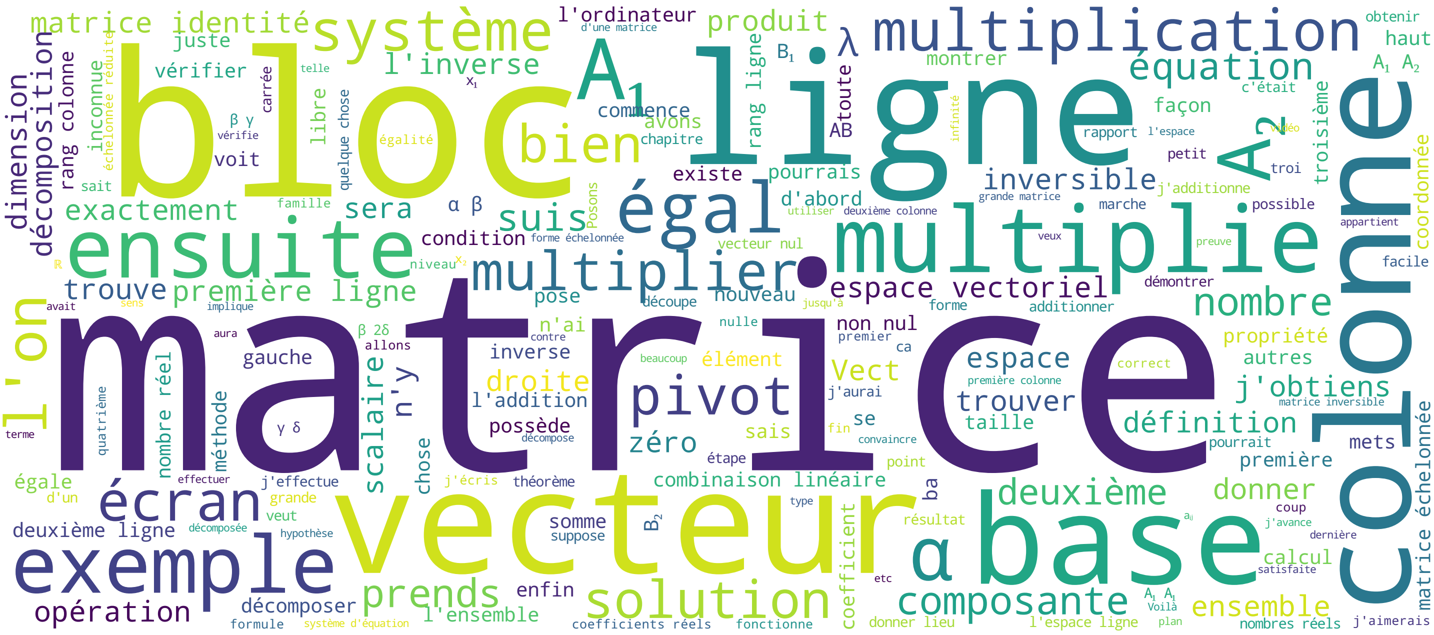
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.11 Décomposition en blocs

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Dans cette dernière vidéo du chapitre sur l'algèbre matricielle, je vais vous parler de quelque chose qui en fait est utile seulement si l'on fait des opérations sur ordinateur avec de très grandes matrices. Ce n'est pas forcément utile si on fait les opérations à la main, ou même si on fait les opérations sur l'ordinateur avec des matrices de taille raisonnables. Dès que l'on a une très grande matrice, très très grande, on pourrait même imaginer que l'ordinateur a des problèmes pour stocker toutes les composantes de la matrice. Donc on aimerait additionner cette matrice à celle-là, ou bien multiplier cette matrice par celle-là, et puis les deux matrices sont énormes et l'ordinateur ne peut même pas stocker l'information qui est dans ces matrices. Donc on va décomposer ces matrices en blocs plus petits, et puis on va stocker dans l'ordinateur ces matrices plus petites, et après on peut faire les calculs. Donc c'est purement intéressant de ce point de vue-là.

Notes

Summary

0m 04s

Soit A la matrice $m \times n$ donnée par

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1i_1} & a_{1,i_1+1} & \cdots & a_{1i_2} & a_{1,i_2+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j_11} & \cdots & a_{j_1i_1} & a_{j_1,i_1+1} & \cdots & a_{j_1i_2} & a_{j_1,i_2+1} & \cdots & a_{j_1n} \\
\hline
a_{j_1+1,1} & \cdots & a_{j_1+1,i_1} & a_{j_1+1,i_1+1} & \cdots & a_{j_1+1,i_2} & a_{j_1+1,i_2+1} & \cdots & a_{j_1+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j_21} & \cdots & a_{j_2i_1} & a_{j_2,i_1+1} & \cdots & a_{j_2i_2} & a_{j_2,i_2+1} & \cdots & a_{j_2n} \\
\hline
a_{j_2+1,1} & \cdots & a_{j_2+1,i_1} & a_{j_2+1,i_1+1} & \cdots & a_{j_2+1,i_2} & a_{j_2+1,i_2+1} & \cdots & a_{j_2+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mi_1} & a_{m,i_1+1} & \cdots & a_{mi_2} & a_{m,i_2+1} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2.11 Décomposition en blocs

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

J'imagine que j'ai une très grande matrice, comme ça. On peut la décomposer en blocs. Il n'y a pas qu'une façon de faire, il y a beaucoup de façons de faire donc par exemple ici je pourrais tracer, quand je dis "décomposer en blocs" c'est que je vais tracer des lignes horizontales, comme ça, et des lignes verticales, donc là, et ici de nouveau, comme ça, donc je décompose la matrice en blocs. Et ensuite, je vais nommer ces blocs. J'imagine que ceci est un bloc : A = (une matrice décomposée en blocs) et je vais appeler ce bloc-là $A_{1,1}$, ce bloc-là $A_{1,2}$, de la même manière que l'on nomme les composantes mais ici ce sont les blocs. ici, j'ai une deuxième ligne de blocs donc $A_{2,1}$, etc. Donc a une matrice qui est décomposée en blocs. Après, on veut savoir si l'on peut opérer : additionner, multiplier par les scalaires ou bien même multiplier les matrices dès qu'elles sont décomposées en blocs. Donc pour illustrer cela, je vais donner un exemple.

