_2$*, avec* u_1 *étant dans* W_1 *et* u_2 *dans* W_2 *et la même chose pour le* y*.*

Notes

Summary

2m 08s

Défn Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient W_1 et W_2 des sous-espaces vectoriels de V.
On définit $W_1 + W_2 = \{u+v \mid u \in W_1, v \in W_2\}$. (la somme de W_1 et W_2).

Proposition Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V.

① $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

② $W_1 + W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

Preuve ① exercice.

② $0 \in W_1 + W_2$ car $0 \in W_1$, $0 \in W_2$, $0 + 0 = 0 \in W_1 + W_2$.
$W_1 + W_2 \neq \emptyset$.

Soient $x, y \in W_1 + W_2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $x = u_1 + u_2$, $y = v_1 + v_2$, où $u_i, v_i \in W_i$, $i = 1, 2$.

$\lambda x + y = \lambda(u_1+u_2) + (v_1+v_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 + v_1 + v_2 = \lambda u_1 + v_1 + \lambda u_2 + v_2$.

$\lambda u_1 + v_1 \in W_1$ car $u_1, v_1 \in W_1$ et W_1 est un sous-espace vectoriel de V.

De même. $\lambda u_2 + v_2 \in W_2$. Donc $\lambda x + y = (\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2) \in W_1 + W_2$. $\Rightarrow$ $W_1 + W_2$ est un sous-espace vectoriel de V. ∎

3.6 La somme de sous-espaces

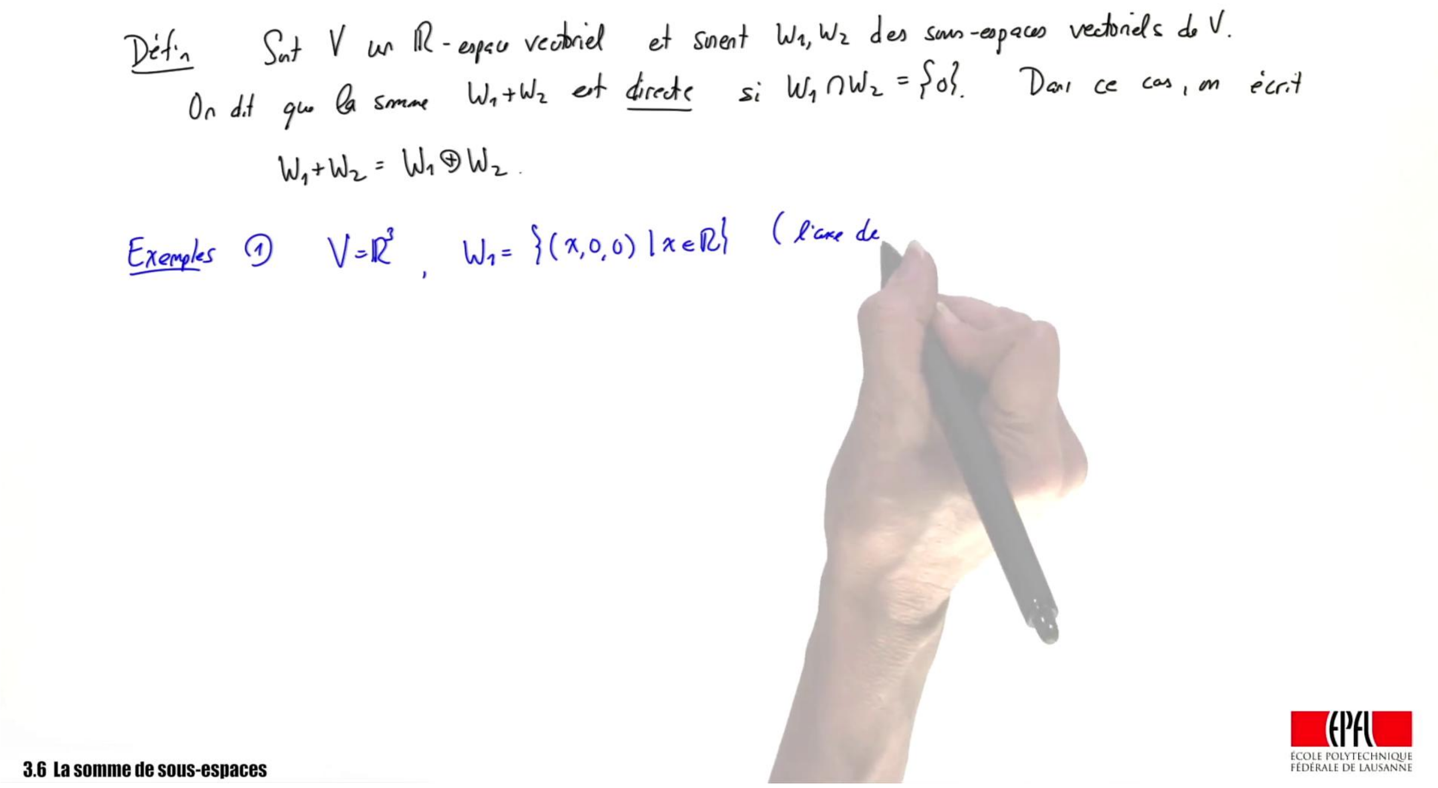
EPFL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant je regarde $\lambda x + y$, donc ceci est égal à $\lambda(u_1 + u_2) + v_1 + v_2$. Donc par distributivité : c'est égal à $\lambda u_1 + \lambda u_2 + v_1 + v_2$. L'addition est commutative, donc j'ai $\lambda u_1 + v_1 + u_2 + v_2$. L'élément $\lambda u_1 + v_1$ appartient à W_1 car u_1 et v_1 sont dans W_1 et W_1 est un sous-espace. Par le même raisonnement, $\lambda u_2 + v_2$ appartient à W_2. Donc le vecteur $\lambda x + y$, s'écrit maintenant comme un vecteur qui appartient à W_1 plus un vecteur qui appartient à W_2 donc $\lambda x + y$ appartient à $W_1 + W_2$. On a vu que $W_1 + W_2$ est non-vide et qu'à chaque fois qu'on prend deux vecteurs là-dedans et un scalaire, la combinaison linéaire associée appartient aussi et cela implique que $W_1 + W_2$ est un sous-espace de V. C'est la preuve de la proposition.

