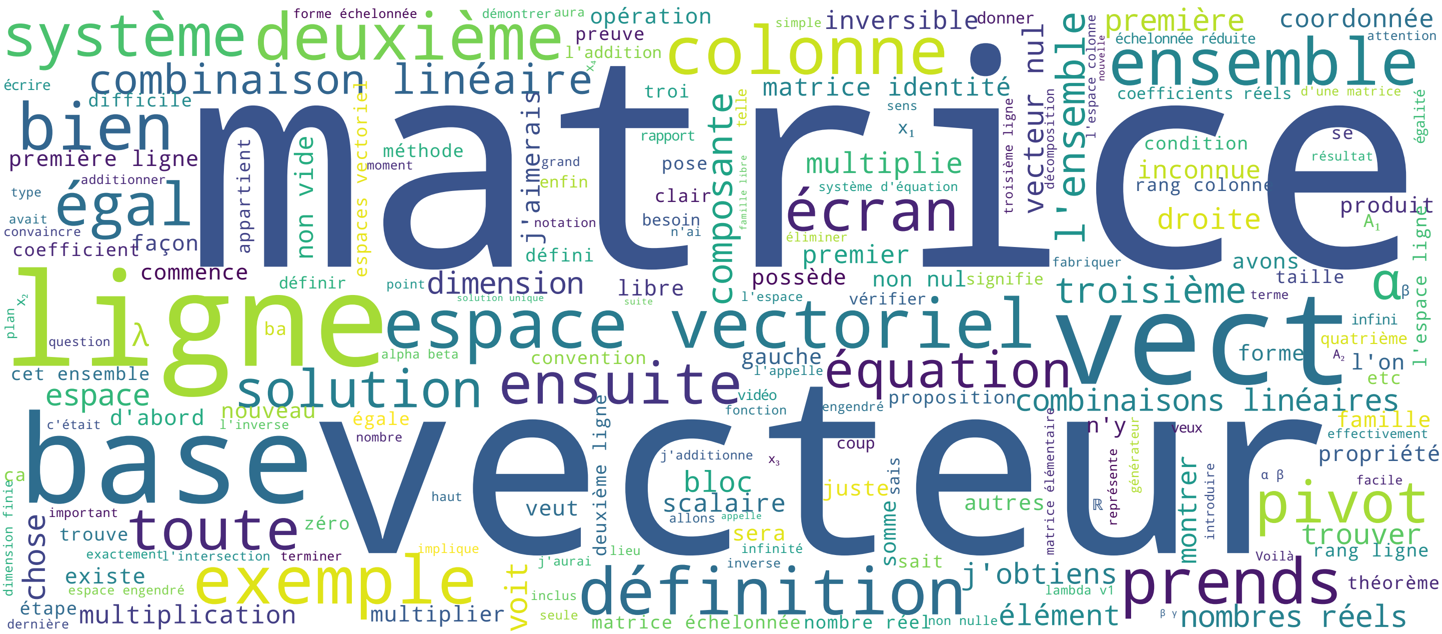
Chapitre 3 : Espaces vectoriels

3.5 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

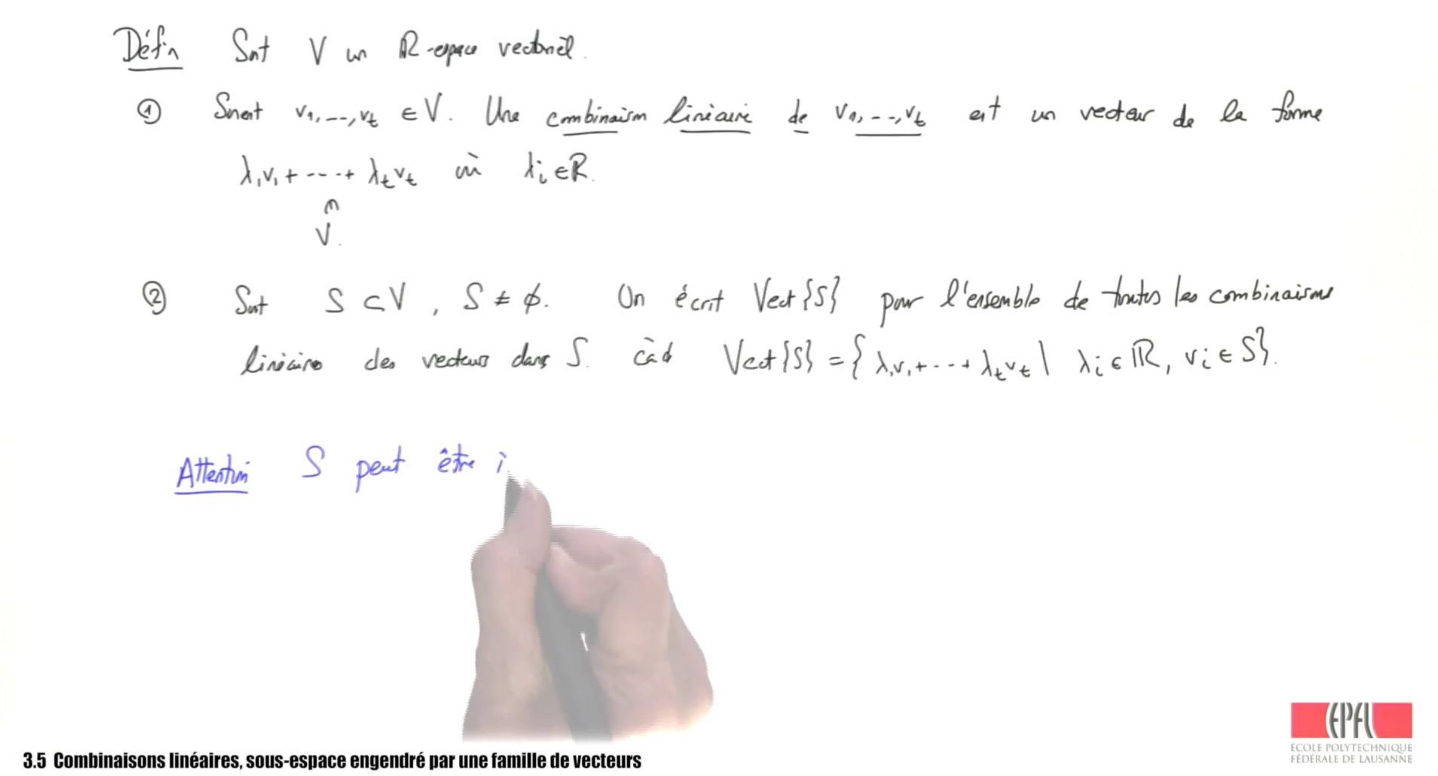
Video

Nous continuons avec nos exemples de sous-espaces vectoriels et maintenant on arrive à une exemple très important, c'est une façon de fabriquer des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel quelconque.

Notes

Summary

0m 03s



Je donne la définition. Soit V un R espace vectoriel. 1ère partie de la définition. Soit v1 jusqu'à vt, des éléments de V. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur de la forme lambda 1 v1 + jusqu'à lamba t vt où les lambda i sont des nombres réels. Maintenant, il faut noter et ceci a un sens, parce qu'on sait multiplier vi par lambda i, ensuite on sait additionner les résultats, parce que cela se passe dans un espace vectoriel, donc du coup ce vecteur-là appartient à V. On l'appelle une combinaison linéaire de ces vecteurs. 2ème partie de la définition. Soit S, un ensemble de V, pas un sous-espace, juste un ensemble non-vide. On écrit vect de S pour l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs dans S, c'est-à-dire le vect de S est l'ensemble, et j'ai toutes les possibilités ici, je prends toutes les combinaisons linéaires, les lambda i doivent être des nombres réels et les vi doivent être dans S. J'aimerais faire une remarque importante. Je ne dis pas du tout que le S ici doit être fini donc attention : S peut être infini. Les combinaisons linéaires, elles, sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.

Notes

Summary

0m 17s

Déf^n Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

① Soient $v_1, \dots, v_t \in V$. Une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_t$ est un vecteur de la forme

$\underset{\underset{V.}{\cap}}{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t}$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

② Soit $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. On écrit $\mathrm{Vect}\{S\}$ pour l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs dans S. càd $\mathrm{Vect}\{S\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S\}$.