Notes

Summary

1m 05s

Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices $m \times n$. Si A et B sont décomposées en matrices par blocs de la même façon, on peut additionner A et B par blocs.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ x & y & z & t \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ x & y & z & w & t \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ \hline x & y & z & w & t \end{array}\right)$$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

etc

2.11 Décomposition en blocs

Donc je commence par cet exemple-ci : je vais décomposer en blocs cette matrice. Par exemple, je pourrais la décomposer comme ça : une ligne verticale et une ligne horizontale et cela donne une matrice décomposée en blocs : $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, donc on voit exactement de quoi je parle pour chaque bloc. Donc ça c'était une façon de faire, je pourrais aussi la décomposer comme ceci, je pourrais aussi la décomposer comme cela. Il n'y a aucune raison de préférer une décomposition par rapport à une autre. Ici dans l'exemple, $A_{1,1}$ sera la matrice *(1 α 0)*, $A_{1,2}$ sera cette grande matrice-là, etc. Voilà une décomposition en blocs.

Notes

Summary

2m 19s

Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices $m \times n$. Si A et B sont décomposées en matrices par blocs de la même façon, on peut additionner A et B par blocs.

Exemple.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ x & y & z & t \\ \hline 8 & 7 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant, nous allons faire une décomposition en blocs et voir ce que l'on peut faire au niveau des opérations de l'algèbre matricielle. Ici, j'ai deux matrices de même taille donc on peut les additionner. Je vais faire une décomposition en blocs de la même façon pour les deux matrices. Donc ici, je décompose la matrice *A*, puis je décompose la matrice *B* de même façon. Donc *A* est égal à une matrice en blocs : $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$ et le B a des blocs $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$. Je décris ici quelques-uns de ces blocs : $A_{1,1}$=*(1 2) (α β)*, $A_{1,2}$=*(3 4) (γ δ)* $A_{2,1}$ c'est la matrice *(5 6)*, et $A_{2,2}$ c'est la matrice *(7 8)*. Je fais la même chose avec la matrice B. Il est assez clair que si l'on veut additionner ces matrices *A + B*, on additionne les blocs correspondants. Donc ici le bloc $A_{1,1}+B_{1,1}$, ici j'aurai le bloc $A_{1,2}+B_{1,2}$, ici $A_{2,1}+B_{2,1}$ et enfin $A_{2,2}+B_{2,2}$. Je n'ai pas besoin de démontrer cela, il est absolument clair que l'addition de ces matrices peut se faire bloc par bloc. C'est pareil si j'utilise un nombre réel.

Notes

Summary

3m 20s

Soient $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices admettant des décompositions par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mp} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pn} \end{pmatrix}$$

telles que le nombre de colonnes de chaque bloc A_{ik} soit égal au nombre de lignes de chaque bloc B_{kj}. Alors on peut multiplier A et B par blocs.

Si je fais λA, je pourrais très bien effectuer la multiplication par blocs, donc λ fois le premier blocs, λ fois le deuxième, etc. La raison de faire comme cela : imaginons qu'A et B sont très grandes et l'on ne pourrait pas stocker toutes leurs composantes dans l'ordinateur, on pourrait peut-être stocker les composantes de chacun des blocs.

Notes

Summary

5m 19s

Soient $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices admettant des décompositions par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mp} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pn} \end{pmatrix}$$

telles que le nombre de colonnes de chaque bloc A_{ik} soit égal au nombre de lignes de chaque bloc B_{kj}. Alors on peut multiplier A et B par blocs.

