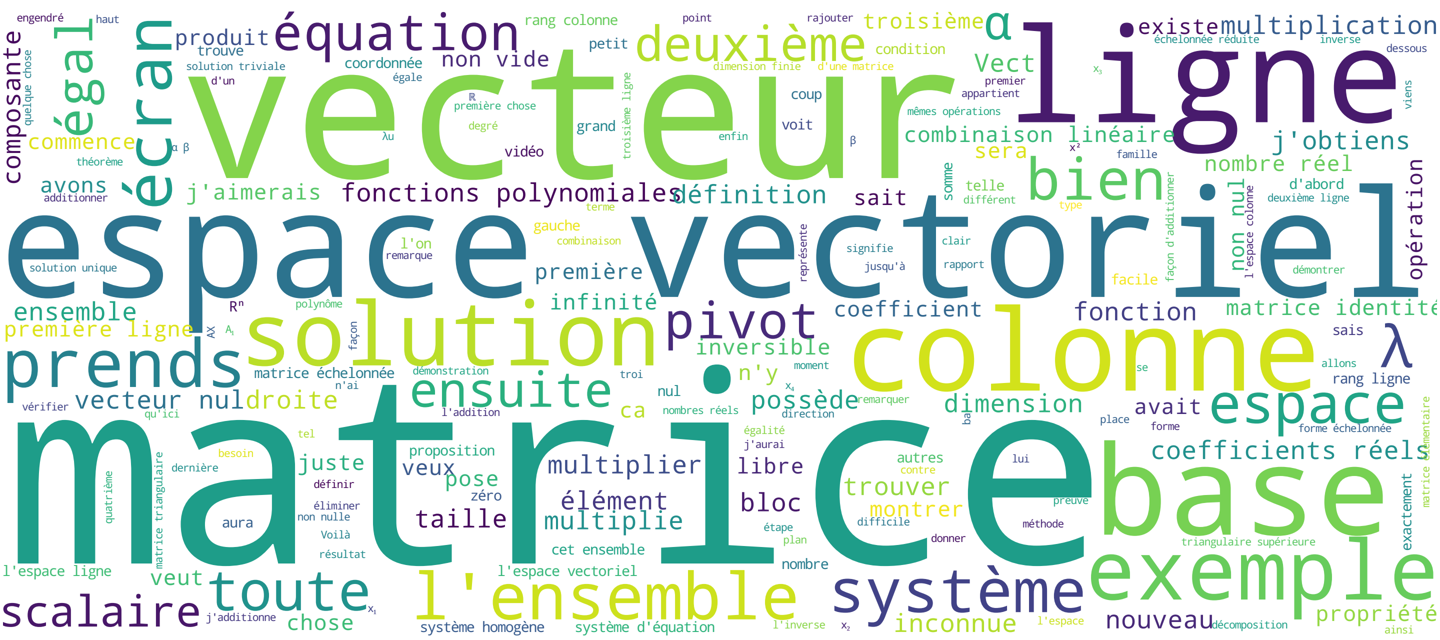
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