Attention S peut être infini.

p. ex. $S = \{f \in P(\mathbb{R}) \mid f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 0\} = \{1, x^2, x^4, \dots\}$

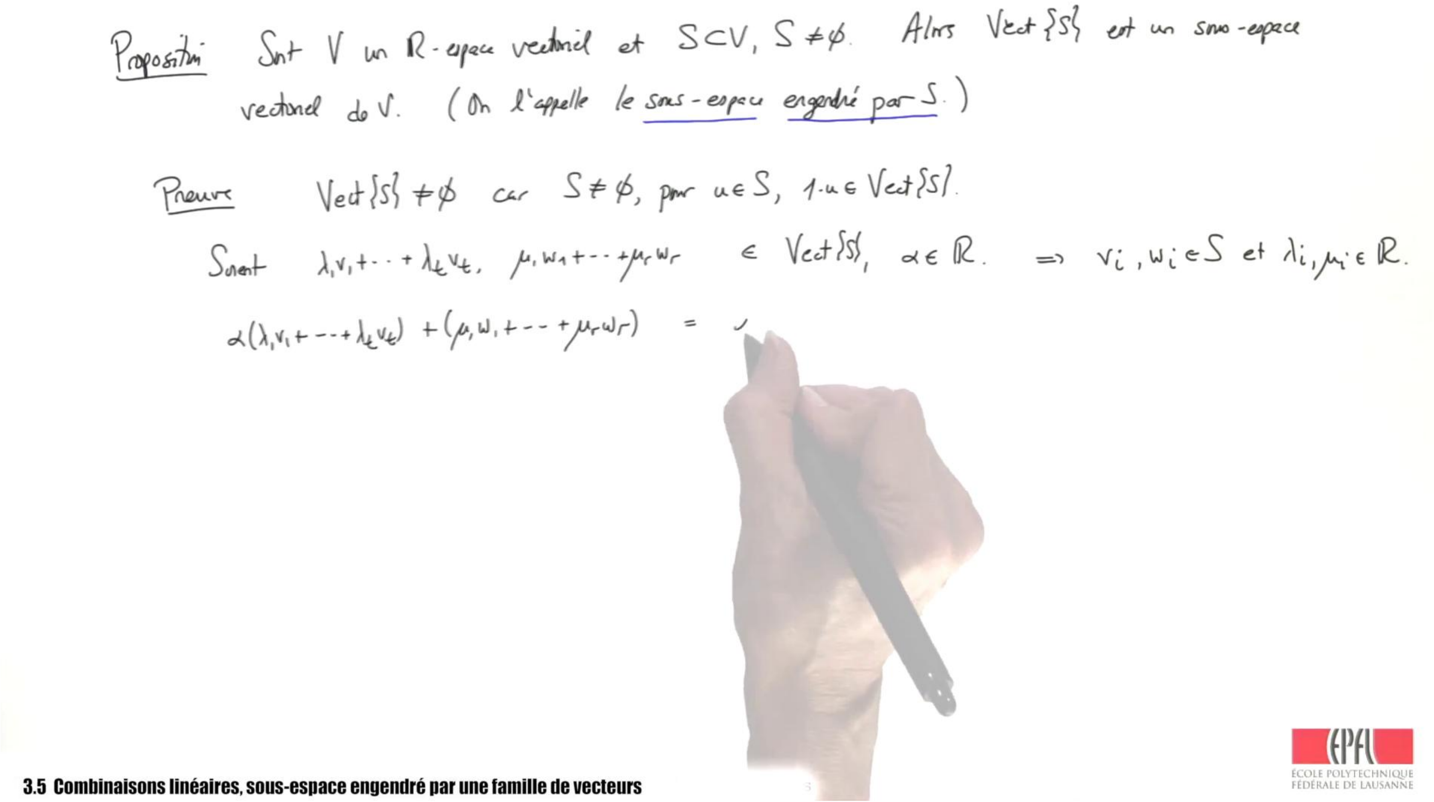
$\mathrm{Vect}\{S\} = \{f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.

Mais le S peut être infini, par exemple, si je prends S, l'ensemble de toutes les fonctions polynoméales de la forme *x* puissance 2n où n est un nombre naturel plus grand ou égal à 0, c'est l'ensemble de 1, *x* au carré, *x* 4, etc. donc c'est un ensemble avec un nombre infini de vecteurs. Alors ici le vect de S est encore défini, c'est qu'on va faire les combinaisons linéaires de ces monomes de degré pair. Donc je n'aurai que des fonctions ploynoméales de la forme a 0 + a 2 *x* au carré + a 4 *x* 4, etc. à 2n *x* puissance 2n où les ai sont des nombres réels. Donc le S peut quand même être infini et ce vect de S être encore défini. Voilà une définition.