2.11 Décomposition en blocs

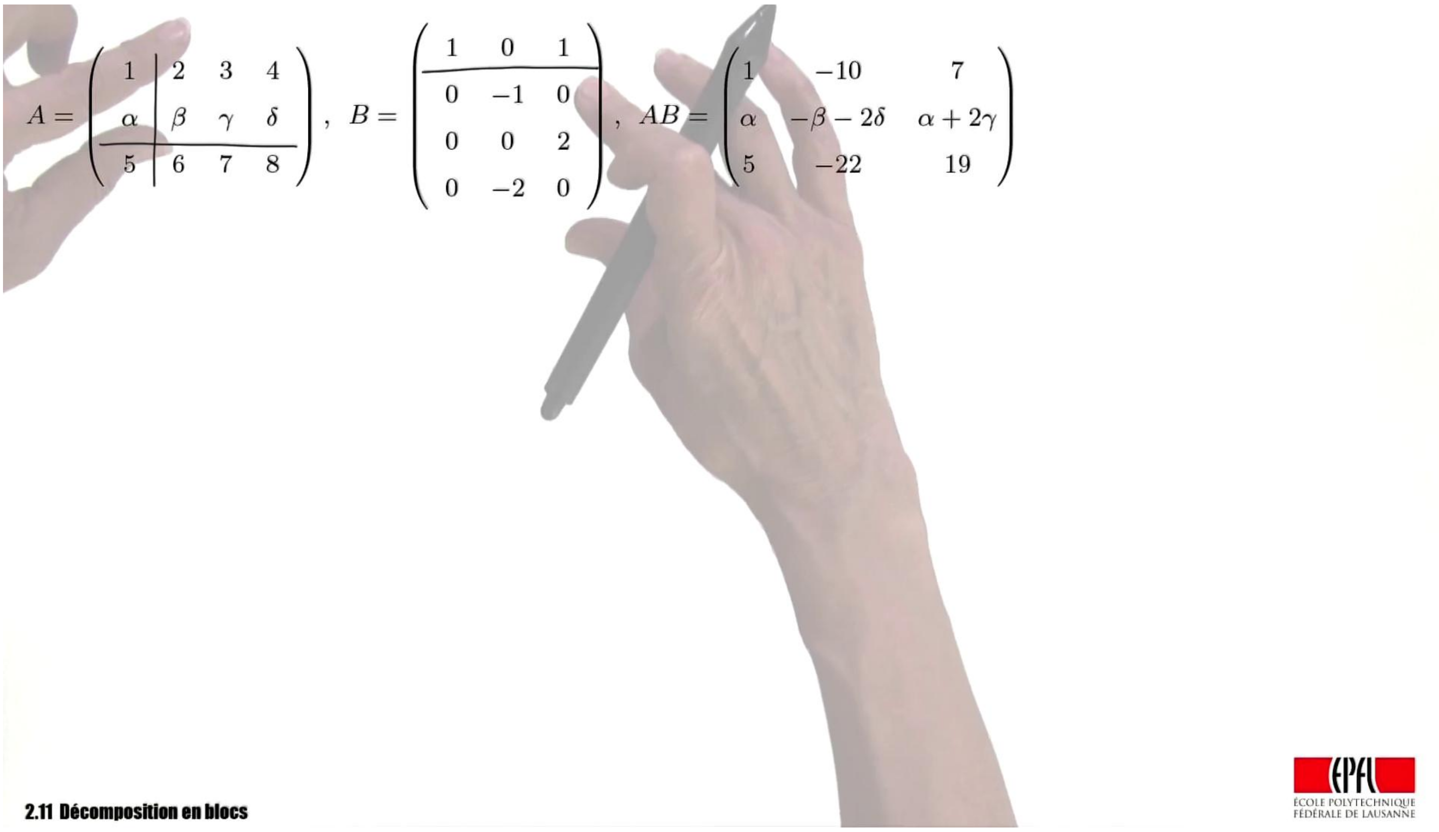
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant, au niveau de la multiplication, on suppose que l'on a deux matrices, qu'on a découpées en blocs, mais pour pouvoir effectuer la multiplication de ces deux matrices, il y a des contraintes au niveau des blocs Une première contrainte : je dois avoir le même nombre de blocs dans cette première ligne que dans cette première colonne. C'est pour cela qu'il y a un *p* là et un *p* là. C'est une première contrainte. Deuxième contrainte : quand je veux multiplier cette matrice-ci par celle-là, il faut que le nombre de colonnes de cette matrice soit le même que le nombre de lignes de cette matrice. Et si j'avance ici dans la procédure, il faut que le nombre de colonnes de la deuxième matrice soit le même que le nombre de lignes ici. C'est la deuxième contrainte qui est écrite ici : le nombre de colonnes de chaque bloc A_{ik} soit égal au nombre de lignes de chaque bloc B_{kj}. Si je fixe une ligne *i* et une colonne *j*, cette condition doit être satisfaite. Maintenant je vais donner un exemple.

