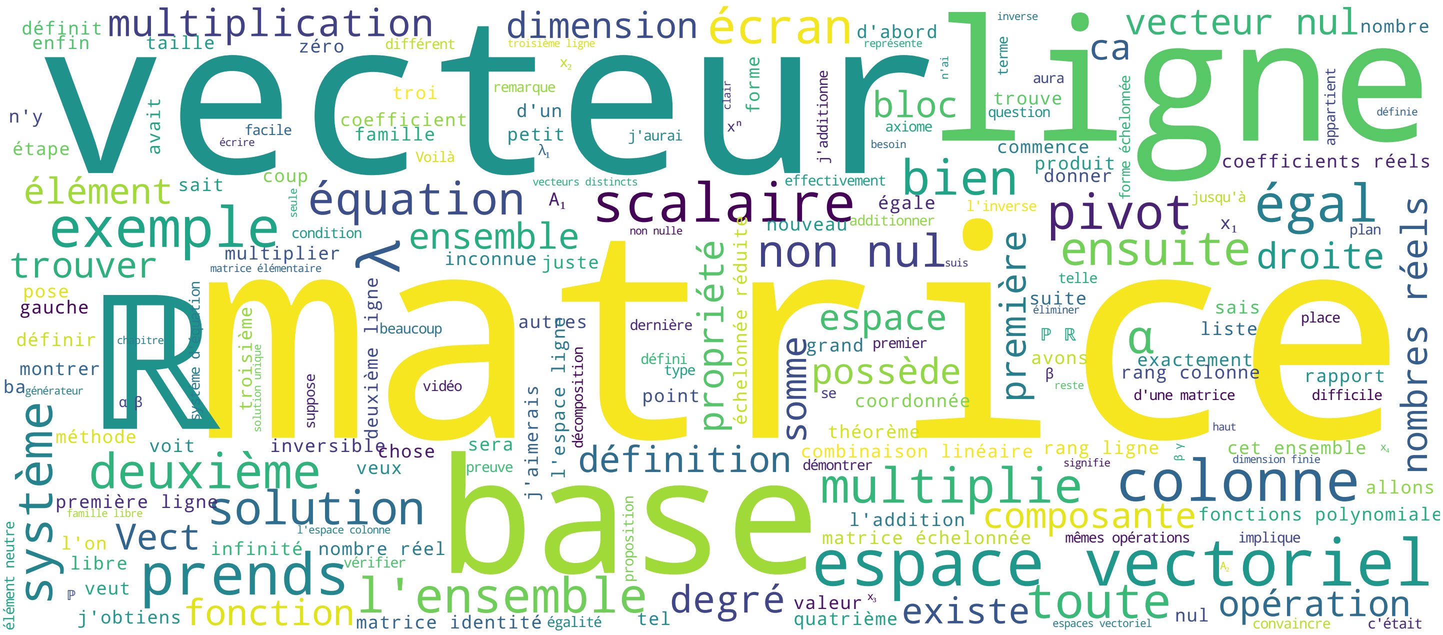
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Chapitre 3 : Espaces vectoriels

## 3.3 D'autres exemples importants

**Algèbre linéaire**

Prof. Donna Testerman




Search MOOC

Video

EPFL


Ici, nous allons voir encore d'autres exemples très importants d'espaces vectoriels. Nous avons vu $\mathbb{R}^n$, et puis $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Maintenant, ici, je vais présenter d'autres exemples, qui seront essentiellement tous les exemples que nous verrons dans ce cours.

Notes

Summary

0m 03s

① $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ avec les opérations + et la multiplication par un nombre réel définies au chapitre 2.

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

② $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ = l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales à coefficients réels de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.