Notes

Summary

2m 21s



J'aimerais montrer que ceci est bien un sous-espace vectoriel, donc on peut en fabriquer une quantité de sous-espaces. Proposition. Soit V un R espace vectoriel et S un ensemble de V non-vide. Alors le vect de S est un sous-espace vectoriel de V. Je donne en même temps une définition. On l'appelle le sous-espace engendré par S. Comme c'est une définition, je souligne. La preuve n'est pas difficile. Je rappelle ce qu'il faut montrer. Il faut voir que le vect de S est non-vide, mais ça, ça va car S est non-vide et pour un vecteur u dans S, 1 x u est dans le vect de S, donc ça va pour ça. Maintenant si je prends 2 vecteurs qui sont là-dedans, donc je prends lambda 1 v1... lambda t vt, et puis ensuite mu 1 w1, mu r wr, 2 vecteurs dans le vect de S. Je prends aussi un alpha dans R. Le fait que ces deux vecteurs sont dans le vect de S signifie que les vi et les wi sont dans S et les lambda i et les mu i sont dans R. Je dois faire alpha x le premier + le deuxième et j'aimerais voir que ceci est de nouveau une combinaison linéaire des éléments de S mais ceci est clair, j'enlève les parenthèses, comme j'ai le droit de le faire dans un espace vectoriel. Ici j'ai alpha lambda 1 v1...

Notes

Summary

3m 33s

Proposition Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Alors $\text{Vect}\{S\}$ est un sous-espace vectoriel de V. (On l'appelle le sous-espace engendré par S.)

Preuve $\text{Vect}\{S\} \neq \emptyset$ car $S \neq \emptyset$, pour $u \in S$, $1 \cdot u \in \text{Vect}\{S\}$.

Soient $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_t v_t$, $\mu_1 w_1 + \cdots + \mu_r w_r \in \text{Vect}\{S\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow v_i, w_i \in S$ et $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_t v_t) + (\mu_1 w_1 + \cdots + \mu_r w_r) = \alpha\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha\lambda_t v_t + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_r w_r \in \text{Vect}\{S\}.$$

☒.

Par convention, $\text{Vect}\{\emptyset\} = \{0\}$ (l'espace nul).

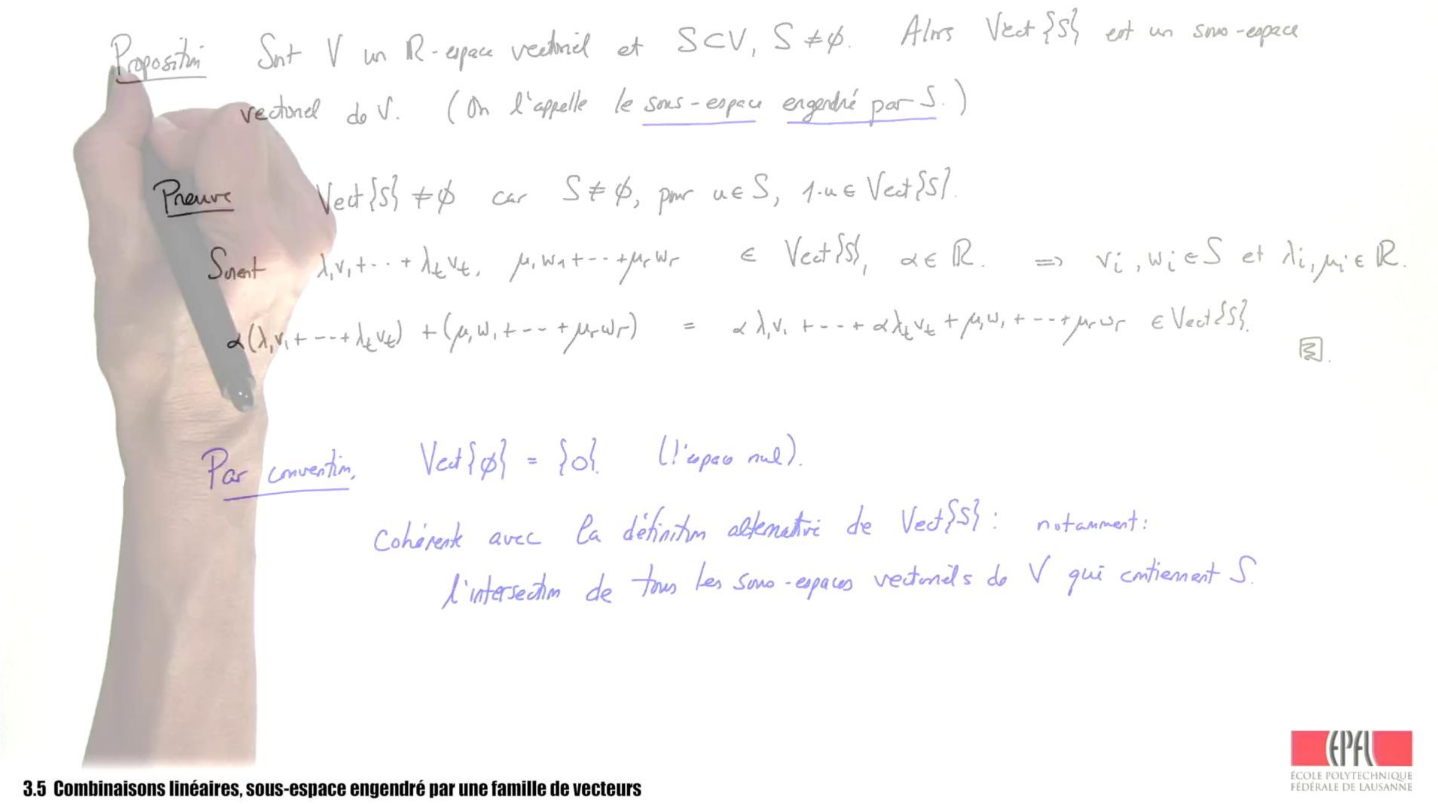
Cohérent avec la définition alternative de $\text{Vect}\{S\}$: notamment : l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de V qui contiennent S.