3.4 Sous-espaces vectoriels

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

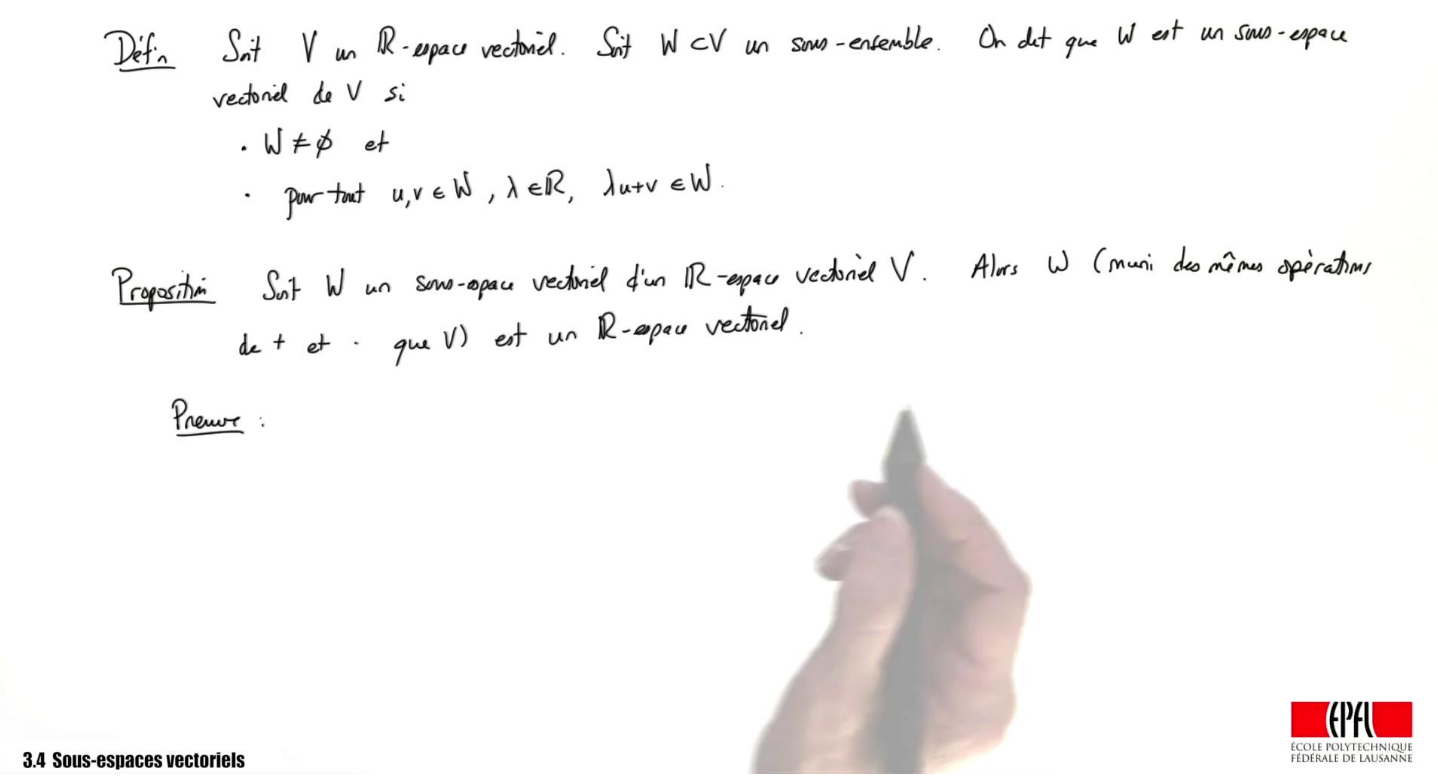
EPFL

Dans cette vidéo, nous allons formaliser la notion que nous avons déjà vue dans deux exemples. On avait l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et puis là-dedans on avait un plus petit espace vectoriel, c'était les fonctions polynomiales à degré $o + n$. On avait aussi l'espace de toutes les fonctions de R dans R et là-dedans il y avait les fonctions polynomiales et, encore plus petit les fonctions polynomiales de degré $o + n$. Maintenant, j'aimerais formaliser cette notion d'un espace qui est grand et des sous-ensembles.

Notes

Summary

0m 04s



Donc je donne la définition. Soit V un R-espace vectoriel et soit W un sous-ensemble de V. On dit que W est un sous-espace vectoriel de V si on a deux conditions. D'abord W n'est pas un ensemble vide et pour tout u,v dans W, pour tout nombre réel λ, alors $\lambda u + v$ est de nouveau dans W. La première chose à voir, c'est la proposition suivante, et ça dit que cette définition équivaut à dire que W, avec les mêmes opérations que V, est un espace vectoriel lui-même. Donc soit W un sous-espace vectoriel d'un R-espace vectoriel V. Alors W, muni des mêmes opérations que V, est lui-même un R-espace vectoriel. La preuve est très simple en fait parce que pour montrer que quelque chose est un R-espace vectoriel, normalement il y a une longue liste, mais la toute première chose c'est déjà d'être sûr que c'est un ensemble non-vide, c'est ce qu'on a, puis qu'on a une façon d'additionner deux éléments. Ici on a une façon d'additionner deux éléments parce que si je prends u et v dans W et je prends le scalaire $\lambda = 1$, j'ai $1 \cdot u + v = u + v$ et par la condition de sous-espace, ce vesteur est dans W.