Notes

Summary

5m 46s

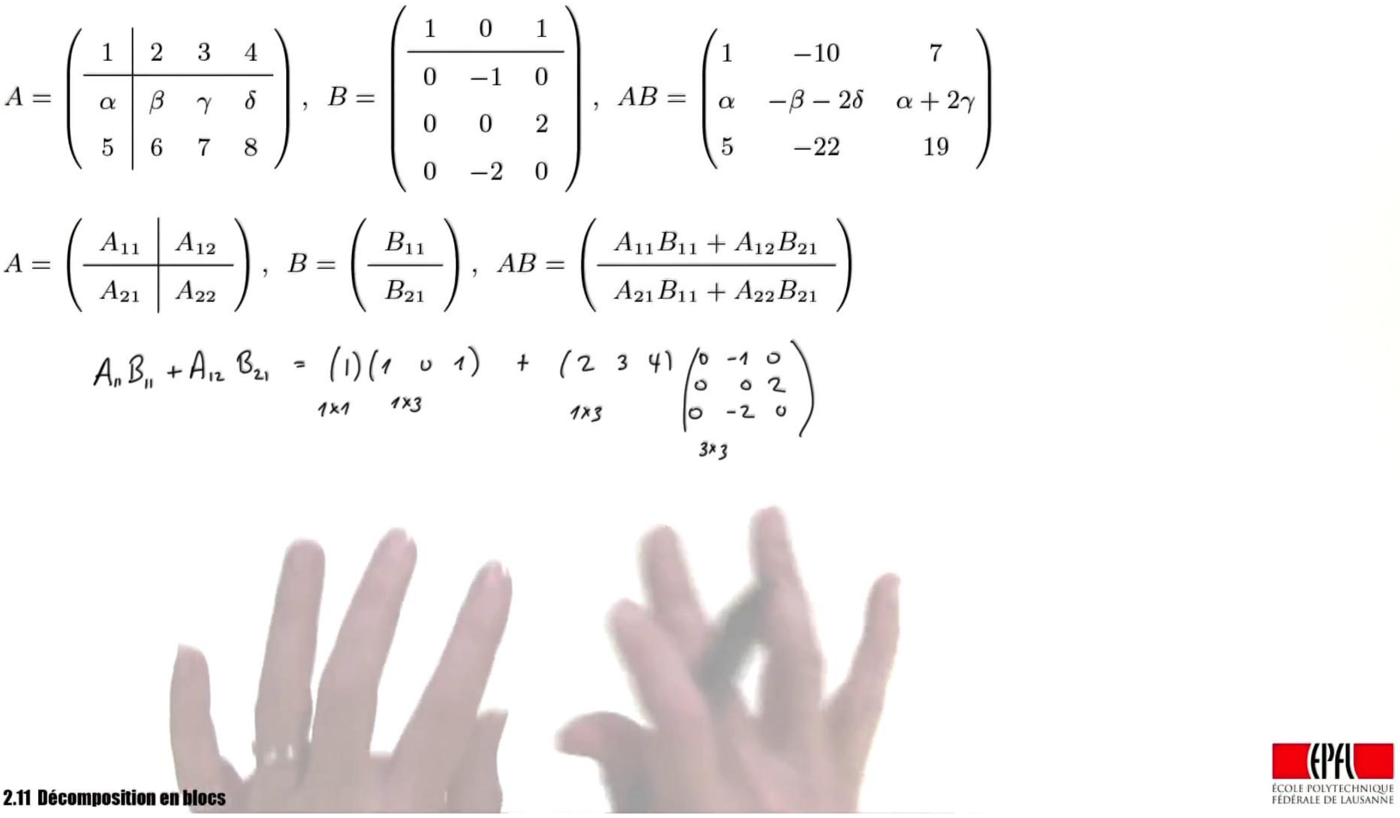


J'ai deux matrices : *A* et *B*. Nous savons déjà comme effectuer le produit de ces matrices; ici, l'intérêt est de vous montrer comment faire la décomposition en blocs et obtenir le produit selon cette méthode. Ici, j'ai déjà effectué la multiplication. Une première décomposition en blocs de cette matrice... bon, je vais donner deux exemples différents. Ici pour *A* je découpe comme ceci, et pour *B* je découpe comme cela. Déjà, nous allons vérifier si la contrainte que j'ai donnée précédemment est satisfaite : ici, j'ai deux blocs et là, j'ai deux blocs donc ça va. Maintenant, quand j'effectue la multiplication, est-ce que j'ai le droit de multiplier ceci par ce premier bloc ? Ceci est une matrice qui est *2 x 1* et cela est une matrice qui est *1 x* quelque chose donc c'est possible. Ici j'ai une colonne et j'ai une ligne, donc c'est possible. Quand j'avance, dans cette ligne-ci, j'ai une matrice qui est une matrice *2 x 3*, et ici, je peux la multiplier par une matrice *3 x 3*. C'est exactement cela la condition que l'on doit vérifier.

