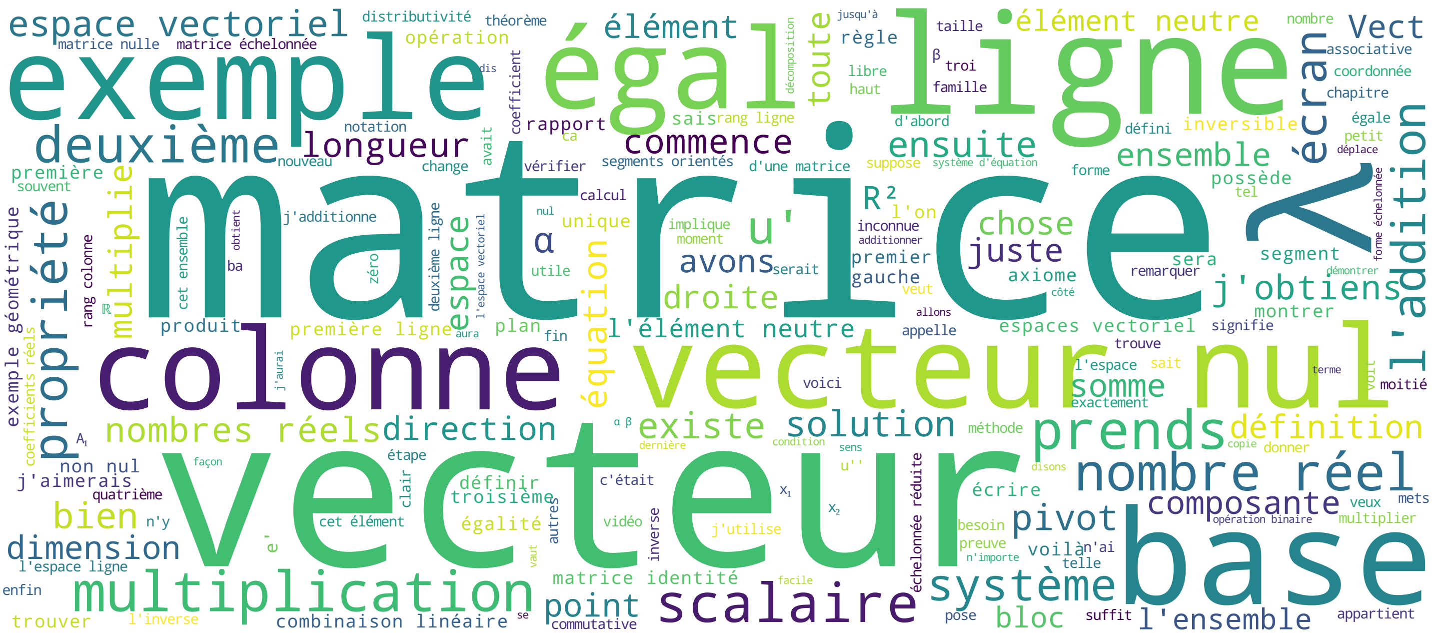
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



[Search MOOC](#)

[Video](#)

EPFL

Soit V un ensemble non vide, muni d'une opération binaire $+$ et d'une action par les nombres réels :

- pour tous $u, v \in V$, il existe un unique élément noté $u + v \in V$.
- pour tous $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique élément noté $\lambda \cdot v \in V$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Nous arrivons au chapitre où l'on introduit vraiment les objets d'étude du cours d'algèbre linéaire et ce sont les espaces vectoriels. Il faut voir les chapitres 1 et 2 comme des méthodes de calcul qui vont être très utiles dans l'étude des espaces vectoriels et les propriétés de ces espaces mais l'objet d'intérêt principal est l'espace vectoriel. Je commence par une longue définition qui contient plein d'axiomes et je conclurai cette vidéo avec un exemple qui j'espère vous sera familier.