Notes

Summary

0m 39s

Exemples.

(1) $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

(2) $\mathbb{P}(\mathbb{R})$

(3) $\{\mathbf{0}\}$

(4) $\mathcal{U}_{n\times m}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : A \text{ triangulaire supérieure}\}$

(5) $W = \{f \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$

Donc je peux additionner deux éléments dans *W*. Je devrais aussi voir que je peux multiplier par un scalaire, d'abord je vais faire encore une manipulation. Pour *u* dans *W*, je fais de nouveau un procédé similaire, j'ai *(-1)·u + u* (je peux reprendre le même u) et ça c'est le vecteur nul. Donc par cette condition, je sais que le vecteur nul est dans *W*. Maintenant, je peux faire les scalaires pour *u* dans *W* et *λ* un nombre réel, on a *λu + 0 ∈ W* (car on sait maintenant que le vecteur nul est dans *W*), ainsi *λu = λu + 0* est bien dans *W*. Du coup, j'ai une façon d'additionner deux éléments de *W* et de multiplier par un scalaire et je retourne dans *W*. Ensuite, tous les autres axiomes, on les aura gratuitement, parce qu'on les a déjà dans *V*. Je mentionne : toutes les autres propriétés sont héritées de *V*. Donc cela fait que *W* est un *R*-espace vectoriel. Je veux aussi remarquer que la proposition va dans l'autre sens aussi. Si je me donne *W*, un sous-ensemble d'un *R*-espace vectoriel tel que *W* muni des mêmes opérations que *V*, qui est lui-même un *R*-espace vectoriel, alors *W* est un sous-espace de *V*. C'est plus facile à voir dans cette direction.

Notes

Summary

2m 31s

Exemples.

(1) $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

(2) $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ est " " de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

(3) $\{\mathbf{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de V (si $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de V).

(4) $\mathcal{U}_{n\times m}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : A \text{ triangulaire supérieure}\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

