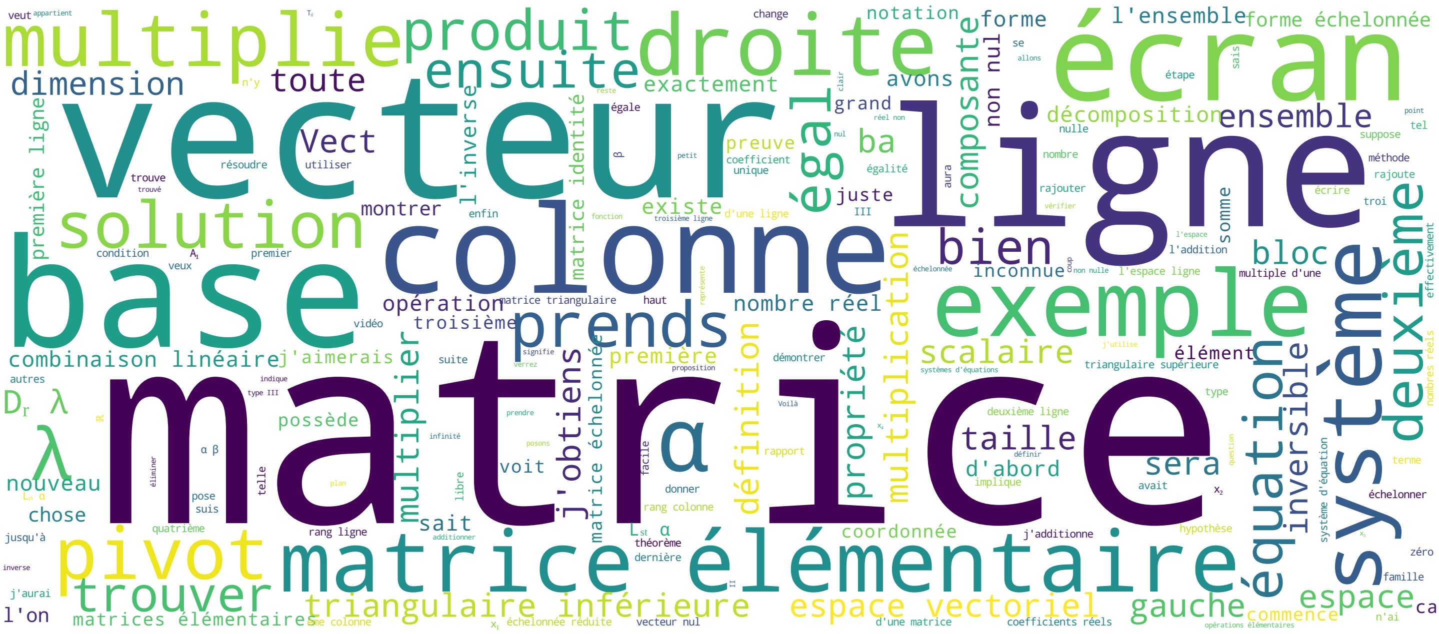
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.8 Décomposition LU (existence)

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



[Search MOOC](#)

[Video](#)