Notes

Summary

0m 04s

Soit V un ensemble non vide, muni d'une opération binaire $+$ et d'une action par les nombres réels :

- pour tous $u, v \in V$, il existe un unique élément noté $u + v \in V$. la "somme" de u et v.
- pour tous $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique élément noté $\lambda \cdot v \in V$. la multiplication de v par λ

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je commence avec un ensemble non-vide et je dis que cet ensemble est muni d'une opération binaire + et d'une action par les nombres réels. Quand je dis "muni d'une opération binaire +", cela signifie que si je prends n'importe quels éléments u et v de V, il y a un unique élément que je vais noter $u + v$ qui appartient à V Donc cela serait la somme de u et v. Et quand je dis "... d'une action par les nombres réels", cela signifie que je prends un élément v de V et un nombre réel λ, et il existe un unique élément que l'on va noter $\lambda \cdot v$ qui appartient à V. C'est la multiplication de v par λ. Je ferai des remarques ensuite et je donnerai un autre nom à ceci, mais pour le moment nous avons ceci. Nous avons un ensemble dans lequel nous pouvons additionner des éléments et nous pouvons multiplier un élément par un nombre réel. Multiplier entre guillemets.

Notes

Summary

0m 38s

$V, +, \cdot$

Def. On dit que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si les axiomes suivants sont satisfaits :
Pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(1) $u + v = v + u$ (l'addition est commutative)

(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (l'addition est associative)

(3) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

(4) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

(3)–(4): distributivité

(5) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

(6) $1 \cdot u = u$

(7) il existe un élément neutre pour $+$, i.e. il existe $e \in V$ t.q. $e + u = u$ pour tout $u \in V$

(8) pour tout $u \in V$, il existe un inverse par rapport à $+$, i.e. il existe u' t.q. $u + u' = e$.

En plus de cela, donc on a notre *V* qui est muni de deux opérations : cette opération binaire et l'action des nombres réels. On va dire que *V* est un *R*-espace vectoriel donc voici la définition si toute une liste d'axiomes est satisfaite. Il y en a huit. Le premier est que l'addition est commutative. Le deuxième est que l'addition est associative. Les troisième et quatrième axiomes sont des règles de distributivité de l'addition des nombres réels, de la multiplication par les nombres réels. Ici la cinquième est encore une sorte d'associativité: on peut ou bien multiplier deux nombres réels et ensuite faire cette multiplication par un élément de *V*, ou bien l'un après l'autre. Le sixième axiome dit que si on fait la multiplication d'un élément de *V* par le nombre réel *1*, ça ne change pas. Le septième est qu'il existe un élément neutre par rapport à l'addition, c'est-à-dire qu'il existe un élément, que pour le moment j'appelle *e*, tel que *e* + *u* = *u* pour tout *u*, et le huitième axiome dit que pour chaque *u*, il y a un élément qui agit comme inverse par rapport à cette addition et cet élément neutre, c'est-à-dire qu'il y a un *u'* tel qu'en les additionnant j'obtiens l'élément neutre.

Notes

Summary

1m 42s

$V, +, \cdot$

Def. On dit que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si les axiomes suivants sont satisfaits :
Pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(1) $u + v = v + u$ (l'addition est commutative)

(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (l'addition est associative)

(3) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

(4) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

distributivité

(5) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

(6) $1 \cdot u = u$

(7) il existe un élément neutre pour $+$, i.e. il existe $e \in V$ t.q. $e + u = u$ pour tout $u \in V$

(8) pour tout $u \in V$, il existe un inverse par rapport à $+$, i.e. il existe u' t.q. $u + u' = e$.

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant il y a plusieurs questions qu'on peut se poser: est-ce que cet élément neutre, il y en a plus que un ? de même pour l'élément inverse, etc. Mais avant d'énoncer les premières propriétés, j'aimerais vous faire remarquer que nous avons déjà vu une liste d'axiomes comme celle-ci. C'était les matrices *m x n* et l'addition des matrices *m x n* et la multiplication par un nombre réel d'une matrice *m x n*. L'addition est commutative, l'addition est associative, on avait ces deux règles de distributivité, cette règle d'associativité et puis, si on multiplie une matrice par le nombre réel *1*, ça ne change pas la matrice, il existe un élément neutre, c'était la matrice nulle, c'était unique, et pour chaque matrice il existe un inverse par rapport à l'addition et l'élément neutre, la matrice nulle, il suffit de faire *-1* fois toutes les composantes de la matrice. Donc on a déjà vu un exemple de cela. Avant de faire d'autres exemples, je veux établir quelques premières propriétés qui seront utiles. Avant de procéder, je veux faire encore quelques remarques et introduire un peu de vocabulaire.

Notes

Summary

3m 17s

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Conséquences des axiomes :

(1) Si $u + v = u + w$ alors $v = w$.

(2) Il existe un unique élément neutre pour $+$, qu'on notera $\mathbf{0}$ le vecteur nul.