Notes

Summary

3m 38s



Il y a des sommes qui sont meilleures que d'autres et il serait bien de les étudier. C'est une façon de couper un espace en deux. Donc je prends V un R-espace vectoriel et deux sous-espaces de V. On dit que la somme $W_1 + W_2$ est directe, si $W_1 \bigcap W_1$ est seulement le vecteur nul. Il est clair que l'intersection a le vecteur nul dedans parce que ce sont deux sous-espaces mais ce n'est que ça. À ce moment-là, on dit que la somme est directe. Dans ce cas, on écrit que [voir écran]. C'est une notation qui indique une somme directe, cela signifie que ceci est la somme et que l'intersection est 0. Maintenant, des exemples. Si je prends $V = R^3$ et je prends W_1, l'ensemble des vecteurs de la forme (x, 0, 0), avec x dans R. C'est en fait l'axe des x. Et je prends W_2, l'esemble des vecteurs (0, y, 0), avec y dans R et ceci est l'axe des y.

Notes

Summary

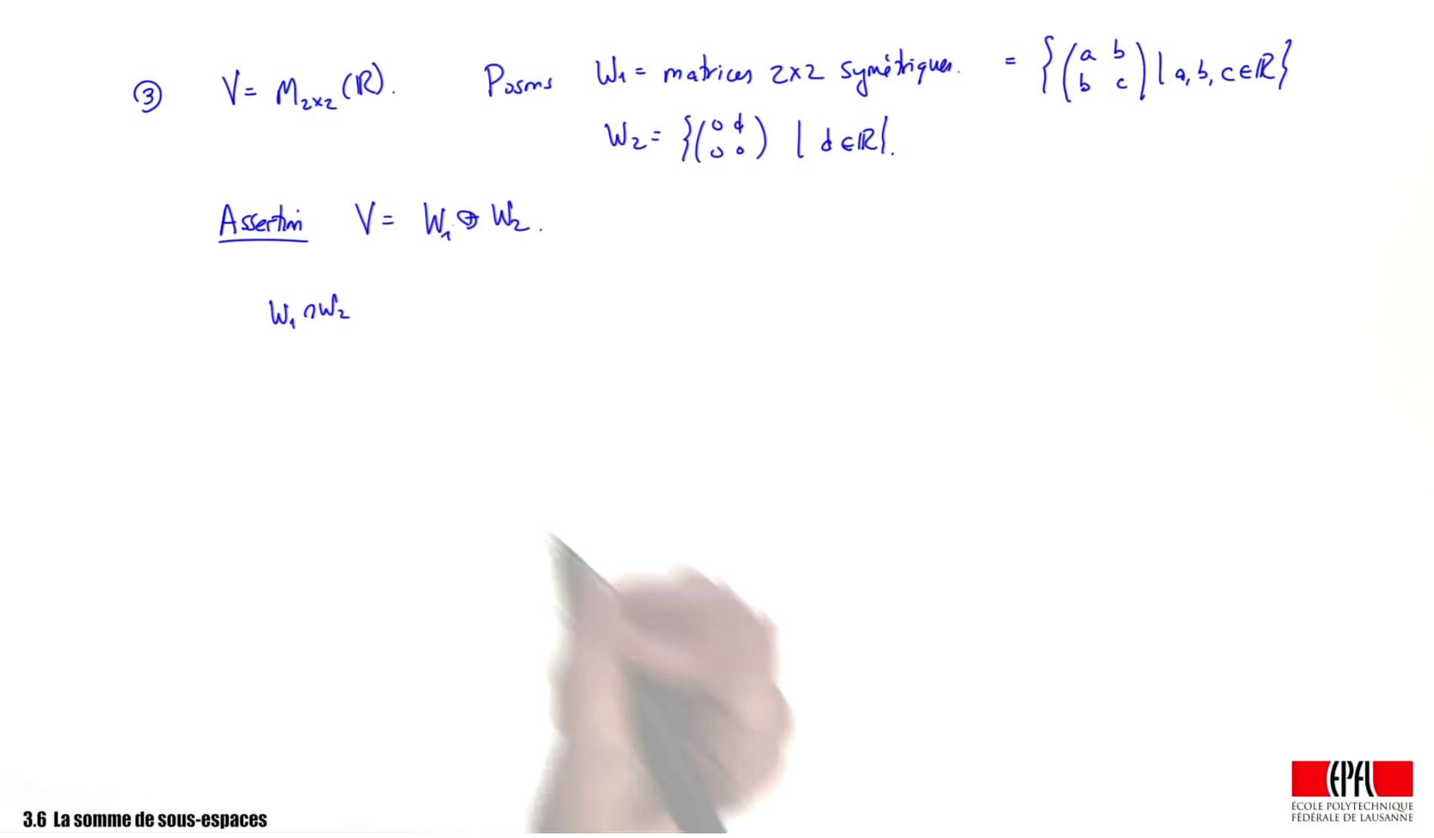
5m 26s

Si je regarde $W_1 + W_2$, ce que je vais obtenir, c'est l'ensemble de tous les vecteurs de la forme (x, y, 0), avec x et y dans des nombres réels et ceci, c'est le plan xy et il est clair géométriquement que si je fais l'intersection de W_1 et W_2, je ne trouverai que l'origine. Il en va de même algébriquement, $W_1 \bigcap W_2$, il n'y a que le vecteur nul, donc $W_1 + W_2$ est égal à la somme directe des deux. Encore un exemple. Je prends de nouveau $V = R_3$ et puis je prends pour W_1 cette fois le plan xy et W_2, le plan yz. Il n'est pas difficile de se convaincre que si on fait la somme de W_1 et W_2, on obtient tout V parce qu'ici on a tout le plan xy, là on rajoute encore un plan mais en particulier l'axe z donc on obtient tous les vecteurs comme une somme de des dex sous-espaces. Par contre, si je regarde $W_1 \bigcap W_2$ j'aurai tous les vecteurs de la forme (0, y, 0). Donc cette intersection n'est pas 0 donc $W_1 + W_2$ n'est pas une somme directe.