(5) $W = \{f \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$

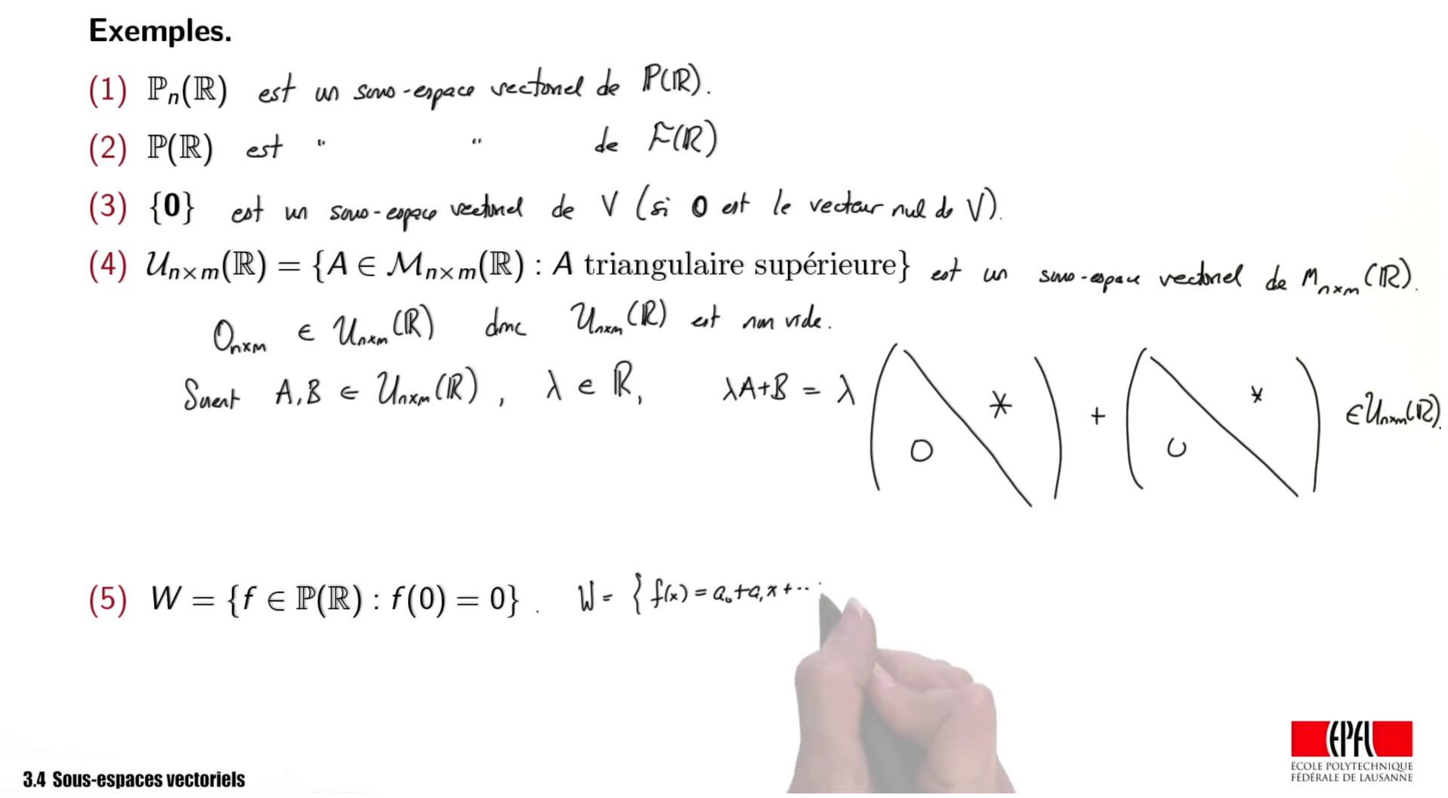
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant des exemples, on en a déjà vu. Donc le $P_n(R)$, on l'a déjà vu, c'est un R-espace vectoriel et c'est un sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels. C'est aussi un sous-espace de quelque chose d'encore plus grand, c'est les fonctions réelles de R dans R, que j'écris en dessous. Alors, $P(R)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de R dans R. C'est ce qu'on avait déjà vu. Maintenant, $\{0\}$, c'est notre plus petit espace vectoriel, ça c'est un sous-espace vectoriel de V si 0 ici est le vecteur nul de V. On sait que c'est un espace vectoriel, et comme il est là dans V, alors c'est un sous-espace vectoriel de V. Ici j'introduis aussi une notation. Posons $U_{nxm}(R)$, l'ensemble de toutes les matrices de taille n x m à coefficients réels, qui sont triangulaires supérieur. J'aimerais voir que ceci est un sous-espace vectoriel des matrices n x m à coefficients réels. D'abord, je remarque que c'est non-vide car la matrice nulle de taille n x m est une matrice triangulaire supérieure donc cet ensemble n'est pas vide.

Notes

Summary

4m 10s



Maintenant, si je prends A et B, deux matrices triangulaires supérieur, et si je prends λ un scalaire. Si on imagine $\lambda A + B$, il faut imaginer la matrice A et B donc ici on a la matrice A triangulaire supérieure ça veut dire qu'on a des coefficients non-nuls là-haut, éventuellement sur la diagonale mais rien en dessous, plus une matrice B de même taille avec les mêmes conditions. Donc ça c'est de nouveau une matrice triangulaire supérieure. Donc c'est non-vide et quand on fait une combinaison de deux vecteurs là-dedans, on trouve un vecteur là-dedans. Voyons un autre exemple. Je prends l'ensemble des fonctions polynomiales qui s'annulent en 0. Il y aura deux façons de voir ceci. On peut penser que c'est des fonctions, et on peut travailler comme ça ou bien on peut penser que ce sont des expressions polynomiales. Je vais faire plutôt avec les expressions polynomiales. Donc ici, le W c'est toutes les fonctions polynomiales, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ dans les fonctions polynomiales telles que $f(0) = 0$ mais ici quand je substitue 0 à la place de x j'obtiens a_0 donc telles que $a_0 = 0$.

