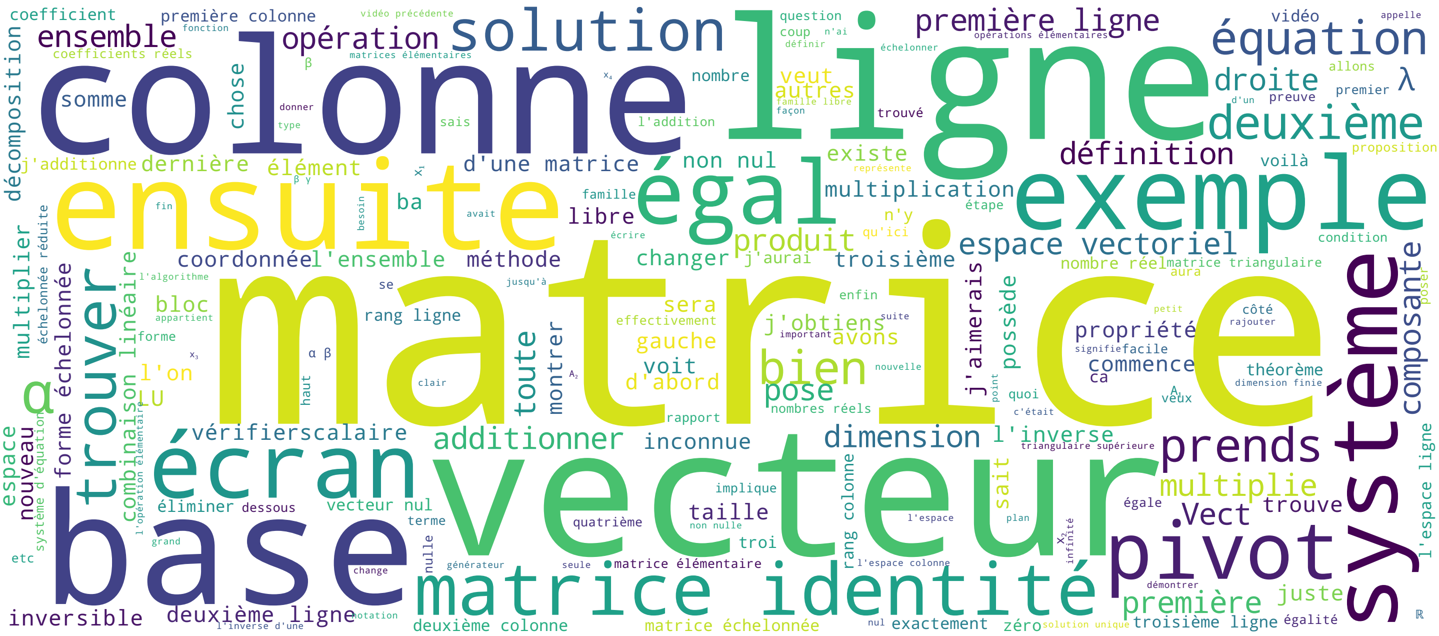
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.9 Décomposition LU (algorithme)