Notes

Summary

7m 02s

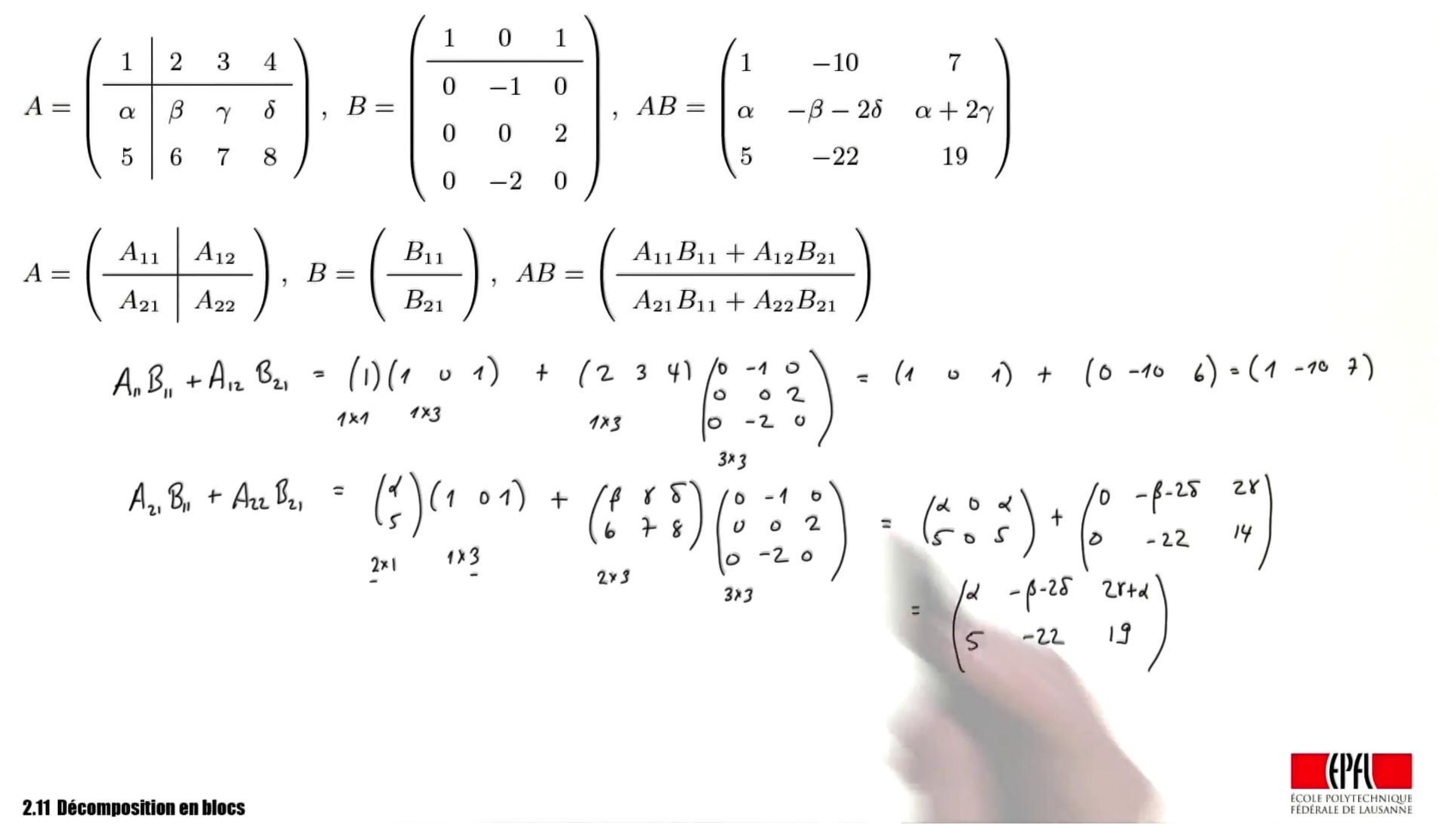


J'ai ici le découpage des matrices, après je nomme les blocs : ça c'est $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$ Ça c'est le découpage ici : $B_{1,1}$ et $B_{2,1}$ Ensuite, pour multiplier, on fait exactement ce que l'on ferait si ce n'était que des nombres. Donc ici, je suis la première ligne du bloc et la première colonne du bloc $A_{1,1}B_{1,1}+A_{1,2}B_{2,1}$ que j'écris ici. Et ici j'ai $A_{2,1}B_{1,1}+A_{2,2}B_{2,1}$ que j'écris ici. On fait exactement comme la multiplication de matrices mais maintenant c'est par blocs, mais ce qui est étonnant c'est que ça marche. Donc on va vérifier que ça marche. J'effectue le calcul donc $A_{1,1}B_{1,1}+A_{1,2}B_{2,1}=$... Donc le $A_{1,1}$ c'est ce petit *(1)*, c'est une toute petite matrice. Le $B_{1,1}$, c'est cette matrice-là. Le $A_{1,2}$, c'est cette matrice-ci, donc je suis la ligne du bloc, et le $B_{2,1}$, c'est cette matrice-là. Ici, c'est une matrice *1 x 1*. Et ici, c'est une matrice *1 x 3*. Donc ça va donner lieu à une matrice *1 x 3*. Ici c'est une matrice *1 x 3*, ici c'est une matrice *3 x 3*, qui va aussi donner lieu à une matrice *1 x 3*. L'équation semble un peu bizarre, mais cela va fonctionner.

Notes

Summary

8m 17s



Donc enfin, quand je multiplie, cela donne *(1 0 1)* + et ici quand je multiplie cela va donner *(0 -10 6)* donc à la fin j'ai *(1 -10 7)* Ça c'est ce que je dois inscrire en haut dans la matrice et c'est effectivement correct. Maintenant, la deuxième opération : $A_{2,1}B_{1,1}+A_{2,2}B_{2,1}$ Donc je prends le $A_{2,1}$ qui est ici et puis le $B_{1,1}$ qui est là en haut, ensuite $A_{2,2}$ qui est ce bloc-ci et $B_{2,1}$ qui est ce grand bloc-là. De nouveau on va vérifier les tailles des matrices, ici c'est une matrice *2 x 1* qui multiplie une matrice *1 x 3*, donc cela va donner lieu à une matrice *2 x 3*. Ici c'est une matrice *2 x 3* qui multiplie une matrice *3 x 3*, ce qui va aussi donner lieu à une matrice *2 x 3*. On peut les additionner. Donc j'effectue la multiplication. Ici, je suis la première ligne, donc cela va donner *(α 0 α)* et ensuite *(5 0 5)* + ici cela donne *(0 -β-δ 2γ)* et ici *(0 -22 14)*. Maintenant je les additionne et cela donne *(α -β-2δ 2γ+α) (5 - 22 19)*. Donc si je reprends cette formule-là, *AB* devrait être ma matrice en blocs, où on haut je mets ceci comme bloc, et en bas je mets cela comme bloc, puis on compare...

Notes

Summary

9m 48s

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ \alpha & -\beta-2\delta & \alpha+2\gamma \\ 5 & -22 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \end{array}\right), \quad AB = \left(\begin{array}{c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{array}\right)$$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \underset{1\times 1}{(1)}\underset{1\times 3}{(1 \;\; 0 \;\; 1)} + \underset{1\times 3}{(2 \;\; 3 \;\; 4)}\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}} = (1 \;\; 0 \;\; 1) + (0 \;\; -10 \;\; 6) = (1 \;\; -10 \;\; 7)$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \underset{\underline{2}\times 1}{\begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}}\underset{1\times \underline{3}}{(1 \;\; 0 \;\; 1)} + \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}}\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta-2\delta & 2\gamma \\ 0 & -22 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta-2\delta & 2\gamma+\alpha \\ 5 & -22 & 19 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ \alpha & -\beta-2\delta & 2\gamma+\alpha \\ 5 & -22 & 19 \end{pmatrix} \checkmark$$