Notes

Summary

5m 42s

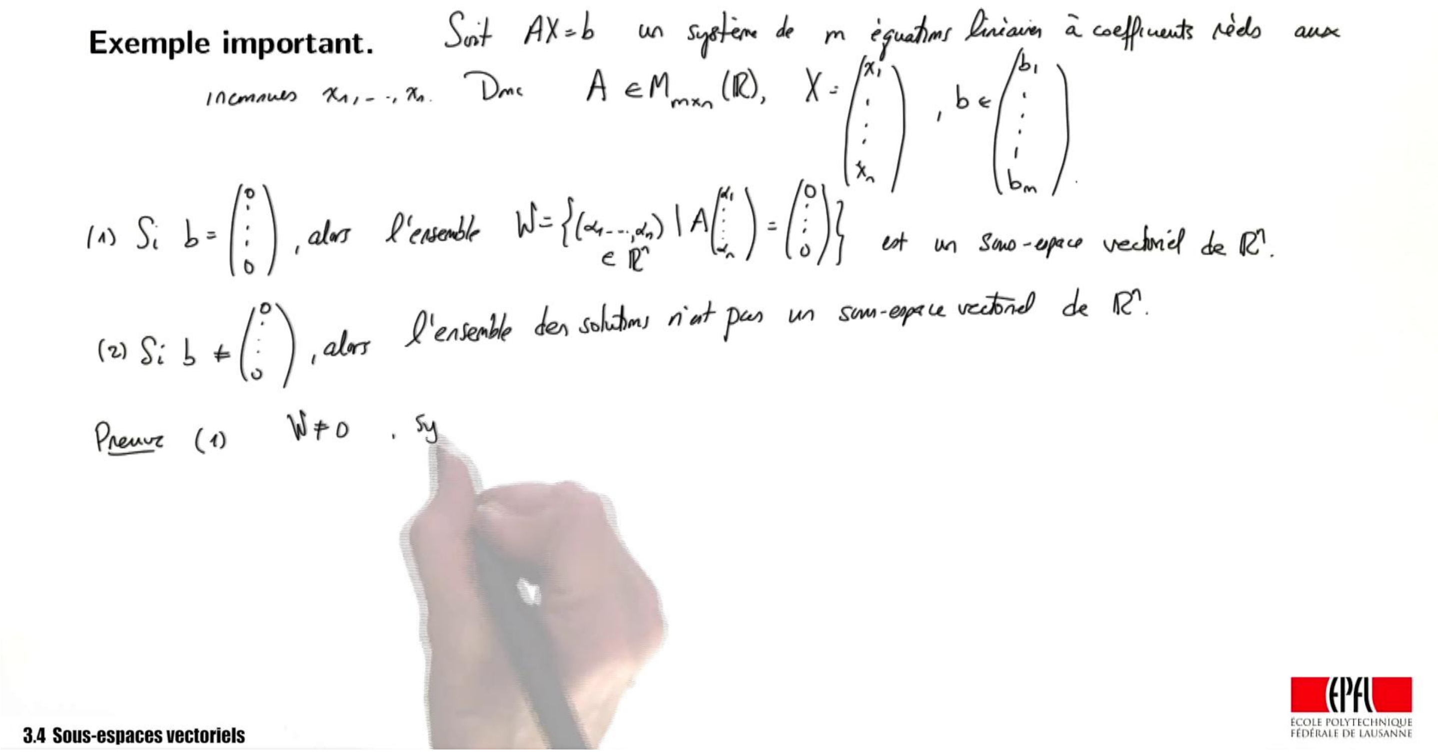
Exemple important.

Donc W c'est l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales dont le terme constant est nul. Donc les a_i sont dans R et le n est plus grand ou égal à 1 cette fois. Maintenant si vous additionnez deux polynômes qui sont comme ça, vous n'allez pas rajouter un terme constant. Déjà c'est non-vide parce que 0 (le vecteur nul) est là-dedans, mais par exemple également les fonctions x et x^2. De plus, si vous additionnez deux fonctions comme ça ou si vous multipliez par un scalaire et vous faites une combinaison, vous retombez dans l'ensemble W. Donc W est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions polynomiales à coefficients réels.