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

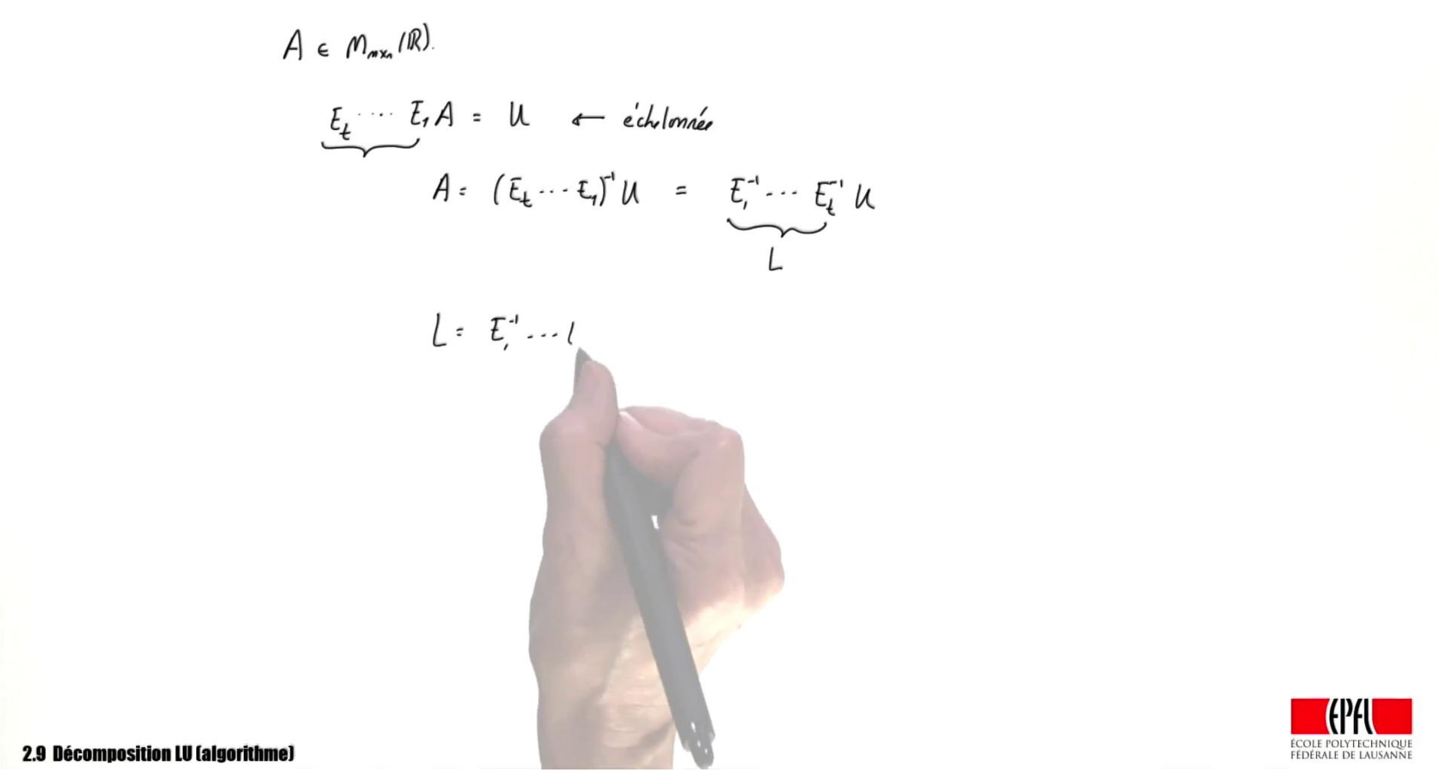
2.9 Décomposition LU (algorithme)

Dans cette vidéo, nous allons voir un algorithme pour trouver la décomposition LU. Dans la vidéo précédente, nous avons montré l'existence d'une telle décomposition, mais nous n'avons pas encore une méthode pour trouver cette décomposition. Maintenant, ici, je vous explique la méthode.

Notes

Summary

0m 03s



D'abord, je rappelle ce qu'on a vu la dernière fois; c'est que j'ai une matrice *A*, *m x n*, et puis je vais échelonner cette matrice en faisant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice. Ça, ça correspond à multiplier à gauche la matrice par les matrices élémentaires pour trouver une forme échelonnée de la matrice. Donc ça, c'est échelonné. Et donc c'est une matrice triangulaire supérieure. Et puis, cette matrice-là, on l'a mise après à droite, on sait qu'elle est inversible car c'est un produit de matrices inversibles. Donc, là, *A* est égal à l'inverse de cette matrice fois *U* et puis l'inverse d'un produit, c'est le produit des inverses mis dans l'autre sens. Et puis ça, ça va être notre matrice *L*. Et la question, c'est comment est-ce qu'on trouve cette matrice *L* ? Donc je vais faire une manipulation ici, $L=E_1^{-1}... Et^{-1}$, qui est la même chose que l'identité *m x m*, ce sont les matrices *m x m*, donc j'ai introduit une identité, ça ne change rien devant.