Je commence par donner une définition pour le premier exemple. J'ai déjà l'ensemble des matrices *m x n* à coefficients réels. Donc ça, c'est l'ensemble des matrices à coefficients réels, on les connaît. Et puis je prends les mêmes opérations que nous avons déjà définies. Avec les opérations + et multiplication par un scalaire déjà définies dans le chapitre 2. Si vous vous rappelez, tout de suite après que j'avais défini l'addition et la multiplication par un scalaire, il y avait une liste de propriétés comme l'addition est commutative, l'addition est associative, la multiplication distribue par rapport à l'addition, etc. et toutes ces propriétés sont exactement la liste de propriétés qu'il faut pour que ça soit un ℝ-espace vectoriel. Donc ici, cet ensemble de matrices, avec ces opérations, est un ℝ-espace vectoriel. Ça, c'est un exemple qu'on connaît déjà. Deuxième exemple. Je pose $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de ℝ dans ℝ. Maintenant, précisément, pour un *f*, ici dedans, donc c'est censé être une fonction, il existe un nombre naturel ≥*0*, et des nombres réels $a_0$, $a_1$,…,$a_n$, tel que *f*, en tant que fonction sa valeur en *x*, c'est $a_0 + a_1x+\dots+a_n\, x^n$.

Notes

Summary

0m 20s

Donc ça, c'est une fonction polynomiale. Maintenant, si je prends un deuxième, donc je dois définir les opérations pour un deuxième: $g \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$. Alors, je dois définir la somme $f + g$, sa valeur en $x$, c'est une fonction égale à $(a_0 + b_0) + ...$ je ne perds rien en disant que $n \leq m$ donc ici j'irai jusqu'à $(a_n + b_n) x^n + ...$ et ensuite ça continue avec les $b$: $+b_{n+1}x^{n+1} + \ldots + b_m x^m$. *Pour un nombre réel* $\lambda$ *je définis* $\lambda \cdot f(x)$, *c'est* $\lambda a_0 + \lambda a_1 x + ... + \lambda a_n x^n$. *On a défini les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, et il n'est pas difficile de voir qu'avec ces deux opérations* $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ *devient un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Par exemple, si vous voulez voir que l'addition est associative ou commutative, c'est assez clair. Maintenant, juste, j'aimerais faire une définition que j'utiliserai tout de suite après. Pour* $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ *comme ci-dessus, on définit le degré de f, qu'on va noter deg(f). Donc c'est ce f qui est là, ça c'est f. On va dire que le degré de f est égal à n si* $a_n \neq 0$ *et, au cas où tous les coefficients sont nuls, on va dire* $-\infty$ *si* $f=0$*, c'est à dire si tous les coefficients sont égaux à 0.*

Notes

Summary

2m 21s

③ Posons $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) \mid \deg f \leq n \}$, avec + et · comme dans l'exemple 2.
$n \in \mathbb{N}, n \geq 0$

Pour $f, g \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\} \leq n$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\deg(\lambda f) \leq n$.

3.3 D'autres exemples importants

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

*Maintenant, ça m'emmène au prochain exemple, ③. Posons $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, n un nombre entier ≥ 0. Ici, c'est l'ensemble des fonctions polynomiales telles que le degré de f est, au plus, n. Je ne prends pas toutes les fonctions polynomiales mais celles telles que le degré est au plus n. Et puis, je prends les mêmes opérations avec + et · comme dans l'exemple ②. Le fait que l'addition est commutative, associative, distributivité, etc. ça c'est ok, mais il faut voir que si je prends deux éléments là-dedans, la somme est de nouveau là-dedans. Donc, pour f et g, des fonctions polynomiales de degré, au plus, n, le degré de la somme, de toute façon, c'est plus petit ou égal au maximum des deux degrés. On ne peut pas augmenter le degré, on peut éventuellement le descendre, mais en tout cas, ça reste pas plus grand que n et pour λ un nombre réel le degré de λ·f c'est aussi ≤ n. Donc en fait, avec les mêmes opérations quand on additionne, on retombe dans l'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ quand on multiplie par un scalaire, on retombe dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et du coup, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est aussi un ℝ-espace vectoriel.*