Notes

Summary

7m 18s



Je termine avec un dernier exemple important. On revient à un système d'équations, c'est notre point de départ. Donc je pose un système. Soit $AX = B$, un système de m équations linéaires à coefficients réels aux inconnues x_1,..., x_n. Donc cela signifie que A est la matrice des coefficients, c'est une matrice de taille m x n (car on a m équations et n inconnues), à coefficients réels. Le X c'est la colonne des inconnues et le b c'est la colonne des termes constants dans chaque équation. Quand on a une situation comme celle-là, il y a deux choses qui arrivent, qui sont assez distinctintes. Si le $b = 0$ alors l'ensemble W de toutes les solutions, c'est-à-dire l'ensemble [voir écran], est un sous-espace vectoriel de R^n. Si par contre b n'est pas 0 alors l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace de R^n. Ces deux résultats ne sont pas difficile à vérifier. Preuve : 1) Le W est non-vide car on sait que quand on a un système homogène, il y a toujours la solution triviale. Donc système homogène implique solution triviale toujours.

Notes

Summary

8m 01s

Exemple important. Soit $AX=b$ un système de m équations linéaires à coefficients réels aux inconnues $x_1, \dots, x_n$. Donc $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b \in \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

(1) Si $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors l'ensemble $W = \left\{ \underset{\in \mathbb{R}^n}{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \mid A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si $b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Preuve (1) $W \neq \emptyset$, système homogène $\Rightarrow$ solution triviale toujours. Soient $\overset{u}{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}, \overset{v}{(\beta_1, \dots, \beta_n)} \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A\left(\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) = \lambda A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda u + v \in W.$$

(2) Si $b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $(0, \dots, 0)$ n'est pas une solution.

3.4 Sous-espaces vectoriels

Donc maintenant je prends deux autres solutions, soit *(α₁,..., αₙ)* et *(β₁,..., βₙ)* dans *W* et *λ* un nombre réel. Et maintenant je fais la combinaison de ces deux : *λα + β*. J'obtiens alors comme sytème : [voir écran] Et ceci est égal, par les règles de multiplications des matrices et d'addition à [voir écran] mais comme ce sont deux solutions j'ai *λ0 + 0*, donc j'obtiens *0*. Du coup, si j'appelle ceci *u* et *v*, alors *λu + v* est de nouveau dans *W*. Donc *W* est bien un sous-espace vectoriel de R^n. Dans le deuxième cas, il est aussi facile de voir que *W* (i.e. l'ensemble des solutions) n'est pas un sous-espace car si *b* est différent de *0*, on n'a même pas le vecteur nul. Alors *0* n'est pas une solution. Et comme nous avons vu tout à l'heure, dans un sous-espace vectoriel, on a forcément le vecteur nul de l'espace vectoriel donc il n'y a aucune chance que cela soit un sous-espace. Juste avant de terminer, je veux vous faire remarquer encore une autre chose. C'est que tout au début on avait donné une démonstration que si un système d'équations possède plus qu'une solution, il en possède une infinité.

Notes

Summary

10m 02s

Exemple important. Soit $AX=b$ un système de m équations linéaires à coefficients réels aux inconnues $x_1, \dots, x_n$. Donc $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b \in \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

(1) Si $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors l'ensemble $W = \left\{ \underset{\in \mathbb{R}^n}{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \mid A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si $b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Preuve (1) $W \neq \emptyset$, système homogène $\Rightarrow$ solution triviale toujours. Soient $\overset{u}{(\alpha_1 \dots \alpha_n)}, \overset{v}{(\beta_1 \dots \beta_n)} \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A\left(\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) = \lambda A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda u + v \in W.$$

(2) Si $b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $(0, \dots, 0)$ n'est pas une solution.

Donc il y avait 3 cas de figure : aucune solution, solution unique ou une infinité de solutions. Ici dans le cas des systèmes homogènes, on aura une nouvelle preuve de ce fait parce qu'ici si je prends un système homogène, je viens de voir que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de R^n. Donc c'est un espace vectoriel. Je viens de vous convaincre, j'espère, qu'on peut avoir un espace vectoriel tout petit, c'est à dire fini, c'est l'espace vectoriel nul. Donc on peut avoir cet ensemble de solutions, juste un élément, la solution triviale, mais à partir du moment où il y a deux vecteurs là-dedans, on sait qu'un R-espace vectoriel possède une infinité de vecteurs. Donc si il y a deux solutions, alors il y en a une infinité. C'est une autre démonstration de ce résultat.

Notes

Summary

12m 06s