Notes

Summary

0m 18s

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$\underbrace{E_t \cdots}\ E_1 A = U \leftarrow$ échelonnée

$A = (E_t \cdots E_1)^{-1} U = \underbrace{E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}}_{L} U$

$L = E_1^{-1} \cdots E_t^{-1} = I_m E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$

2.9 Décomposition LU (algorithme)

Et puis maintenant, on se rappelle de ce qu'on a vu la dernière fois, dans la vidéo précédente, c'est que quand on multiplie à droite par une matrice élémentaire, ça opère sur les colonnes de la matrice, donc ici, je vais commencer avec la matrice identité, là, et je vais opérer par l'inverse de l'opération élémentaire n°1, l'inverse de l'opération élémentaire n°2, etc. Donc ce que je vais faire, c'est poser la matrice, et en dessous, je vais poser la matrice identité, et je vais au fur et à mesure, opérer, en haut, vers les lignes de la matrice *A*, et en bas, ici, vers les colonnes de la matrice identité, et ça va se dérouler comme ça.

Notes

Summary

1m 26s

$U =$ forme échelonnée de A, $L = (E_t \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_t^{-1} = I_m E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$.
On opère sur les colonnes de I_m par les opérations élémentaires $E_1^{-1}, \ldots, E_t^{-1}$.
Exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$
$U \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$
$A = LU$, $L \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons un exemple. Là, je répète ce que j'ai dit avant, donc on a la matrice *L*, qui est justement les opérations sur les colonnes de la matrice identité. Donc je pose un exemple, ici, je pose une matrice, et puis j'aimerais échelonner cette matrice, et en même temps opérer sur les colonnes de la matrice identité. Donc je pose les deux, la matrice *A* et la matrice identité. Bon, c'est peut-être intéressant de savoir pourquoi j'ai posé une matrice *3 x 3*, ici, donc le *A*, ici, est une matrice *3 x 4*, et on sait que le *U*, c'est toujours une matrice de même taille, parce que c'est juste une forme échelonnée de *A*. Donc le *L*, il doit être quoi ? Donc *A* est égal à *LU*, *U* c'est *3 x 4*, donc je vais multiplier à gauche par une matrice carrée, donc le *L* est forcément une matrice *3 x 3*. Effectuons l'échelonnage de *A*. Ici, je dois éliminer ce *-1*, donc je vais rajouter à la deuxième ligne *1* fois la première ligne, donc ça, ça donne *1 + (-1)*, *0 + 1*, *2 + 0*, et *-3 + 7*. Et ici, en bas, je vais faire l'inverse de cette opération, donc l'inverse d'une matrice L_{rs}, c'est comme ça, on change le signe de ce qu'il y a à l'intérieur.

Notes

Summary

2m 06s

$U =$ forme échelonnée de A, $L = (E_t \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_t^{-1} = I_m E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$.
On opère sur les colonnes de I_m par les opérations élémentaires $E_1^{-1}, \ldots, E_t^{-1}$.
Exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -1 & & 0 \\ -2 & & 1 \end{pmatrix}$$

2.9 Décomposition LU (algorithme)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je vais opérer sur les colonnes. Vous vous rappelez que c'est l'indice colonne qui indique la colonne qui va changer, donc c'est la première colonne qui va changer ici. Et puis c'est quoi le changement ? C'est que je vais additionner *-1* fois la deuxième colonne à la première. Donc je vais additionner *-1* fois ça à la première colonne. Donc j'ai *1*, *-1*, *0*. Et puis maintenant, deuxième étape, c'est qu'ici, je veux éliminer ce *-2*, donc je vais additionner à la troisième ligne *2* fois la première ligne. Donc ça, ça donne *2 + (-2)*, *0 + 1*, *4 + 1*, et puis *-6 + 1*. Et puis ici, je dois faire l'inverse de cette opération, en bas, mais sur les colonnes. Donc ça, ça dit que c'est de nouveau la première colonne qui va changer, et puis je vais additionner *-2* fois la troisième colonne à la première, donc *-2* fois cette colonne-là, que j'additionne ici. Donc ici j'ai *1*, *-1*, *-2*. Donc ça, c'est ce que je viens de faire. Maintenant, pour terminer l'échelonnage de cette matrice, il faut éliminer le *1* qui est là. Donc, pour faire ça, je dois additionner à la troisième ligne *-1* fois la deuxième ligne.

