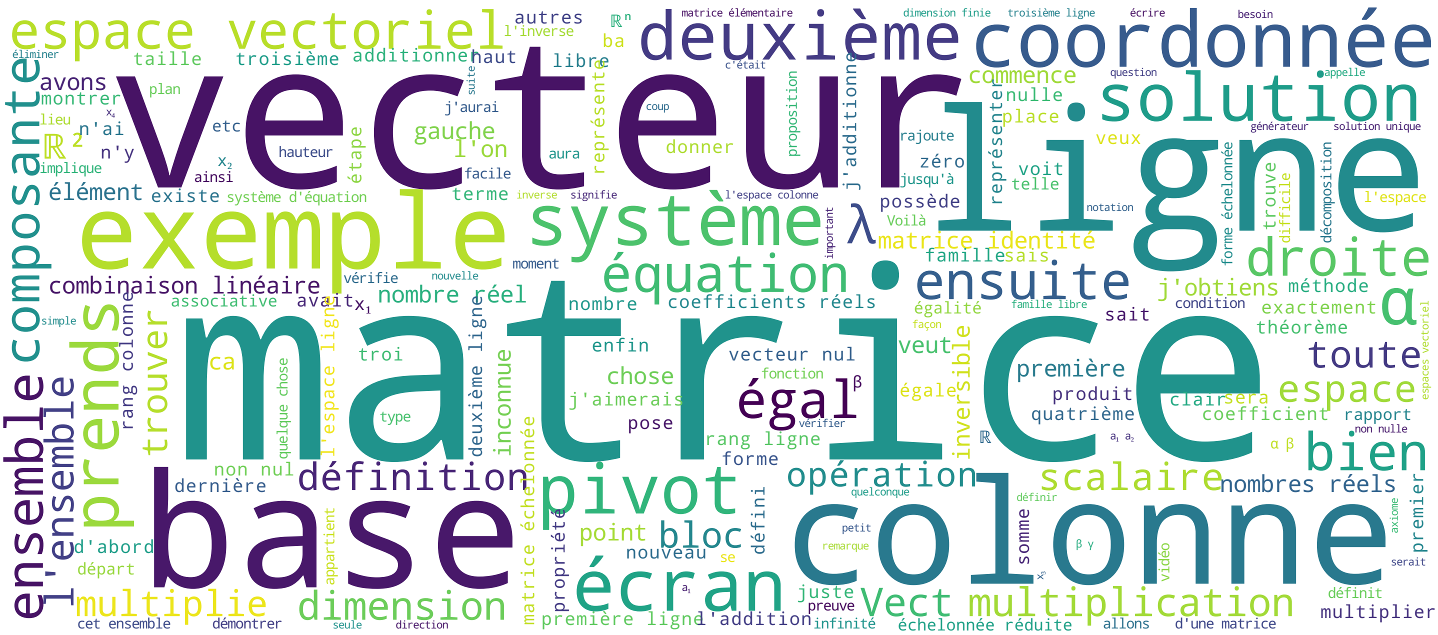
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