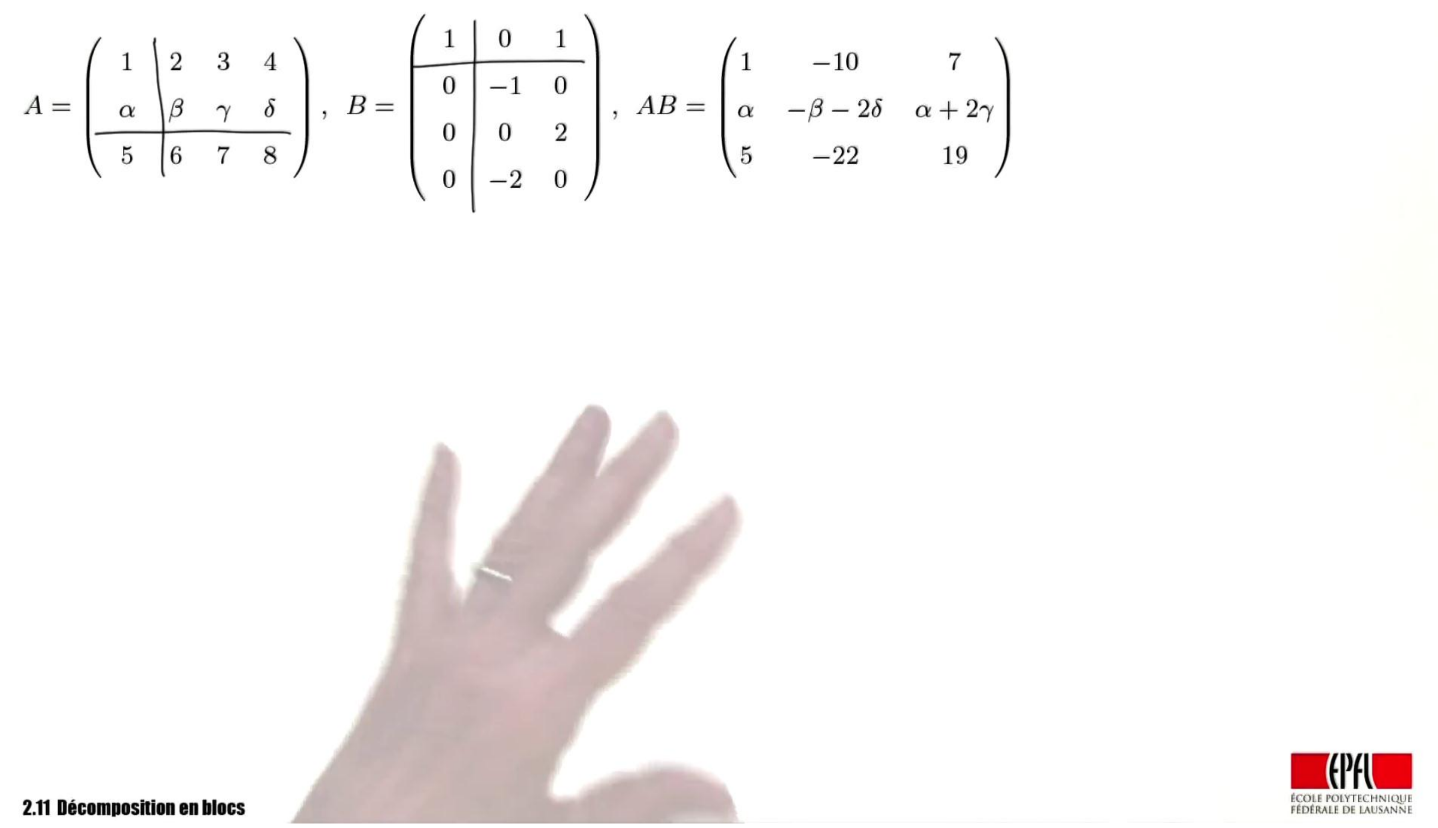
2.11 Décomposition en blocs

Oui, tout fonctionne. Il est assez étonnant que cela fonctionne si bien. Maintenant j'aimerais illustrer d'autres découpages possibles. Ce dernier n'était pas un découpage particulièrement intéressant.

Notes

Summary

12m 18s



J'aimerais profiter du fait qu'il y a des zéros là, donc je vais effectuer un autre découpage, j'irai plus vite cette fois, seulement pour illustrer. Donc cette fois, je découpe la matrice, je veux profiter de ces zéros-là donc je découpe la matrice ici, et ici je vais découper comme cela. On vérifie que cela a un sens, donc quand je suis la ligne du bloc j'en ai deux, quand je suis la colonne du bloc j'en ai deux donc ça marche. J'ai un bloc là, un bloc là, deux fois. Ensuite, je dois m'assurer que je peux multiplier ça, donc c'est une matrice qui est *2 x 1* qui multiplie une matrice *1 x 1*, c'est possible. Ceci est une matrice *2 x 1* qui multiplie une matrice *1 x 2*, c'est bon. Quand j'avance dans la ligne du bloc ici, ça c'est *2 x 3*, *3 x 1*, *2 x 3*, *3 x 2*, c'est correct. Donc on vérifie que ça marche et que tout est bien défini. Cette fois je ne nommerai pas les blocs A_{ij} et B_{ij}, j'aimerais illustrer que l'on n'a pas vraiment besoin d'écrire tout cela parce que l'on peut faire ce qui est le plus naturel pour obtenir le résultat et ensuite nous comparerons avec la manière d'obtenir le produit comme on fait traditionnellement.

Notes

Summary

12m 29s

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right),\quad AB=\begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ \alpha & -\beta-2\delta & \alpha+2\gamma \\ 5 & -22 & 19 \end{pmatrix}$$

$$AB:\quad \begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}(1)+\begin{pmatrix}2&3&4\\ \beta&\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&4\\ \beta&\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10&6\\-\beta-2\delta&2\gamma\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-10&7\\-\beta-2\delta&\alpha+2\gamma\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ \alpha & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2.11 Décomposition en blocs

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc *AB*, donc je suis ici, je dois multiplier ce bloc-là *(1 α)* par ce tout petit bloc *(1)* ensuite *(2 3 4) (β γ δ)* donc je suis la colonne, fois ce bloc de zéros. Maintenant vous voyez l'avantage de découper comme cela, c'est que je profite du fait que j'ai des zéros donc il n'y a pas de calcul, donc du coup je n'ai que *(1 α)*. Et ça c'est le bloc qui sera effectivement juste là dans la matrice. Donc j'inscris cela dans la première partie de la matrice. Ensuite, je dois faire ça fois la deuxième colonne du bloc donc j'ai *(1 α)* qui multiplie *(0 1)* + *(2 3 4) (β γ δ)* qui multiplie cette matrice. Donc je suis la ligne du bloc et la colonne du bloc. Donc ici cela va donner une matrice *2 x 2* et cette matrice elle est... Donc je suis, j'ai *(0 1) (0 α)* et je dois additionner cela. Ici je multiplie, donc j'ai *(-10 6) (-β-2δ 2γ)*. Donc j'additionne cela. J'obtiens *(-10 7)* et *(-β-2δ α+2γ)*. Comme c'était la première ligne du bloc et la deuxième colonne du bloc, je vais l'inscrire ici ce bloc, donc j'ai *(-10 7) (-β-2δ α+2γ)*.