(3) Il existe un unique $u' \in V$ t.q. $u + u' = \mathbf{0}$, on note $u' = -u$ et appelle $-u$ l'inverse de u.

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

D' abord, on ne va pas toujours écrire ce point (·) pour la multiplication par un nombre réel, on écrit souvent λv pour $\lambda \cdot v$. On appelle cela la multiplication par scalaire. On appelle λv la multiplication de v par le scalaire λ. Les éléments de V s'appellent les vecteurs et on appelle les éléments des nombres réels les scalaires.

Notes

Summary

4m 30s

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conséquences des axiomes :

(1) Si $u + v = u + w$ alors $v = w$. (on peut annuler)

(2) Il existe un unique élément neutre pour $+$, qu'on notera $\mathbf{0}$ le vecteur nul.

(3) Il existe un unique $u' \in V$ t.q. $u + u' = \mathbf{0}$, on note $u' = -u$ et appelle $-u$ l'inverse de u.

Preuve (1) Il existe $u' \in V$ t.q. $u' + u = e$.

$$u+v = u+w$$
$$\underline{u'+u}+v = u'+u+w$$
$$e+v = e+w$$
$$v = w. \checkmark$$

(2)

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

Maintenant j'aimerais montrer des conséquences directes de ces axiomes qui seront utiles dans les calculs et dans la manipulation de ces espaces vectoriels. Les preuves ne sont pas du tout longues mais je les fais parce qu'à la fin on va remarquer qu'on a besoin de chacun des huit axiomes quelque part. Le premier c'est juste une règle d'annulation ici. On peut annuler. C'est très utile. Ici j'ai $u + v = u + w$ donc je sais que le u a un élément inverse, donc il existe un u' dans V tel que $u' + u = e$, l'élément neutre. Donc je vais jouer un petit peu avec cette égalité. J'ai $u + v = u + w$ donc maintenant j'additionne le u' des deux côtés et $u + u'$ c'est l'élément neutre et la propriété de l'élément neutre c'est que quand je l'additionne à un vecteur, ça donne le vecteur donc j'ai $v = w$. Ensuite, j'aimerais voir que cet élément neutre par rapport à l'addition est unique et dès le moment où c'est unique je vais lui donner une notation dans tous les espaces vectoriels et c'est souvent un *0* en gras. Et je vais l'appeler le vecteur nul comme on avait appelé la matrice nulle.

Notes

Summary

5m 08s

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conséquences des axiomes :

(1) Si $u + v = u + w$ alors $v = w$. (on peut annuler)

(2) Il existe un unique élément neutre pour $+$, qu'on notera $\mathbf{0}$ le vecteur nul.

(3) Il existe un unique $u' \in V$ t.q. $u + u' = \mathbf{0}$, on note $u' = -u$ et appelle $-u$ l'inverse de u.

Preuve (1) Il existe $u' \in V$ t.q. $u' + u = e$.

$u+v = u+w$

$\underbrace{u'+u}+v = u'+u+w$

$e+v = e+w$

$v = w$. ✓

(2) Supposons que il existe $e, e' \in V$ t.q. $\underset{①}{e+v=v}$ et $\underset{②}{e'+v=v}$ pour tout $v \in V$.

$e \underset{\text{par } ②}{=} e'+e = e+e' \underset{\text{par } ①}{=} e'$

(3) Supposons que $u+u' = 0 = u+u''$.

$\underline{u'} = u'+0 = u'+(u+u'') = (u'+u)+u'' = (u+u')+u'' = 0+u'' = \underline{u''}$

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Supposons qu'il existe un e et un e' dans V tels que quand je fais $e + v$ j'obtiens v et quand je fais $e' + v$ j'obtiens v et ce pour tout v. Disons que ça c'est la propriété 1 et ceci est la propriété 2. Ce que je voulais, c'était de voir que $e=e'$ Donc je commence, j'ai $e = e' + e$ par la propriété 2. Ceci est égal à $e + e'$ car l'addition est commutative. Et ceci est égal à e' par la propriété 1. Donc e est effectivement égal à e' donc il y a un seul élément neutre et on va l'appeler 0. Pour la propriété 3, c'est un peu la même manipulation, c'est que je suppose que j'ai deux éléments inverses, donc supposons que $u + u' = 0$, cet élément neutre et que c'est aussi égal à $u + u''$. Je commence avec u', ça c'est égal à $u' + 0$. Et ça c'est égal à $u' + (u + u'')$. L'addition est associative, donc c'est $(u' + u)+u''$. J'ai déjà utilisé cela là-haut. $u' + u = u + u'$ car l'addition est commutative. $u + u'=0$, donc ceci est égal à u''. Donc $u' = u''$. C'est la propriété 3. Maintenant que l'on sait que c'est unique, on va lui donner une notation et on va écrire $-u$. Vous verrez que cela a un sens.