EPFL

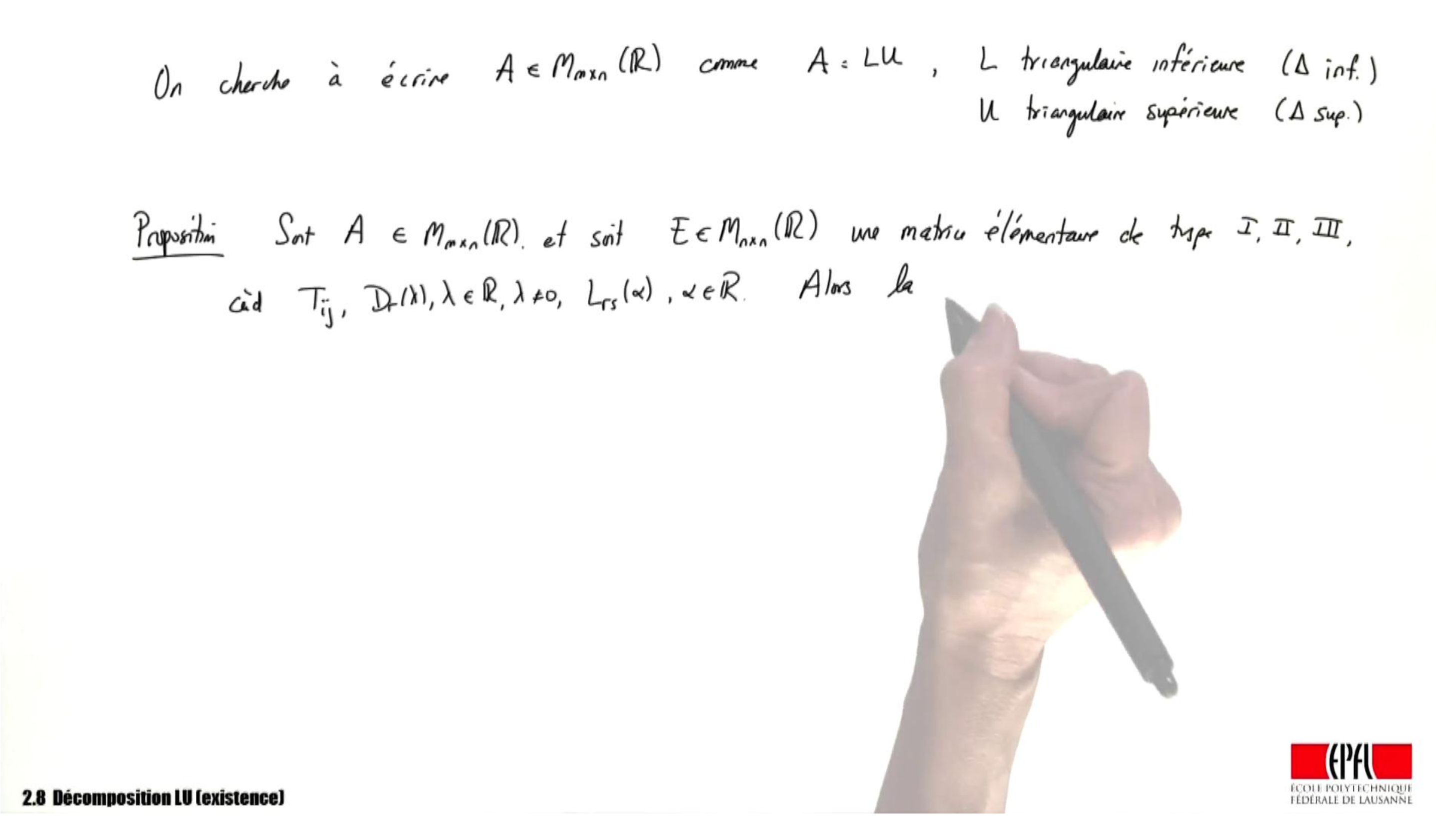
2.8 Décomposition LU (existence)

Aujourd'hui, je vais démontrer que l'on peut prendre une matrice quelconque A de taille *m x n* et la décomposer en un produit d'une matrice *L* qui sera triangulaire inférieure et une matrice *U* qui sera triangulaire supérieure. Comme nous avons déjà vu, par exemple pour résoudre des systèmes d'équations les matrices triangulaires sont très pratiques Ensuite, nous allons appliquer cette décomposition à la résolution de systèmes d'équations. Mais d'abord, je dois vous montrer que cette décomposition existe.

