ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.10 Décomposition LU (applications aux systèmes linéaires)

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman

Search MOOC

Video

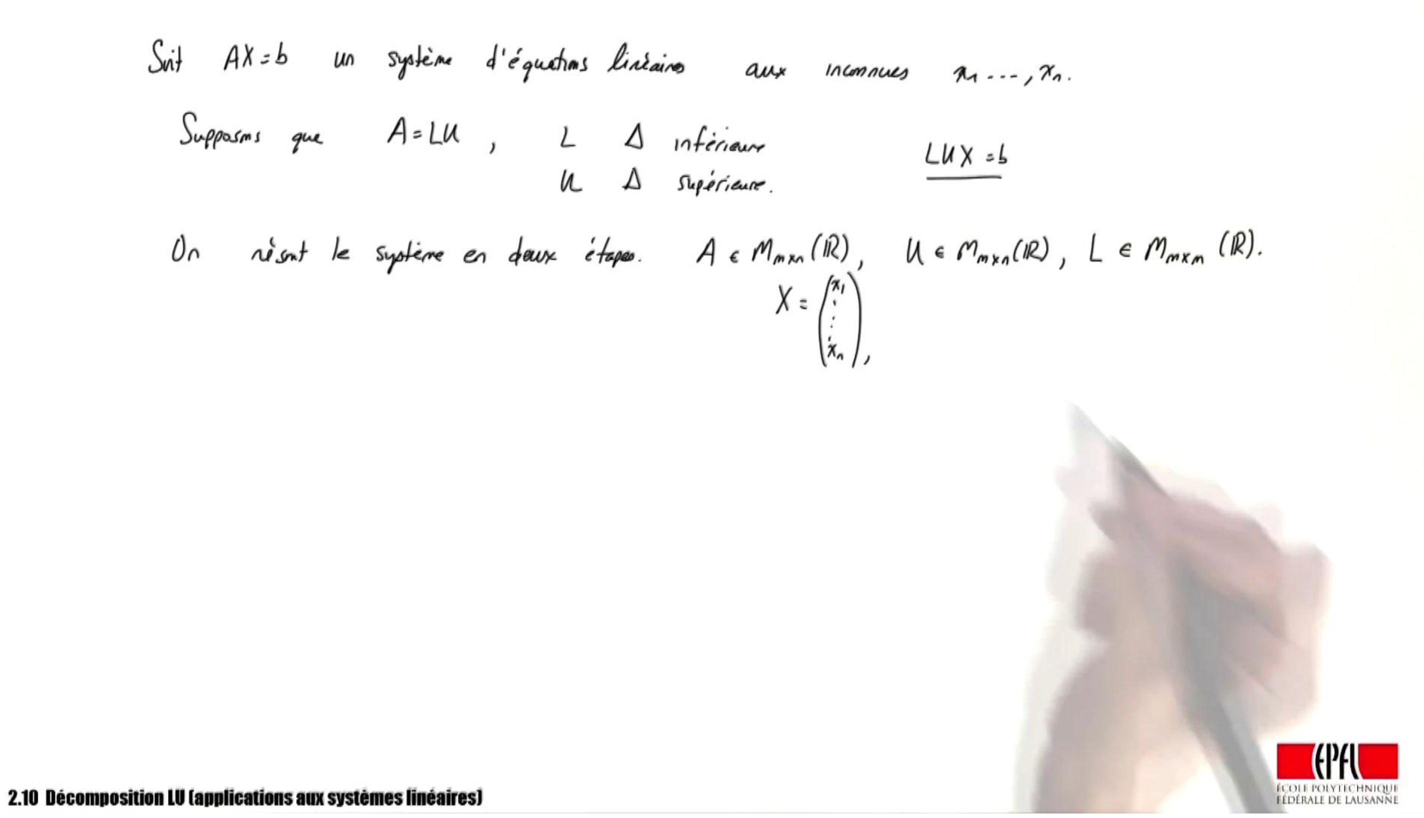
EPFL

Nous continuons avec la décomposition LU. Nous avons vu, dans la première vidéo, qu'une telle décomposition existe. Dans la deuxième vidéo, nous avons vu comment trouver cette décomposition. Dans cette troisième vidéo, j'aimerais vous montrer une application, parce que pour le moment, on ne voit pas à quoi sert cette décomposition LU, mais ça aura une bonne application au niveau de la résolution des systèmes d'équations.