alpha lamba t vt, mu 1 w1, mu r wr, donc ça c'est une énorme combinaison linéaire de vecteurs qui appartiennent tous à S donc ça c'est bien dans le vect de S. On a vérifié les deux conditions qu'il faut vérifier. Maintenant, j'aimerais combler un vide. J'ai dit dans la définition et dans cette proposition que j'ai un ensemble qui est non-vide. Mais en fait, par convention, on se permet quand même de parler du vect de l'ensemble vide, et cela on va dire que c'est seulement le vecteur nul, ou l'espace nul. Cette convention est bien parce que cette convention est cohérente avec une définition alternative du sous-espace engendré par un ensemble S, notamment... bon moi j'ai défini cela comme étant l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires. On pourrait aussi le définir comme ceci : on se donne un ensemble S et on dit que le vect de S est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de V qui contiennent S. À ce moment-là, si on fait une intersection de tous les sous-espaces qui contiennent un ensemble fixe, il est clair que le vecteur nul est dans tous ces espaces, donc ensuite le vect dans cette intersection j'aurai quand même le vecteur nul.

Notes

Summary

5m 41s

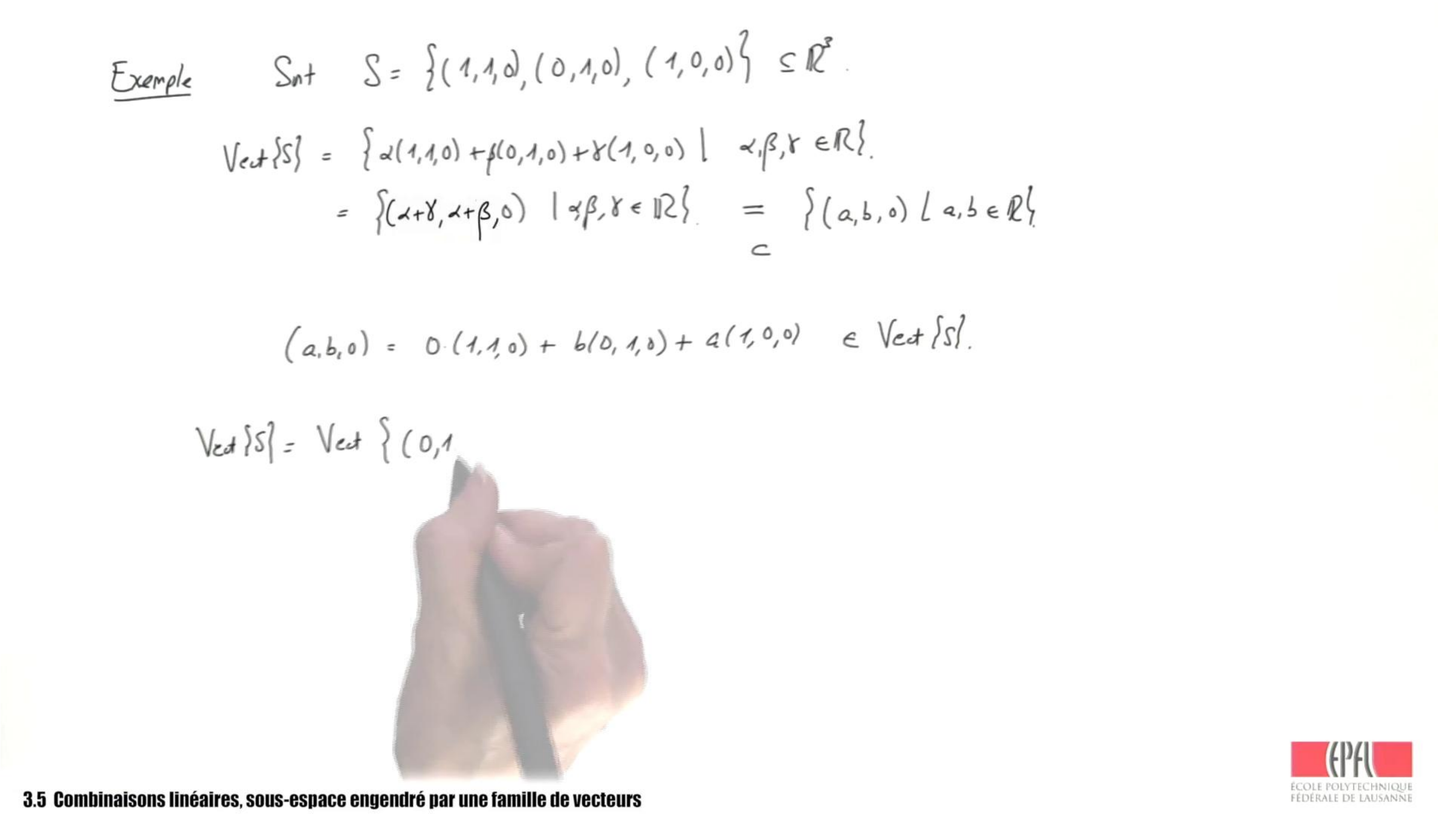


On peut dire que c'est par convention mais c'est cohérent avec cette autre définition. Cette définition-là n'est pas une définition constructive, cela ne nous donnerait pas une façon de construire le vect de S, mais on peut montrer que c'est la même chose. Je vais terminer avec un exemple.