Notes

Summary

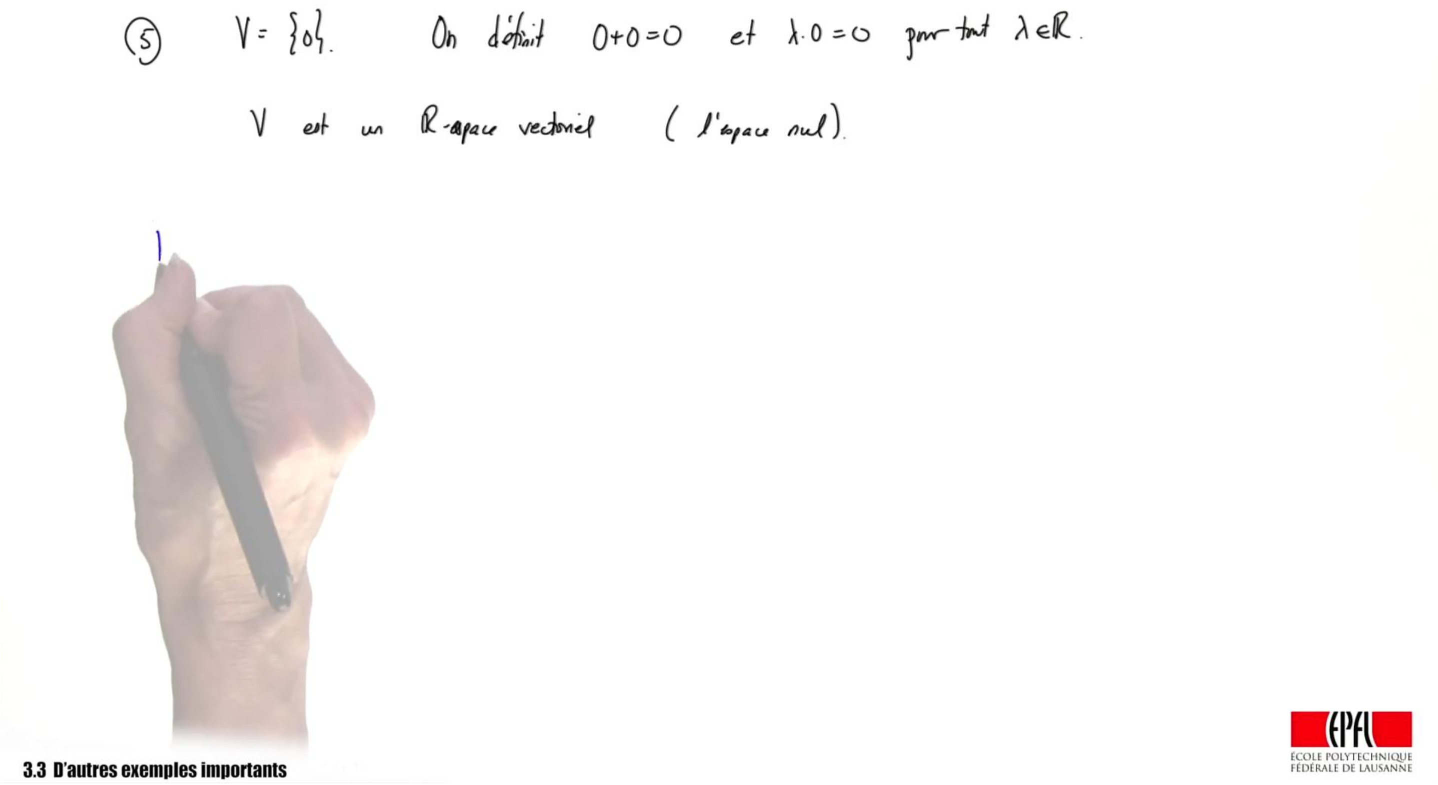
4m 45s

*Tous les espaces vectoriels que nous avons vus jusqu'à maintenant se comportent assez bien. Il y a une notion de coordonnées ou de nombre de places à remplir même dans le cas des fonctions polynomiales de degré illimité il y a quand même un sens d'ordre là-dedans. Maintenant, je regarde un espace vectoriel qui est beaucoup plus grand. Posons F(ℝ) l'ensemble de toutes les fonctions de ℝ dans ℝ. Donc, là-dedans, il y a des fonctions polynomiales, mais il y en a plein d'autres. Par exemple, si je prends f(x) égal à la fonction exponentielle, ou g(x) égal à la fonction sinus, ce sont des fonctions de ℝ dans ℝ, donc qui sont dans cet ensemble. Maintenant, je dois définir une somme et une multiplication par scalaire. Pour f,g∈F(ℝ) dans cet ensemble, on définit la somme, qui est censée aussi être une fonction de ℝ dans ℝ donc je l'évalue en x. Et la valeur, c'est f<(x)+g(x). Et ça, c'est pour tout x dans ℝ. Et pour λ, un scalaire, on définit λ·f, aussi une fonction de ℝ dans ℝ. Sa valeur en x, c'est λ·f(x). Là, ça fait de cet ensemble un ℝ-espace vectoriel qui est très grand. Maintenant, à l'opposé d'un ℝ-espace vectoriel très grand, on peut se demander à quel point un espace vectoriel peut être petit ?*

Notes

Summary

6m 26s




*Ça sera le dernier exemple. Si on imagine la liste d'axiomes pour un ℝ-espace vectoriel, d'abord, on peut additionner, multiplier par les scalaires, l'addition est commutative, associative, etc. il y a toute une liste, Et, à un moment donné, on arrive à l'axiome qui dit il existe un élément neutre. Donc, un ℝ-espace vectoriel a au moins un élément dedans. D'ailleurs, on a dit qu'il était non-vide au début. Il a au moins un élément, c'est le vecteur nul. Et puis, j'essaie de faire de juste ce petit ensemble un ℝ-espace vectoriel. Donc, je prends V={0}, l'ensemble 0. On définit 0 + 0 = 0 et λ·0 = 0 et ça, pour tout λ. Après, on suit la liste des axiomes, et on voit que chaque axiome est satisfait. Il y a un élément neutre, l'inverse de l'élément neutre, c'est lui-même, la règle de distributivité, par exemple faire un λ + μ qui multiplie 0 c'est λ qui multiplie 0 + μ qui multiplie 0, effectivement, donc toute la liste est satisfaite, donc V est bien un ℝ-espace vectoriel. On l'appelle l'espace nul. Je termine avec une remarque.*