Notes

Summary

0m 04s



Alors, je pose un système, soit $AX = b$, un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1,...,x_n$. Alors, supposons qu'on puisse faire cette décomposition LU, je vous rappelle qu'il y avait des conditions dans la procédure d'échelonnage, alors supposons que A soit égal à LU, où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure, et puis on souhaite résoudre le système $LU\ X = b$. Donc, pour faire ça, on va résoudre ce système en deux étapes. Et ceci, en faisant une substitution, on va introduire de nouvelles variables. Avant de faire ça, j'aimerais juste poser bien toutes les matrices ici. Donc A est une matrice m x n, il y a domc m équations et n inconnues. La matrice U est juste une forme échelonnée de la matrice A donc elles sont de même taille. Comme on doit pouvoir effectuer la multiplication $L{\cdot}U$ et que c'est un produit de matrices carrées, la matrice L est une matrice carrée, ainsi L est une matrice m x m. Le X est une colonne de variables, les inconnues. Et puis le b est la colonne des constantes.

Notes

Summary

0m 30s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et considérons le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle (voir vidéo 2.9) que $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

Il y a m équations, donc il y a m constantes, donc b est une matrice m x 1 à coefficients dans R. Maintenant, je fais la substitution suivante : posons $Y = UX$. Donc Y, ça va être la colonne des nouvelles variables, appelons y_1,...,y_m, ces nouvelles variables. Je vais juste voir pourquoi c'est m, ici le U est une matrice m x n, le X est une matrice n x 1, donc le résultat c'est une matrice m x 1. Effectuons maintenant les deux étapes. On commence par résoudre un nouveau système : $LY = b$, parce que si $UX=Y$, je substitue ici $LU X$, donc j'ai $LY = b$. Et ensuite, quand j'aurai résolu cette première étape, j'aurai le Y. Ensuite, on résout $UX = Y$, parce qu'à ce moment-là, le Y ne sera plus des inconnues mais on aura trouvé la valeur de Y.

Notes

Summary

1m 53s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et considérons le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle (voir vidéo 2.9) que $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

(1) On résout $LY = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.10 Décomposition LU (applications aux systèmes linéaires)