3.2 $\mathbb{R}^n$

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

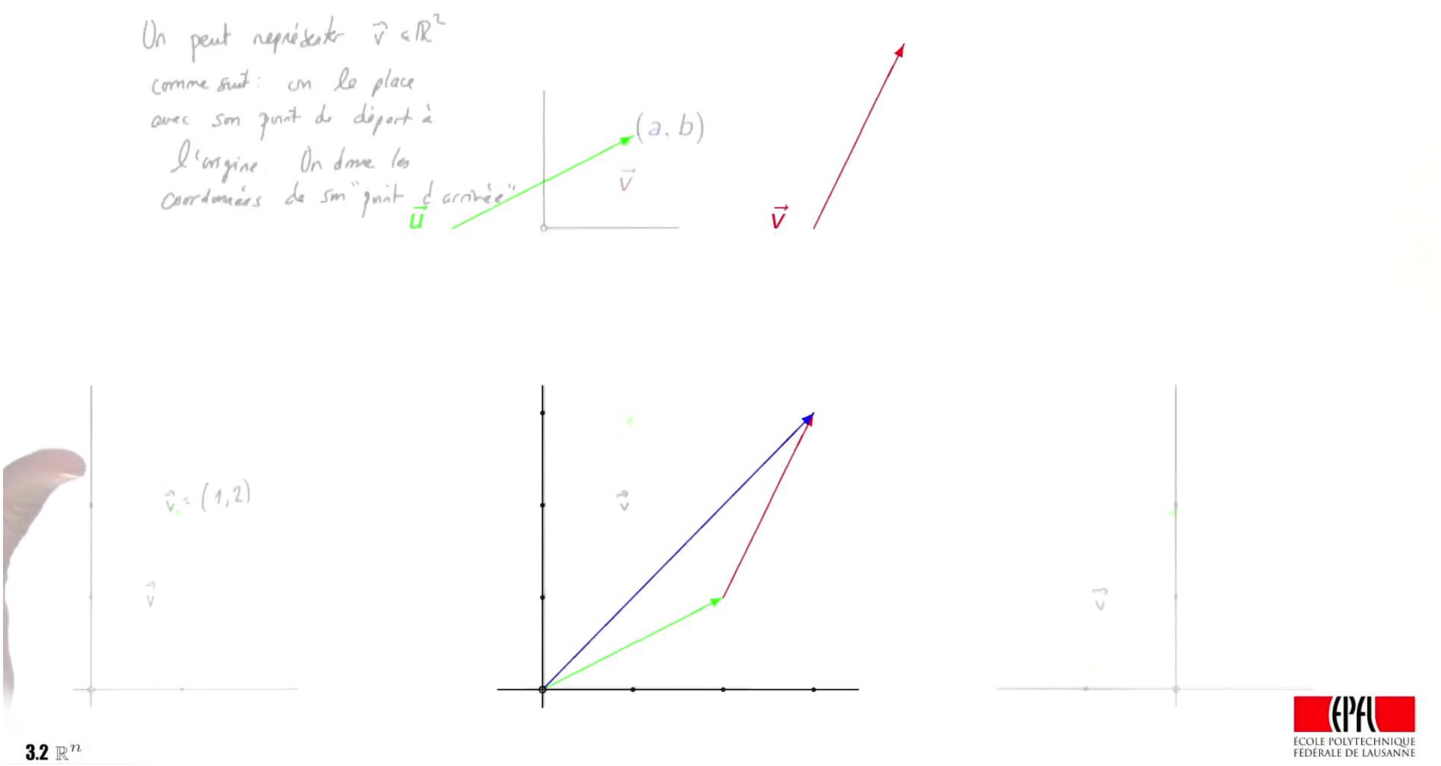
EPFL

Nous continuons avec l'étude des espaces vectoriels. Et j'aimerais aujourd'hui généraliser ce qu'on a fait la dernière fois. J'avais introduit l'espace $\mathbb{R}^2$ et aussi $\mathbb{R}^3$. C'est un espace vectoriel qu'on voit géométriquement. Maintenant, pour généraliser ça, il faut que je traduise ça en termes algébriques au lieu de géométriques.