Notes

Summary

13m 46s

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 2 & 3 & 4\\ \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \hline 5 & 6 & 7 & 8\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 1\\ \hline 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0\end{array}\right),\quad AB=\begin{pmatrix}1 & -10 & 7\\ \alpha & -\beta-2\delta & \alpha+2\gamma\\ 5 & -22 & 19\end{pmatrix}$$

$$AB:\quad \begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}(1)+\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ \beta & \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ \beta & \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & 6\\ -\beta-2\delta & 2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 7\\ -\beta-2\delta & \alpha+2\gamma\end{pmatrix}$$

$$(5)(1)+\begin{pmatrix}6 & 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=5$$

$$(5)\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-22 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22 & 19\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -10 & 7\\ \alpha & -\beta-2\delta & \alpha+2\gamma\\ 5 & -22 & 19\end{pmatrix}\ \checkmark$$

2.11 Décomposition en blocs

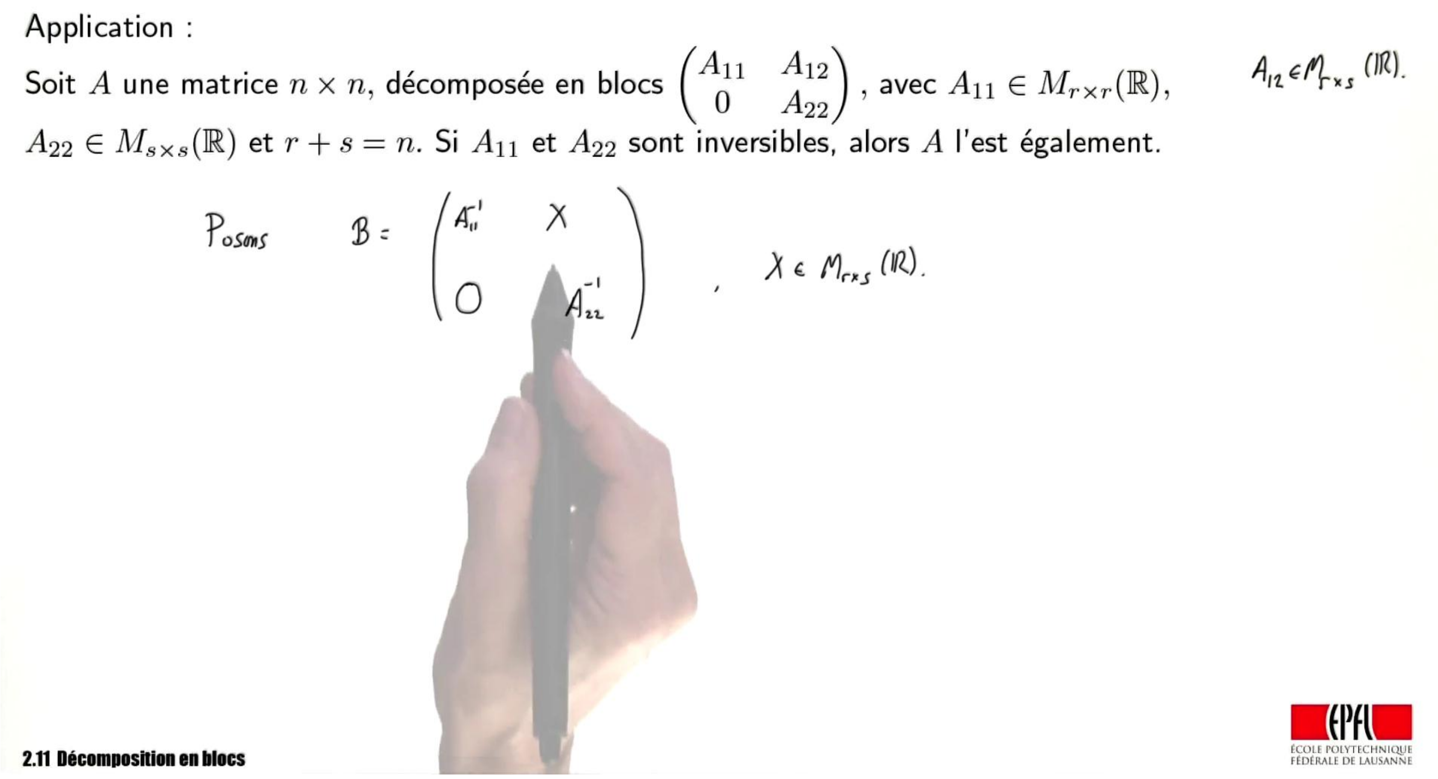
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant je recommence avec la deuxième ligne du bloc, donc j'ai *(5)* qui multiplie *(1)* + *(6 7 8)* qui multiplie la matrice de zéros, c'est facile donc cela donne *(5)*, et ça c'est un petit bloc qui va là, et enfin pour terminer je dois faire cela fois cela, donc j'ai *(5)* qui multiplie *(0 1)* additionné à *(6 7 8)* qui multiplie ce bloc-là. Cela donne *(0 5)* + ici j'ai *(-22 14)*, donc cela donne *(- 22 19)*, ce que j'inscris ici et c'est effectivement la même matrice, donc c'est correct. Donc comme je l'ai dit, je trouve assez étonnant qu'on puisse découper de plusieurs façons et obtenir le bon résultat.