Notes

Summary

0m 04s



J'explique ici la notation. On cherche à écrire une matrice *m x n* comme un produit *L·U* où la matrice *L* sera une matrice triangulaire inférieure et où *U* sera une matrice triangulaire supérieure. La notation est issue de l'anglais. Le *L* c'est pour "lower triangular" et le *U* pour "upper triangular". Pour effectuer cette décomposition et démontrer que cela est possible, j'ai besoin d'une première proposition qui nous montre que les matrices élémentaires sont encore meilleures que ce que j'ai affirmé auparavant. Soit *A* une matrice *m x n* et soit *E* une matrice élémentaire, cette fois *n x n*. Une matrice élémentaire de type I, II ou III, c'est-à-dire : De type I c'est un T_{ij}, de type II c'est un D_r de scalaire λ réel non-nul, et de type III c'est un L_{rs} avec scalaire α réel. On sait ce qu'il se passe quand on a une matrice élémentaire et qu'on multiplie *A* à gauche par cette matrice élémentaire. Mais ici, j'ai pris une matrice élémentaire *n x n* donc je vais multiplier à droite. Alors la matrice *AE* est la matrice qu'on obtient en effectuant l'opération sur les colonnes de *A*.

Notes

Summary

0m 34s

On cherche à écrire $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme $A = LU$, L triangulaire inférieure (Δ inf.)
U triangulaire supérieure (Δ sup.)

Proposition Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et soit $E \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice élémentaire de type I, II, III, càd T_{ij}, $D_r(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $L_{rs}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la matrice AE est la matrice obtenue en effectuant une opération sur les colonnes de A, comme suit :

(I) $A \cdot T_{ij}$ on échange les colonnes i et j de la matrice A

(II) $A D_r(\lambda)$ on multiplie la r-ème colonne de A par λ.

(III) $A \cdot L_{rs}(\alpha)$ on rajoute $\alpha \times$ $r$ème colonne de A à la colonne s de A

exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

2.8 Décomposition LU (existence)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je vais vous expliquer dans chaque cas quelle est cette opération. Type I : Je prends la matrice A et je multiplie à droite par T_{ij}. C'est la matrice que j'obtiens si j'échange les colonnes i et j de la matrice A. Deuxièmement, si je multiplie la matrice A à droite par une matrice élémentaire $D_r(\lambda)$, on multiplie la r-ème colonne de A par λ. Troisièmement, c'est le plus délicat, si je multiplie à droite par $L_{rs}(\alpha)$ d'abord vous vous rappelez que lorsque je l'ai mise à gauche, j'ai beaucoup insisté sur la notation en disant que le r indique quelle ligne change. Le s, qui est l'indice colonne, indique quelle colonne change. Ici, on rajoute α fois la r-ème de A à la s-ème colonne de A. Donc, de nouveau je souligne ici, quand on opère à droite et on opère sur les colonnes, cela indique quelle colonne change. Donc c'est la colonne s de A qui va changer. Je vais donner un exemple. Je me donne une matrice [voir écran] Je vais multiplier à droite par une matrice élémentaire de la forme $L_{rs}(\alpha)$. matrice élémentaire de la forme $L_{rs}(\alpha)$.

Notes

Summary

2m 16s

On cherche à écrire $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ comme $A = LU$, L triangulaire inférieure (Δ inf.)
U triangulaire supérieure (Δ sup.)

Proposition Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et soit $E \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice élémentaire de type I, II, III, càd T_{ij}, $D_r(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $L_{rs}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la matrice AE est la matrice obtenue en effectuant une opération sur les colonnes de A, comme suit :

(I) $A \cdot T_{ij}$ on échange les colonnes i et j de la matrice A

(II) $A D_r(\lambda)$ on multiplie la r-ème colonne de A par λ.