Notes

Summary

6m 36s

(4) On a $0 \cdot u = \mathbf{0}$ et $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(5) On a $(-1) \cdot u = -u$.

(6) Si $\lambda \cdot v = \mathbf{0}$ alors $v = \mathbf{0}$ ou $\lambda = 0$.

(4) $\mathbf{0} + \cancel{0u} = 0u = (0+0)u = 0u + \cancel{0u}$ $\quad \mathbf{0} = 0u.$

(5) $(-1)\cdot u + u = (-1)u + 1\cdot u = (-1+1)u$

Nous avons encore une propriété qui est que si on multiplie n'importe quel vecteur par le scalaire *0* on obtient le vecteur nul et si on multiplie le vecteur nul par n'importe quel scalaire on obtient le vecteur nul. Je ne démontrerai que le premier car la démonstration du deuxième est similaire. Ici j'ai le vecteur nul que je mets en gras *0 + 0·u = 0·u*. C'est la propriété du vecteur nul. Le nombre réel *0* est la même chose que *0 + 0*. Ensuite je distribue, *0u + 0u* j'utilise ici une des règles de distributivité. Maintenant j'ai l'annulation. Si je fais *u + v = u + w* alors *v = w*. C'était la première propriété. Ici je vais annuler et j'obtiens que le vecteur nul est égal à *0u*. Je ne démontre pas le deuxième, je vais le laisser comme exercice. C'est un bon exercice. Le 5: ici comme je sais que l'élément inverse de *u* doit être unique il suffit de vous montrer que ceci agit comme un inverse. Je fais *(-1)·u + u*. Ça c'est *(-1)u + 1u* donc là j'utilise un des axiomes, que *u = 1·u*. Ensuite j'utilise une des règles de distributivité. Ceci est le nombre réel *0·u* et on vient de voir que ceci est le vecteur nul.

Notes

Summary

8m 52s

Exemple géométrique.

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

Donc ceci implique que *(-1)·u = -u* et c'est pour cela qu'on s'est permis d'écrire *-u* pour l'inverse. 6: ici je prétends que si la multiplication par scalaire d'un vecteur donne le vecteur nul, alors ou bien le scalaire est *0* ou bien le vecteur est le vecteur nul. C'est aussi très convenable. Ici je suppose que $\lambda \cdot v = 0$ pour un v dans V et un scalaire λ. Si$\lambda=0$ c'est bon donc je suppose aussi que λ est non-nul. Comme λ est non-nul, alors $1/\lambda$ est un nombre réel. Je vais l'utiliser. Je prends cette égalité et je multiplie à droite et à gauche par $1/\lambda$. Ça c'est le vecteur nul. Donc ceci est un scalaire fois le vecteur nul, ça donne le vecteur nul. Et si j'utilise cette règle de "regrouper", ça c'est le nombre réel *1* et ça c'était un des axiomes. Donc voilà la liste des propriétés que je voulais vous montrer. Ça vaut la peine de relire la démonstration et de voir qu'on a dû utiliser, à différents endroits, tous les axiomes. Chaque axiome a été utilisé au moins une fois et souvent plus d'une fois.

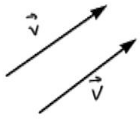
Notes

Summary

10m 30s

Exemple géométrique.

$\mathbb{R}^2$ dénote l'ensemble des segments orientés dans le plan.