Notes

Summary

3m 28s

$U =$ forme échelonnée de A, $L = (E_t \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_t^{-1} = I_m E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$.
On opère sur les colonnes de I_m par les opérations élémentaires $E_1^{-1}, \ldots, E_t^{-1}$.
Exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$LU \stackrel{?}{=} A \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

2.9 Décomposition LU (algorithme)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc je le fais, alors j'ai *0 + 0*, *-1 + 1*, *-2 + 5*, et puis *-4 + (-5)*, donc *-9*. Et puis ici, je vais faire l'opération inverse, donc l'inverse de ça, c'est avec un *1* ici. L'indice colonne me dit que la colonne qui va changer, c'est la deuxième colonne, c'est pour ça que je ne l'ai pas encore mise. Donc je vais additionner à la deuxième colonne *1* fois la troisième, donc, comme ça. Donc ici, j'aurai *0*, *1*, *1*. Donc, du coup, ce qu'on voit ici, c'est qu'ici on a trouvé une matrice triangulaire supérieure, ça c'est le *U*, et ici une matrice triangulaire inférieure, ça c'est le *L*. Maintenant, évidemment, ce qu'on aimerait faire, c'est de vérifier le *L·U*, donc vérifions que *L·U* est bien égal à *A*. Ici, j'ai déjà le *L*, donc je vais juste poser le *U*, ici, et vérifier la multiplication. Et puis le produit de ces deux matrices, quand je fais le produit avec la première ligne, je vais juste lire ce qui est là, donc là j'ai *1*, *0*, *2*, *-3*, à chaque fois. Avec la deuxième ligne, j'ai *-1 + 0*, donc ça c'est *-1*, ensuite j'ai *0 + 1*, ensuite j'ai *-2 + 2*, c'est *0*, *+ 0*, c'est *0*.

Notes

Summary

4m 58s

$U =$ forme échelonnée de A, $L = (E_t \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_t^{-1} = I_m E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$.
On opère sur les colonnes de I_m par les opérations élémentaires $E_1^{-1}, \dots, E_t^{-1}$.

Exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$LU \stackrel{?}{=} A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A \checkmark$$

Ensuite j'ai *3 + 4*, ça fait *7*, *+ 0*, *7*. Ensuite ici, j'ai *-2 + 0*, ensuite j'ai *1*, ensuite j'ai *-4 + 2*, c'est *-2*, *+ 3*, c'est *1*. et ensuite, *6 + 4*, c'est *10*, *- 9*, c'est *1*. Et on a effectivement *A*. C'est juste. Donc voilà, ça c'est l'algorithme pour trouver la décomposition *LU*, c'est qu'on échelonne la matrice, donc on pose la matrice, on fait l'échelonnage, et à chaque fois, ici, en dessous, on commence avec la matrice identité de la bonne taille, et puis on va faire les opérations inverses de ce qu'on fait ici, mais dans le même ordre, heureusement, et puis les opérations inverses, et sur les colonnes de cette matrice-là. En fait, le fait qu'on ait fait sur les colonnes, c'est pour ça qu'on ne peut pas juste poser cette matrice à côté, comme quand on calcule l'inverse d'une matrice, mais on peut quand même faire en même temps le déroulement, et à la fin on a trouvé le *U*, ici en haut, et le *L* ici en bas. Ça, c'est l'algorithme pour trouver la décomposition *LU*.

Notes

Summary

6m 27s