(III) $A \cdot L_{rs}(\alpha)$ on rajoute $\alpha \times$ $r$ème colonne de A à la colonne s de A ◁—

exemple
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_{21}(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 2 & 3 \\ a+b\alpha & b & c \\ 4+5\alpha & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2.8 Décomposition LU (existence)

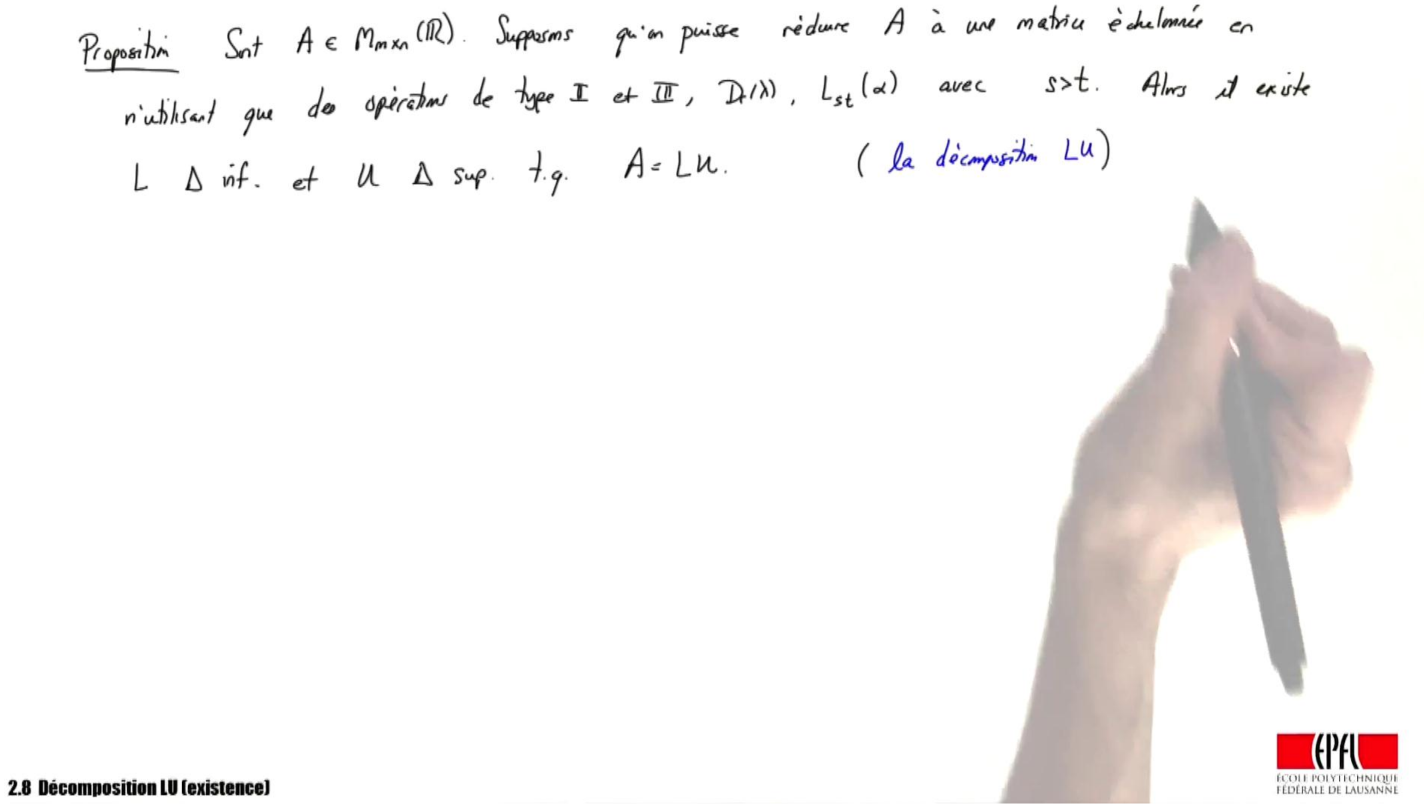
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

[voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] Maintenant j'effectue la multiplication. Maintenant si on regarde la différence entre cette matrice et celle-là, effectivement ce qui s'est passé c'est que j'ai rajouté α fois la deuxième colonne à la première colonne. C'est exactement ce que dit la propriété III.