$\in \mathbb{R}^2$

$\vec{v}$ est défini par sa direction et sa longueur $\|\vec{v}\|$

On définit $+$ dans $\mathbb{R}^2$:

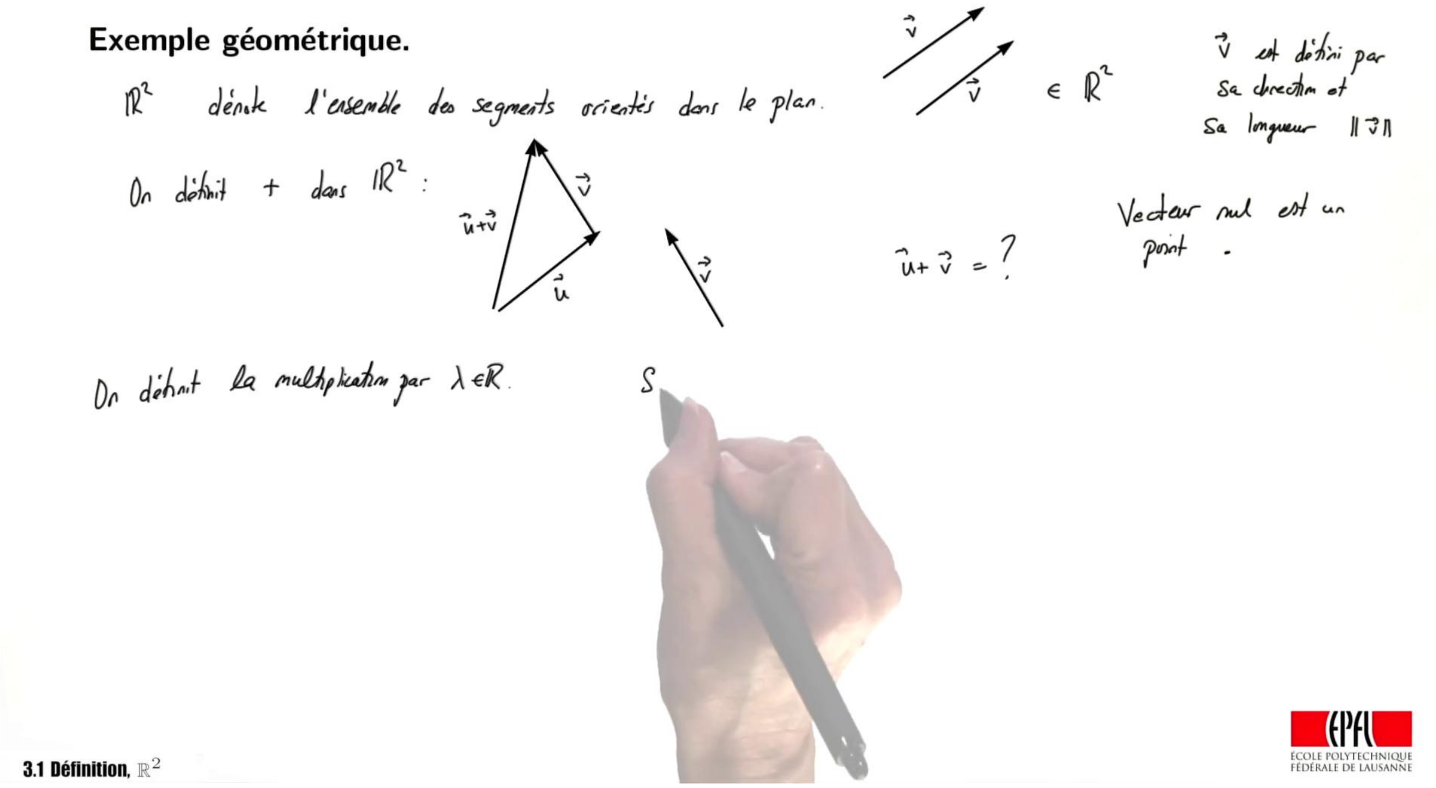
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant, voici un exemple géométrique, ce n'est pas un exemple algébrique mais un exemple géométrique. J'ai déjà un peu parlé du fait que les matrices nous servent d'exemple mais ici c'est un exemple géométrique et je crois que cela vous sera familier. Je vais définir un espace vectoriel *R²* et ce ne sera pas des points dans le plan mais l'ensemble des segments orientés. Donc *R²* dénote dans cet exemple l'ensemble des segments orientés dans le plan. Les éléments de *R²* ressemblent à ça: ceci est un segment orienté et c'est dans *R²*. Souvent, on va écrire un *v* avec une flèche dessus pour indiquer que c'est un segment orienté. Donc il a une direction donc *v* est défini par sa direction et sa longueur. On note souvent la longueur comme ceci ||v||. *Par cela, je veux dire que si je le déplace, mais que je garde la même direction et la même longueur donc si par exemple je trace une flèche ici, c'est aussi v. Il est déplacé mais c'est un segment, même direction, même longueur. Je dois définir les opérations ici. On définit le + dans R². Je dois me donner deux vecteurs dans R² donc ce sont deux segments orientés.*