Notes

Summary

7m 02s

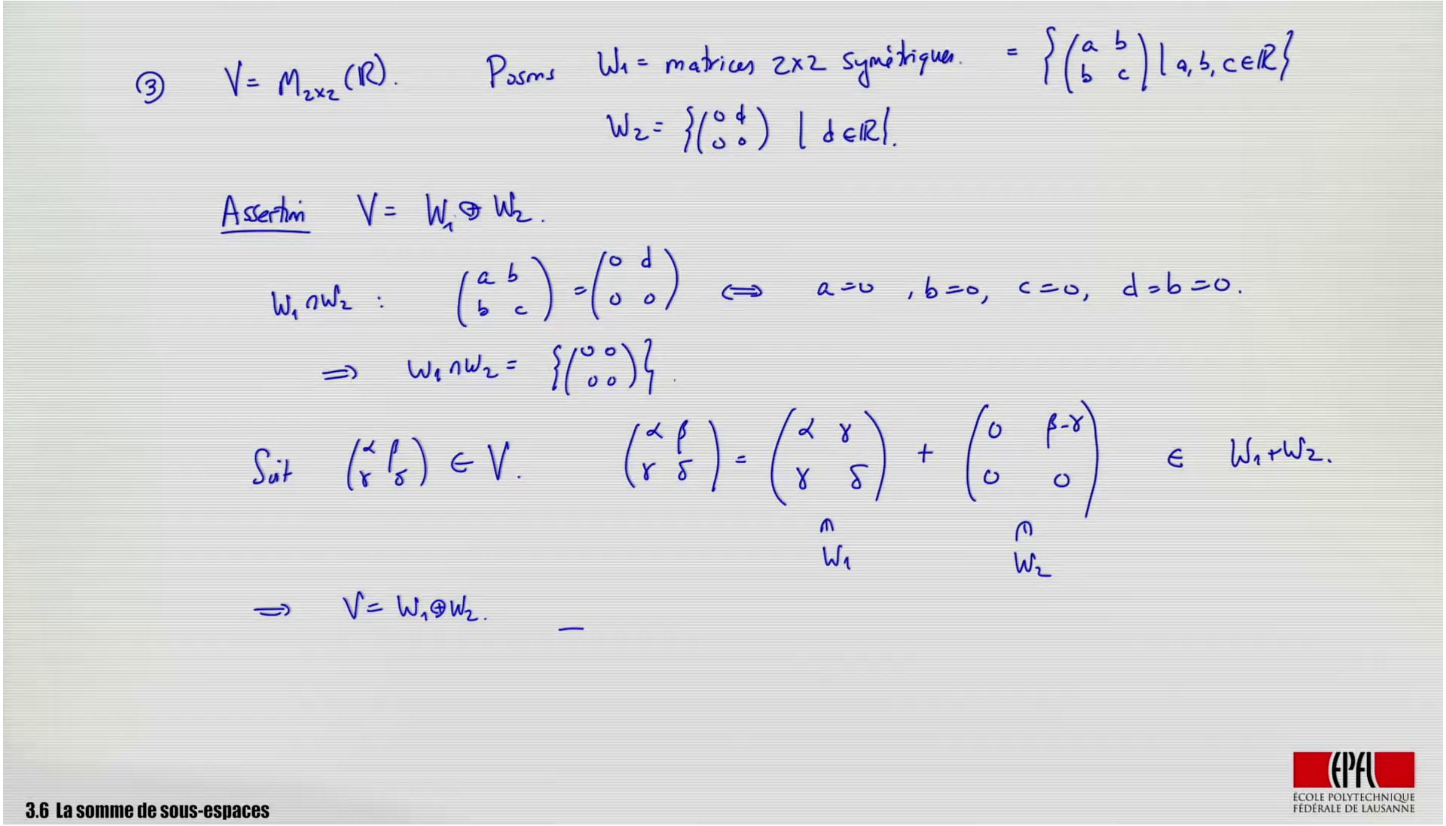


Je voudrais terminer avec un troisième exemple qui est assez intéressant. Ici je prends pour V l'espace des matrices 2 x 2 à coefficients réels. Je pose W_1, l'ensemble des matrices symétriques 2 x 2 à coefficients réels. Puis, je pose W_2 l'ensemble de toutes les matrices de la forme [voir écran], ce sont en particuliers des matrices triangulaires supérieur. D'abord je prétends que V = la somme directe de ces deux sous-espaces. Il y a une chose qui est facile à voir c'est que l'intersection est nulle mais d'abord je vais préciser, je vous rappelle ce qu'est une matrice symétrique. Donc une matrice est symétrique si elle est égale à sa transposée. Ici j'ai [voir écran] avec a,b,c, des nombres réels donc ceci est l'ensemble des matrices symétriques. C'est un sous-espace, vous pouvez vérifier, et W_2 aussi est un sous-espace. Je ne vérifie pas. Je prétends que le V est égal à la somme directe de ces deux sous-espaces. Donc en premier je vais regarder l'intersection. Ici, si j'ai une matrice qui est dans l'intersection, elle sera à la fois de cette forme et aussi de cette forme-là.

Notes

Summary

8m 49s



Mais cela ne peut y arriver que si a = 0, b = 0, c = 0, et d = b = 0. Donc l'intersection n'est effectivement que la matrice nulle. Donc nous sommes sur la bonne voie. Maintenant, j'aimerais vous convaincre que si je prends une matrice quelconque, je peux l'écrire comme une somme d'une matrice de chacun des sous-espaces. Donc je prends une matrice 2 x 2 quelconque [voir écran] et d'abord je prends une partie donc j'ai les coefficients α, δ, γ et après comme elle doit être symétrique, je dois remettre γ en (1,2). J'ai cette première matrice et je vois que je n'ai pas encore le β, donc les trois autres places sont justes. Je vais corriger là-haut donc j'ajoute la matrice [voir écran] De plus, la première matrice est dans W_1, i.e. elle est symétrique, et la seconde, elle est dans W_2. Donc leur somme est dans $W_1 + W_2$ donc effectivement, V est la somme directe de ces deux sous-espaces.

Notes

Summary

10m 13s