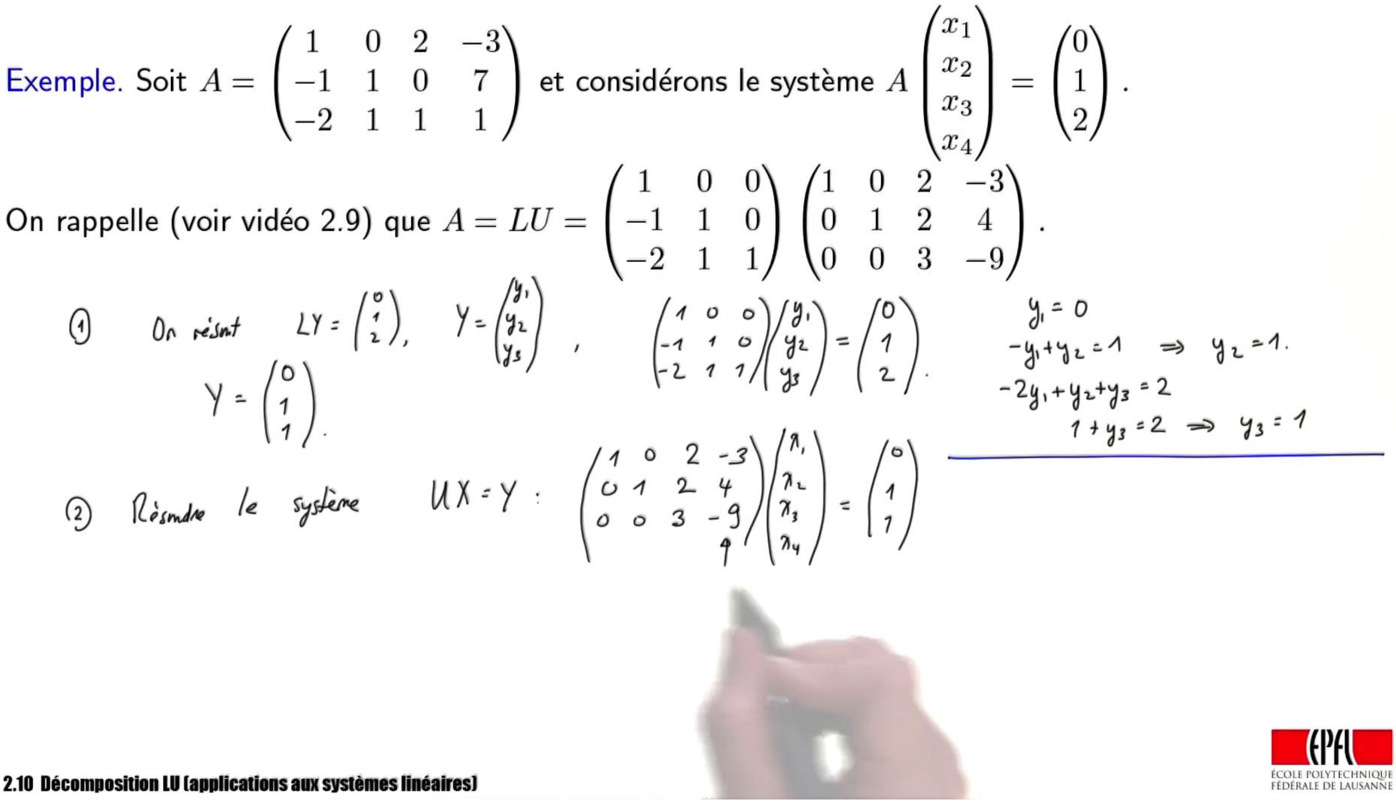
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Faisons un exemple. Je reprends la matrice de la vidéo précédente, où nous avons déjà trouvé la décomposition LU, donc voilà la matrice qu'on avait. Comme système d'équations, il y aura quatre inconnues, donc j'ai A fois la colonne des inconnues égal à b, c'est le système d'équations. Et puis, nous avons déjà trouvé la décomposition LU (c'est la décomposition de la vidéo précédente). Et puis maintenant, je fais exactement ce que j'ai dit avant : les deux étapes. Étape numéro un, c'était que, d'abord, on résout le système $LY = b$, le Y, c'était trois variables, parce que c'est le nombre de variables de la taille de la matrice L. (description du système) [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] Maintenant, enfin, ça devient très clair pourquoi ces deux étapes sont plus simples que de faire uniquement une étape. Ici, le fait qu'on ait une matrice triangulaire fait que résoudre le système à ce moment-là, c'est très simple. En plus, la matrice L est inversible, donc on sait qu'il y a une solution unique, on va la trouver. Ce n'est pas question de «peut-être il n'existe aucune solution», il y a une solution.

Notes

Summary

2m 55s



Ici, je peux juste commencer en haut au lieu d'en bas, faire la procédure de substitution et je trouverai la solution. La première ligne de cette matrice me dit que $y_1=0$. La deuxième ligne dit que $-y_1 + y_2 = 1$. Comme $y_1 = 0$, cela implique que $y_2 = 1$. Et puis, la troisième ligne dit que $-2y_1 + y_2 + y_3 = 2$. Comme $y_1 = 0$ et que $y_2 = 1$, on obtient ici $1 + y_3 = 2$, et donc on a $y_3 = 1$. Donc j'ai effectivement résolu le système de la première étape, le Y est maintenant égal à $(0, 1, 1)$. On a terminé la première étape. Et puis, deuxième étape, c'était de résoudre le système $UX = Y$. Le X, c'est toujours la colonne des quatre inconnues. Et cette expression doit être égal à Y. Très bien, maintenant, on a à nouveau une matrice qui est déjà échelonnée, et on sait comment résoudre le système quand on a une matrice de coefficients qui est échelonnée. Ici, je vois que j'ai des pivots pour les trois premières lignes mais je n'ai pas de pivot pour la dernière inconnue, donc ici, ça indique qu'il y aura une variable libre. Donc ici, j'ai que x_4 est une variable libre.