Notes

Summary

0m 03s

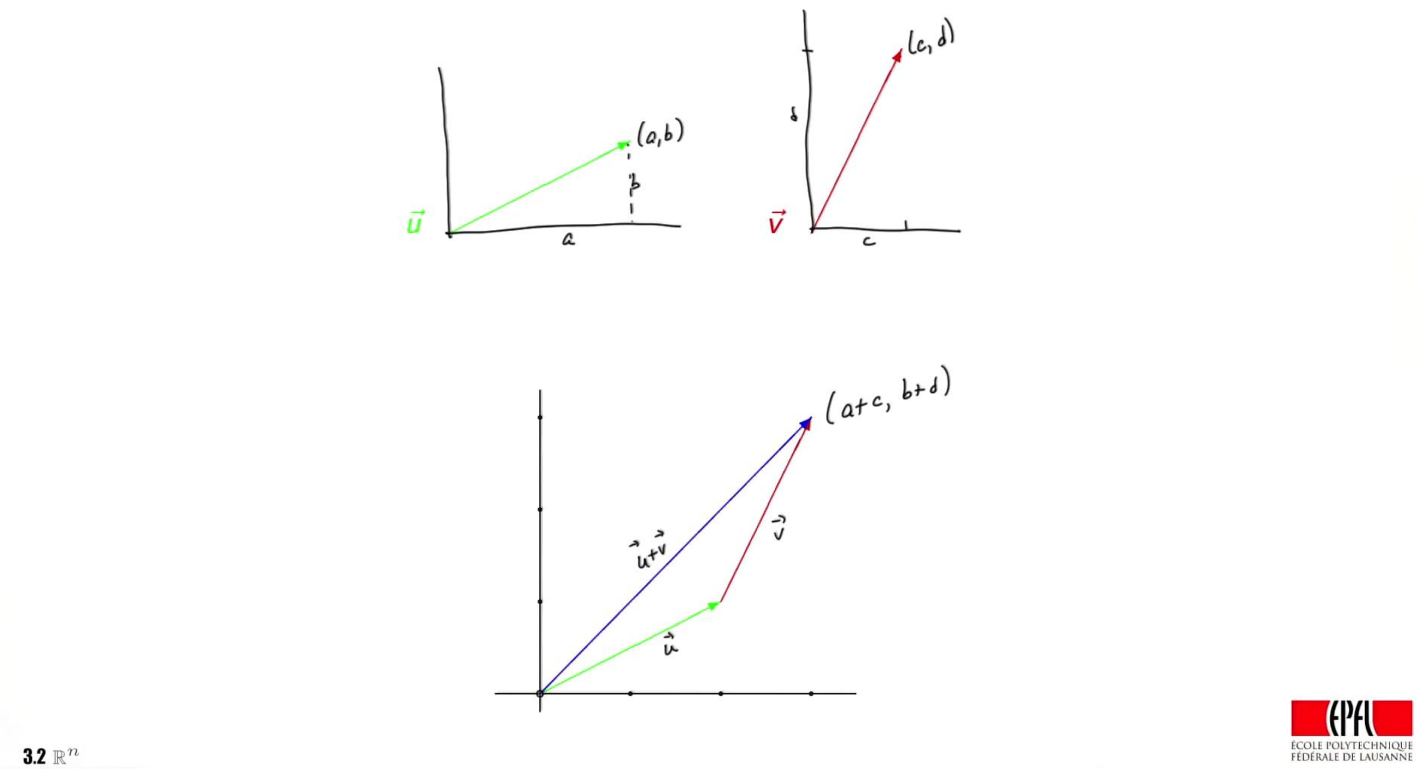


Donc je commence, je vous rappelle que un vecteur dans $\mathbb{R}^2$, c'est un segment orienté, donc il y a une longueur et une direction. Maintenant je décide que je vais la représenter par ses coordonnées, mais pour ça, je dois fixer où est le point de départ. On peut représenter un vecteur dans $\mathbb{R}^2$ comme suit : on le place avec le point de départ à l'origine, et puis, je vais le représenter par ses coordonnées, c'est-à-dire les coordonnées de son point d'arrivée. Par exemple, en bas à gauche, le vecteur, on va à droite (de 1) et en haut (de 2), ainsi c'est le vecteur *(1,2)*. Donc je peux le représenter par ses coordonnées. Il faut savoir que c'est le même vecteur que celui du millieu. Ainsi, c'est aussi le vecteur *v*, à droite, c'est aussi le vecteur *v*, mais à ce moment là, je ne les représente pas par *(1,2)* car ça n'a pas tellement de sens, j'écris *(1,2)* quand je pense qu'il a été placé avec son point de départ à l'origine.