Notes

Summary

12m 00s

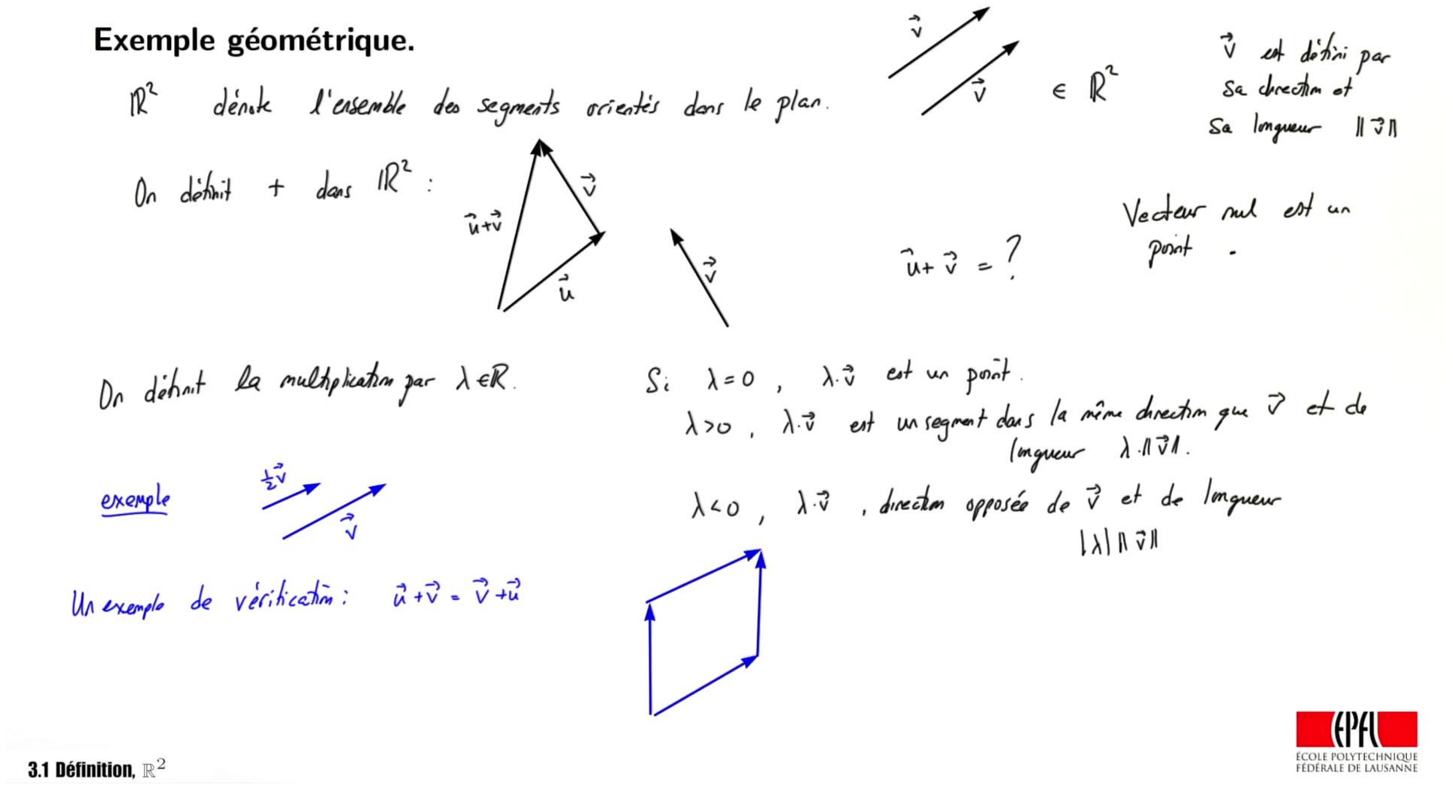


Je me donne un u et un v. Je veux définir la somme. On fait cette définition géométriquement, c'est un exemple géométrique, je prends u et je déplace le vecteur u, je mets son bout ici, donc je mets une copie de v là-haut. Donc je déplace v, je le mets juste là, même direction, même longueur, c'est aussi un segment. Pour faire la somme, je commence au début de u et je termine à la fin de v et ceci est la somme u + v. Maintenant, je dois aussi définir la multiplication par un nombre réel mais avant de faire cela j'aimerais aussi remarquer ici dans cet ensemble de vecteurs ou de segments orientés dans le plan, avec cette addition-là, quel sera l'élément neutre ? L'élément neutre sera un point. C'est un vecteur qui n'a pas de longueur. La longueur est nulle. Donc, le vecteur nul est un point. C'est un segment avec longueur 0. Donc il est clair que si vous additionnez le point à n'importe quel vecteur vous obtenez le vecteur. Pour définir la multiplication par un scalaire, il y a 3 cas. Si je prends λ = 0 (le nombre réel 0), alors λ·v, c'est juste un point, qui est le vecteur nul.

Notes

Summary

13m 36s



Si je prends λ>0 alors λ·v est un vecteur de même direction que le vecteur v, est un segment dans la même direction que le vecteur v et de longueur λ·||v||. Et si λ < 0, alors λ·v est un segment dans la direction opposée de v et de longueur... λ est un nombre négatif, donc je dois faire la valeur absolue de λ: |λ|·||v||. Par exemple, si je prends un vecteur comme ça, ça c'est le vecteur v et qu'ensuite je veux dessiner la moitié de v, ça va dans la même direction, c'est parallèle, mais de longueur égale à la moitié, donc disons que ceci est la moitié de v. Maintenant, en principe, il faudrait vérifier tous ces axiomes et il faut les vérifier géométriquement parce que la définition des opérations est une définition géométrique, donc cela serait une longue vérification. Je vais juste vous donner un exemple. Par exemple, on devrait montrer que u + v = v + u et ce n'est pas trop compliqué. Nous allons dessiner un parallélogramme. Imaginez que j'ai le parallélogramme qui est comme ceci. C'est presque un parallélogramme.