Notes

Summary

4m 14s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix}1&0&2&-3\\-1&1&0&7\\-2&1&1&1\end{pmatrix}$ et considérons le système $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

On rappelle (voir vidéo 2.9) que $A = LU = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&-3\\0&1&2&4\\0&0&3&-9\end{pmatrix}$.

① On résout $LY = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

$y_1 = 0$

$-y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1.$

$-2y_1 + y_2 + y_3 = 2$

$1 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 1$

$Y = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$

② Résoudre le système $UX = Y$: $\begin{pmatrix}1&0&2&-3\\0&1&2&4\\0&0&3&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

x_4 variable libre. $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$.

$3x_3 - 9\alpha = 1$, $x_3 = 1/3 + 3\alpha$.

$x_2 + 2(1/3 + 3\alpha) + 4\alpha = 1$

$x_2 = 1/3 - 10\alpha$

$x_1 + 2(1/3 + 3\alpha) - 3\alpha = 0$

$x_1 = -2/3 - 3\alpha.$

Solution du système $AX = b$ est

$\{(-2/3 - 3\alpha,\ 1/3 - 10\alpha,\ 1/3 + 3\alpha,\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$

2.10 Décomposition LU (applications aux systèmes linéaires)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Posons $x_4 = \alpha$, un nombre réel quelconque, ensuite, je substitue au fur et à mesure pour trouver les autres. La dernière ligne de cette matrice me dit que $3x_3 - 9x_4 = 3x_3 - 9\alpha$ est égal à 1. Donc on obtient que $x_3 = 1/3 + 3\alpha$. Ensuite, la deuxième ligne, dit que $x_2 + 2x_3 + 4\alpha = 1$. Donc du coup, je résous, et je trouve que $x_2 = 1 - 2/3 - 10\alpha = 1/3 - 10\alpha$. et je trouve que $x_2 = 1 - 2/3 - 10\alpha = 1/3 - 10\alpha$. et je trouve que $x_2 = 1 - 2/3 - 10\alpha = 1/3 - 10\alpha$. Et enfin, je remonte à la première ligne, et j'ai que $x_1 + 2x_3 - 3\alpha = 0$. Donc le x_1 est égal à $- 2/3 - 3\alpha$. ($x_1 = - 2/3 <- 3\alpha$) Et donc maintenant, j'ai trouvé que x_4 est libre, x_3 j'ai trouvé en termes de α, x_2 en termes de α, x_1 en termes de α. Donc la solution finale du système original, du système $AX = b$ est : tous les éléments avec [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] où α est un nombre réel quelconque. Donc au lieu de résoudre le système original, on résout deux systèmes, qui sont les deux fois des systèmes triangulaires, et cela simplifie la résolution du système original.

Notes

Summary

5m 58s

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et considérons le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle (voir vidéo 2.9) que $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

① On résout $LY = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$y_1 = 0$

$-y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1.$

$-2y_1 + y_2 + y_3 = 2$

$1 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 1$

$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

② Résoudre le système $UX = Y$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

x_4 variable libre. $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$.

$3x_3 - 9\alpha = 1$, $x_3 = 1/3 + 3\alpha$.

$x_2 + 2(1/3 + 3\alpha) + 4\alpha = 1$

$x_2 = 1/3 - 10\alpha$

$x_1 + 2(1/3 + 3\alpha) - 3\alpha = 0$

$x_1 = -2/3 - 3\alpha$.

Solution du système $AX = b$ est

$\{(-2/3 - 3\alpha,\ 1/3 - 10\alpha,\ 1/3 + 3\alpha,\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

2.10 Décomposition LU (applications aux systèmes linéaires)

EPFL ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant, effectivement, si on n'a qu'un seul système à résoudre, ce n'est peut-être pas efficace, mais si on imagine qu'on a beaucoup de systèmes avec la même matrice de coefficients, alors trouver la décomposition *LU*, et après résoudre beaucoup de systèmes avec cette même décomposition *LU*, ça peut être beaucoup plus efficace. Donc c'est une question d'efficacité, ce n'est pas qu'on avait pas de méthode avant, mais ça c'est une méthode très efficace.

Notes

Summary

8m 10s