Notes

Summary

15m 43s



Il reste une dernière application à cela, puis cela conclura ce chapitre. Je vais utiliser une matrice carrée qui est décomposée en blocs et je mets une hypothèse sur cette matrice. Je suppose que je sais que $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ sont des matrices inversibles. Ces deux matrices sont carrées, donc je peux parler d'inversibles. Par contre cette matrice-ci n'est pas forcément carrée, alors je vais noter ici que $A_{1,2}$ est une matrice qui a r lignes et s colonnes, donc pas carrée. Mais ces deux-là sont carrées et je suppose qu'elles sont inversibles. Alors je vais vous convaincre que cela fait de cette matrice-ci une matrice inversible et je vous donnerai une formule pour trouver son inverse. Je ne sais pas exactement comment est l'inverse donc je fais une hypothèse ici Posons B une matrice comme ça, je mets ici l'inverse de $A_{1,1}$ et ici l'inverse de $A_{2,2}$, et j'ai bon espoir que la matrice qui va fonctionner comme inverse a aussi un bloc de zéros là. Ici je ne sais pas quoi mettre donc je mets X. X est une sorte d'inconnue. X sera, comme là-haut une matrice r x s. J'aimerais trouver X; celle-ci est l'inverse de cette matrice-là.

Notes

Summary

16m 47s

Application :

Soit A une matrice $n \times n$, décomposée en blocs $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, avec $A_{11} \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$, $A_{12} \in M_{r\times s}(\mathbb{R})$. $A_{22} \in M_{s\times s}(\mathbb{R})$ et $r+s=n$. Si A_{11} et A_{22} sont inversibles, alors A l'est également.

Posons $B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & X \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$, $X \in M_{r\times s}(\mathbb{R})$.

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & X \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} + 0 & A_{11}X + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} \end{pmatrix} =$$

2.11 Décomposition en blocs

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc je fais AB, qui est la matrice en blocs $(\ A_{1,1}\ A_{1,2}\ )\ (\ 0\ A_{2,2}\ )$ qui multiplie la matrice B, et quand j'effectue cette multiplication, d'abord nous allons vérifier que l'on peut vraiment le faire par blocs: déjà elle est découpée en blocs de telle sorte qu'ici dans la ligne j'ai 2 blocs et dans la colonne j'ai 2 blocs donc c'est correct. Ensuite, est-ce que je peux réellement effectuer la multiplication de cette matrice par celle-là ? Donc celle-ci est une matrice $r \times r$ et celle-là aussi donc on peut les multiplier. Celle-ci est une matrice $r \times s$ qui multiplie cette matrice-là et cela est correct aussi. Puis celle-ci est $r \times r$ qui multiplie $r \times s$, ça va. Et ici c'est $r \times s$ qui multiplie $s \times s$, tout fonctionne donc on peut trouver les produits de ces matrices. Ici, je trouve ça fois ça, donc $A_{1,1}{\cdot}A_{1,1}^{-1} + 0$, ici je trouve $A_{1,1}{\cdot}X + A_{1,2}{\cdot}A_{2,2}^{-1}$, ensuite la deuxième ligne, j'obtiens 0 et ensuite $A_{2,2}{\cdot}A_{2,2}^{-1}$. Donc celle-ci est égale à la matrice identité $r \times r$, 0, la matrice identité $s \times s$, et puis cette matrice-là.

Notes

Summary

18m 22s

Application :

Soit A une matrice $n \times n$, décomposée en blocs $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, avec $A_{11} \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$, $A_{12} \in M_{r\times s}(\mathbb{R})$. $A_{22} \in M_{s\times s}(\mathbb{R})$ et $r+s=n$. Si A_{11} et A_{22} sont inversibles, alors A l'est également.

Posons $B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & X \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$, $X \in M_{r\times s}(\mathbb{R})$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & X \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} + 0 & A_{11}X + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & A_{11}X + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = I_n$$

$A_{11}X + A_{12}A_{22}^{-1} = 0$; $A_{11}^{-1}\left(A_{11}X = -A_{12}A_{22}^{-1}\right)$

$$\boxed{X = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}}$$

2.11 Décomposition en blocs

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant pour que ceci soit égal à la matrice identité *n x n*, il faut que cette matrice-là soit *0*. Donc j'aimerais trouver *X* pour que cela donne *0*. J'ai $A_{1,1}\cdot X + A_{1,2}\cdot A_{2,2}^{-1}=0$. Donc je passe ça de l'autre côté, j'ai $A_{1,1}\cdot X = -A_{1,2}\cdot A_{2,2}^{-1}$, et comme $A_{1,1}$ est une matrice inversible, je peux multiplier par son inverse à gauche, et je trouve que $A_{1,1}\cdot X = -A_{1,1}^{-1}\cdot A_{1,2}\cdot A_{2,2}^{-1}$. Donc posons *X* égal à cette matrice, je trouve que *AB=I* donc, on a une formule ici : $A^{-1}=$ on pose ici $A_{1,1}^{-1}$, donc l'inverse de ce bloc, $A_{2,2}^{-1}$ l'inverse de ce bloc, *0* ici, et là, dans ce coin, j'inscris la matrice $-A_{1,1}^{-1}\cdot A_{1,2}\cdot A_{2,2}^{-1}$ Donc on a trouvé l'inverse de la matrice et on a démontré que cette matrice *A* est inversible. Donc ceci est la fin du chapitre 2, dans lequel nous avons développé une algèbre matricielle et nous allons poursuivre dans le prochain chapitre avec le véritable objet de cette étude, qui sont les espaces vectoriels.

Notes

Summary

20m 10s