Notes

Summary

8m 12s

(5) $V = \{0\}$. On définit $0+0=0$ et $\lambda \cdot 0 = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$V$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (l'espace nul).

<u>Remarque</u> Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Supposons que $V$ possède au moins deux vecteurs. Alors il en possède une infinité. Soit $v \in V$, $v \neq 0$. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. $\quad (\lambda_1 - \lambda_2) v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 v \neq \lambda_2 v$.

3.3 D'autres exemples importants

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

*En fait, ça, c'est assez exceptionnel, qu'on ait un espace vectoriel avec un nombre fini de vecteurs ou d'éléments. Donc, je prends un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et je suppose que V possède au moins deux vecteurs distincts. Alors, je vais vous convaincre que V en possède une infinité. Comment je m'y prends ? Alors, comme V possède au moins deux vecteurs, il y a un vecteur non nul. Soit v$\in$V, différent du vecteur nul. Et puis, maintenant, soit $\lambda_1$ et $\lambda_2$ des nombres réels distincts. Comme c'est des nombres réels distincts, $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Donc, j'ai un scalaire qui est non nul, j'ai un vecteur qui est non nul, et ça veut dire que $\lambda_1 - \lambda_2$ qui multiplie v n'est pas le vecteur nul. Ça, c'était une des propriétés, on avait vu que si on a un scalaire qui multiplie un vecteur qui donne un vecteur nul, ou bien le scalaire est 0, ou bien le vecteur est le vecteur nul. Ici, on a un scalaire non nul, un vecteur non nul, donc ça, c'est non nul. Et donc $\lambda_1$v n'est pas égal à $\lambda_2$v. Et ça, c'est pour tout $\lambda_1$ et $\lambda_2$ qui sont distincts. Donc, du coup, si je laisse $\lambda_1$ parcourir les nombres réels, je vais trouver une infinité de vecteurs distincts.*

Notes

Summary

9m 37s