Notes

Summary

7m 24s

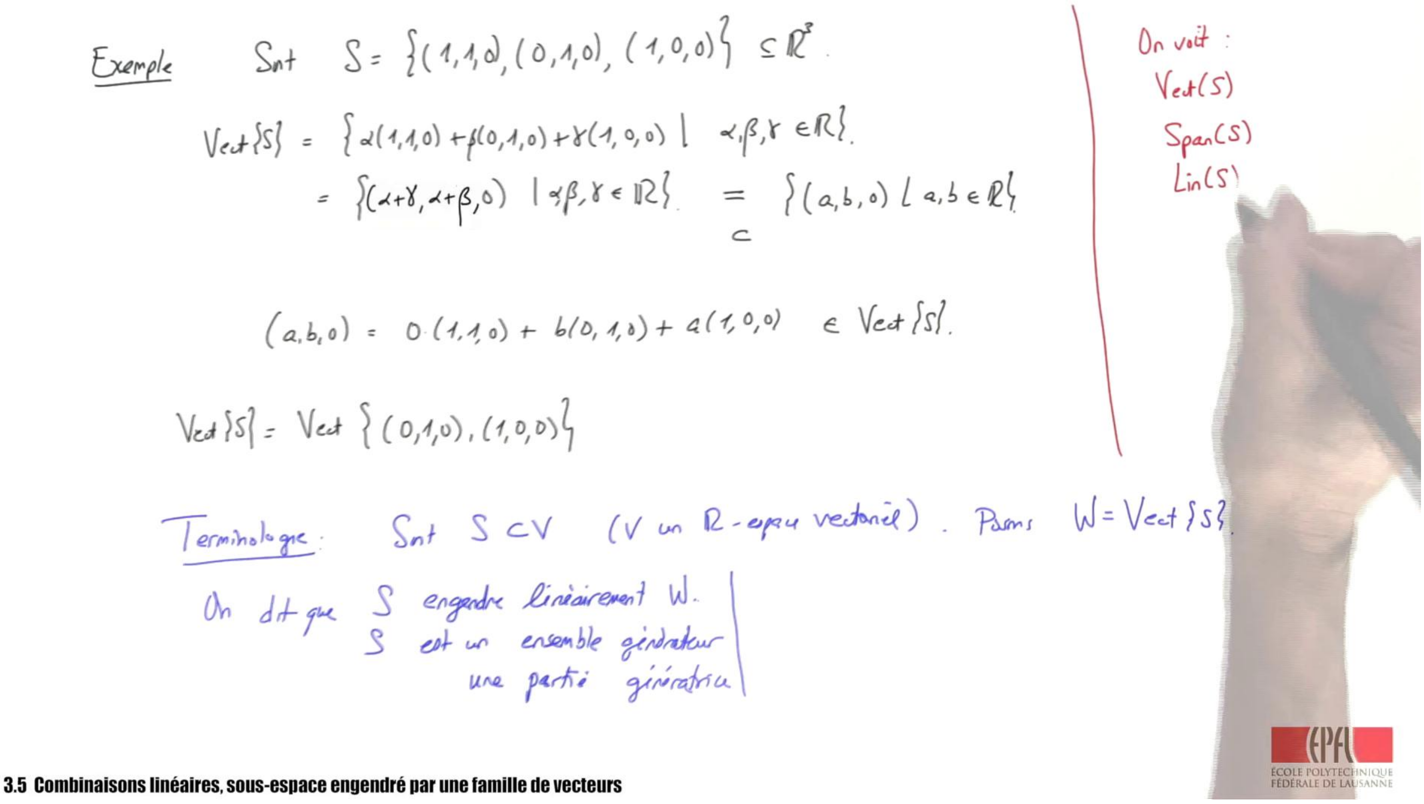


Je prends S, un petit ensemble. Je prends les vecteurs (1, 1, 0), (0, 1, 0) et (1, 0, 0). Donc un ensemble de vecteurs dans R3. Je fais le vect de S. Par définition, c'est toutes les combinaisons linéaires donc j'ai alpha x (1, 1, 0) + beta x (0, 1, 0) + gamma x (1, 0, 0) où alpha, beta et gamma sont des nombres réels. Ceci est égal... je les mets ensemble, alpha + gamma, alpha + beta, 0 où alpha, beta et gamma sont des nombres réels. Je prétends que c'est la même chose que l'ensemble de tous les vecteurs a b 0 où a et b sont dans R C'est une description un peu plus simple que celle-ci. Pour vous convaincre de cela, je vois bien que cet ensemble de vecteurs est inclus dans cet ensemble-là parce que la coordonnée, la troisième ici c'est effectivement 0. Pour voir que je peux écrire a b 0 comme une combinaison linéaire de ces vecteurs-là, ce n'est pas difficile, c'est 0 x le premier + b x le deuxième + a x le troisième. Je redis : c'est égal à 0 x le premier + b x le deuxième + a x le troisième. Donc ceci est bien dans le vect de S. En fait, on voit que le vect de S est aussi le vect d'un autre ensemble de vecteurs. Je n'avais pas besoin de ce premier vecteur, seulement du deuxième et du troisième.

Notes

Summary

7m 46s



On peut avoir une famille de vecteurs qui engendre un espace vectoriel et on peut avoir une autre famille, donc je vais justement poser cette terminologie. Soit S dans V, un R espace vectoriel. Posons W = vect de S. Alors on dit que S engendre linéairement W. On dit aussi que S est un ensemble générateur ou bien une partie génératrice. C'est seulement pour introduire ces différentes façons de dire. Encore une dernière chose avant de terminer. Il n'y a malheureusement pas une notation standard, donc je veux attirer votre attention au fait que dans certains livres, on utilise une autre notation et une autre terminologie pour le vect de S donc on voit vect (S) avec des parenthèses au lieu des accolades. On voit aussi span de S avec ou sans les accolades, on voit aussi lin de S, on voit tout cela pour dénoter ou désigner l'ensemble vect de S donc si vous lisez un autre livre d'algèbre linéaire et que vous voyez une de ces choses-là, il faut chercher dans l'index et vous verrez si ça désigne exactement l'ensemble des combinaisons linéaires.

Notes

Summary

9m 56s