Notes

Summary

0m 23s

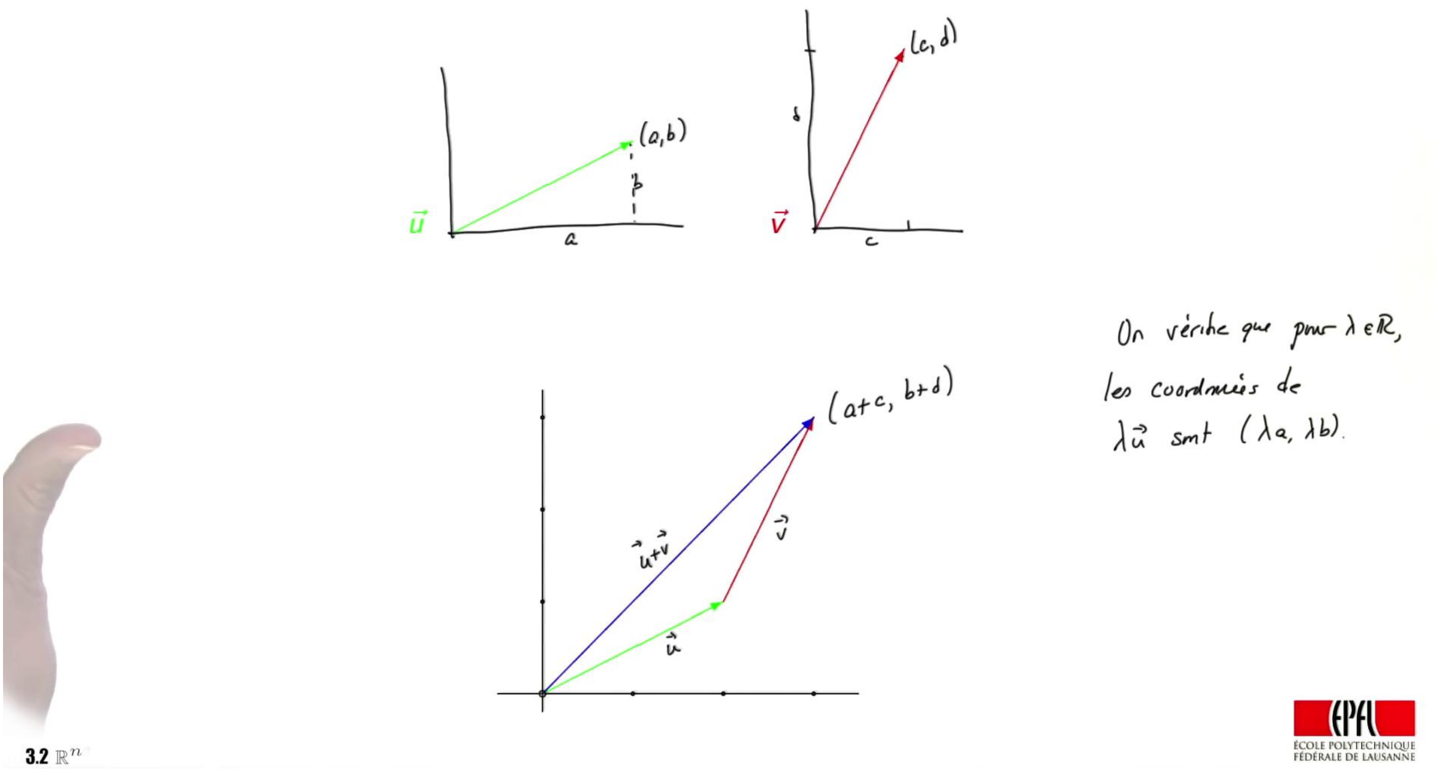


Maintenant, j'aimerais faire une traduction de l'opération d'addition. Ici, imaginez que *u* est le vecteur avec les coordonnées *(a,b)*. Ça veut dire que si je dessine les axes, la longueur horizontale, c'est *a*, et la longueur verticale, c'est *b*. Même chose pour *v*, si je dessine les axes, et que ses coordonnées sont les coordonnées *(c,d)*, alors, la longueur horizontale, c'est *c*. et la longueur verticale, c'est *d*. Maintenant, je place *u* et *v* comme il faut pour les additionner. Ici, c'est *u*, ici, c'est *v*. Et je voudrais trouver les coordonnées de *u* + *v*. Ici le vecteur bleu, c'est *u* + *v* défini géométriquement, comme avant. On voit bien qu'ici, la coordonnée *x* du vecteur *u* + *v*, c'est qu'on a une première distance, qui est la distance *a*, on rajoute une seconde distance *c*. Donc la première coordonnée de *u* + *v* c'est *a* + *c*. Et la hauteur, c'est la hauteur qu'on avait pour *u*, plus la hauteur qu'on avait pour *v*, c'est-à-dire *b* + *d*. Donc, en fait, pour additionner deux vecteurs, en termes de coordonnées, c'est tout simple, on additionne les coordonnées correspondantes.

Notes

Summary

1m 41s



On vérifie aussi que pour λ, un nombre réel, les coordonnées du vecteur λu, sont $(\lambda a, \lambda b)$. Avec ça, on voit bien comment on peut généraliser, ce qu'on a fait dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, à $\mathbb{R}^n$, pour n quelconque.

Notes

Summary

2m 58s

Posons $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ n-tuples ordonnés.

On définit + et ·

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$.

Le vecteur nul est $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

L'inverse de $(a_1, a_2, \dots a_n)$ est $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

On vérifie que tous les axiomes sont satisfaits.

Je donne la définition. Posons $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. C'est l'ensemble des n-tuples ordonnés. Maintenant, j'aimerais définir sur cet ensemble $\mathbb{R}^n$ une addition, et puis aussi, une multiplication par les nombres réels. On définit + et *x*. Donc si je prends $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, j'additionne $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. On voit, d'après ce qu'on a vu dans le cas de $\mathbb{R}^2$, ce qu'il faut faire, c'est