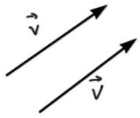
Notes

Summary

15m 10s

Exemple géométrique.

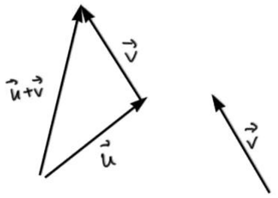
$\mathbb{R}^2$ dénote l'ensemble des segments orientés dans le plan.



$\in \mathbb{R}^2$

$\vec{v}$ est défini par sa direction et sa longueur $\|\vec{v}\|$

On définit $+$ dans $\mathbb{R}^2$:



$\vec{u}+\vec{v} = ?$

Vecteur nul est un point .

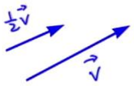
On définit la multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 0$, $\lambda \cdot \vec{v}$ est un point.

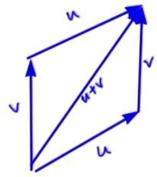
$\lambda > 0$, $\lambda \cdot \vec{v}$ est un segment dans la même direction que $\vec{v}$ et de longueur $\lambda \cdot \|\vec{v}\|$.

$\lambda < 0$, $\lambda \cdot \vec{v}$, direction opposée de $\vec{v}$ et de longueur $|\lambda| \|\vec{v}\|$

exemple



Un exemple de vérification : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$



$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (géométriques) sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

3.1 Définition, $\mathbb{R}^2$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Si je dis que ceci est u, ceci est v et j'ai une autre copie de v là et une copie de u là. Si je fais u + v j'obtiens le vecteur ici et si je fais... donc ça c'est u + v. Et si je fais v + u j'obtiens le même vecteur. Donc voilà la vérification géométrique que u + v = v + u. Enfin, je veux terminer avec une remarque. On peut définir la même chose dans R^3, en prenant l'espace de trois dimensions. On parle de segments orientés dans l'espace et on définit l'addition de ces segments et la multiplication par scalaires de ces segments exactement de la même façon. Ici, j'ai défini dans le plan pour pouvoir le dessiner mais on peut faire la même chose dans R^3 et cela fait de R^2 et R^3 des espaces vectoriel. Je n'ai pas vérifié tous les axiomes mais on peut les vérifier et cela forme un R-espace vectoriel. R^2 et R^3 (géométriques) sont des R-espaces vectoriels. Nous verrons plusieurs autres exemples où nous ferons les calculs plutôt algébriquement mais voilà un exemple géométrique.

Notes

Summary

17m 12s