de faire $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$. C'est clair que ceci définit un élément de $\mathbb{R}^n$. Puis, pour λ, un nombre réel, si je fais $\lambda(a_1, \dots, a_n)$, d'après ce que j'ai dit pour $\mathbb{R}^2$, ça donne $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$. Donc, ici, on a défini les opérations algébriquement, mais ça, c'est cohérent avec la définition géométrique que j'avais donné dans le cas de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur nul sera le vecteur $(0, 0, \dots, 0)$. L'inverse d'un vecteur est donc le vecteur où l'on donne l'opposé des coordonnées. Et puis, on vérifie tous les axiomes. Bon on peut voir ici, par exemple, la commutativité d'addition, c'est clair. C'est aussi clair que l'addition est associative, parce que c'est associative dans $\mathbb{R}$, etc.

Notes

Summary

3m 21s

Posons $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ n-tuples ordonnés. , $n \geq 1$.

On définit $+$ et $\cdot$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$.

Le vecteur nul est $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

L'inverse de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

On vérifie que tous les axiomes sont satisfaits.

$\mathbb{R}^1 = \{(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ (points)

$\mathbb{R}^n$ peut être identifié avec $M_{1\times n}(\mathbb{R})$.

3.2 $\mathbb{R}^n$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ce n'est pas difficile de vérifier. J'aimerais juste faire deux remarques. Première remarque, c'est que $\mathbb{R}^1$, c'est aussi défini, je n'ai pas dit ici le $n \geq 1$, $\mathbb{R}^1$ c'est juste l'ensemble [voir écran]. Donc, en fait, on peut l'identifier avec les nombres réels, et puis, géométriquement, ça serait les points, comme sur une droite. Une autre remarque que je veux faire, c'est qu'on a déjà vu quelque chose comme ça, le $\mathbb{R}^n$ peut être identifié avec les matrices, bon c'est les matrices de quelle taille, ici, bon il y a une ligne, n colonnes, à coefficients réels. Nous avons déjà défini les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. Et on voit que c'est exactement les opérations que je viens de redéfinir. C'est, en fait, un ensemble avec des opérations qu'on connaissait déjà. Donc c'est pas nouveau, ça c'est bien. On verra d'autres exemples dans les prochaines vidéos.

Notes

Summary

5m 15s