Notes

Summary

3m 53s



Maintenant je peux utiliser cela pour vous démontrer l'existence de la décomposition LU Proposition : Soit *A* une matrice *m x n* et je vais émettre une hypothèse assez forte sur la matrice *A*, je suppose qu'on peut réduire *A* à une forme échelonnée en n'utilisant uniquement des opérations de type II et III et avec une condition de plus, donc $D_r(\lambda)$ et $L_{st}(\alpha)$, et maintenant j'émets encore une hypothèse sur le *s* et le *t*. Il s'agit de rajouter un multiple d'une ligne à une autre et ici je veux supposer que je suis toujours en train de rajouter plus bas, donc c'est la ligne plus bas qui change, donc *s* est plus grand que *t*. Voilà l'hypothèse que j'émets. Les matrices de type III sont toujours de telle forme que on rajoute un multiple d'une ligne plus haut à une ligne plus bas. ALors, selon ces hypothèses, il existe : une matrice *L* triangulaire inférieure et une matrice *U* triangulaire supérieure telles que *A* = *LU*. Cela s'appelle la décomposition LU. Vous verrez que cette décomposition n'est pas unique, vous le verrez dans la preuve car on va échelonner la matrice jusqu'à une forme échelonnée et que cette forme-là n'est pas unique.

Notes

Summary

4m 54s

Proposition Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Supposons qu'on puisse réduire A à une matrice échelonnée en n'utilisant que des opérations de type I et III, $D_r(\lambda)$, $L_{st}(\alpha)$ avec $s>t$. Alors il existe L Δ inf. et U Δ sup. t.q. $A = LU$. (la décomposition LU)

Preuve Par l'hypothèse, il existe $E_1, E_2, \dots, E_t$ des matrices élémentaires $m \times m$ de la forme $D_r(\lambda)$ ou $L_{st}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s>t$ t.q. $E_t \cdots E_1 A$ est une matrice échelonnée. Donc posons $U = \underline{E_t \cdots E_1} A$, une matrice Δ sup. $E_t \cdots E_1$ est inversible, donc

$$A = (E_t \cdots E_1)^{-1} U$$

Nous n'obtiendrons pas une décomposition unique, mais nous aurons une décomposition. Maintenant, je vais utiliser cette hypothèse, qui est très forte, selon laquelle je peux échelonner cette matrice en utilisant les multiplications $D_r(\lambda)$ et aussi les opérations élémentaires qui rajoutent toujours plus bas, dans la matrice, un multiple d'une ligne plus haut. Par hypothèse, il existe des matrices élémentaires de taille m x n, parce que je vais multiplier à gauche. Soit $D_r(\lambda)$ ou $L_{st}(\alpha)$ où λ est un nombre réel non-nul où α est un nombre réel, et tel que s est plus grand que t tel que si je multiplie la suite de ces matrices par la matrice A, cette matrice est échelonnée. Mais les matrices échelonnées sont triangulaires supérieures. Donc posons : U = *la matrice échelonnée*, maintenant ceci est un produit de matrice élémentaire, chaque matrice élémentaire est inversible, donc le produit est inversible, donc je peux multiplier à gauche et j'obtiens que A est l'inverse de cette matrice-là. Maintenant, il reste à démontrer que cette matrice-là est une matrice triangulaire inférieure.

Notes

Summary

6m 41s

Proposition Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Supposons qu'on puisse réduire A à une matrice échelonnée en n'utilisant que des opérations de type I et III, $D_r(\lambda)$, $L_{st}(\alpha)$ avec $s>t$. Alors il existe L Δ inf. et U Δ sup. t.q. $A = LU$. (la décomposition LU)

Preuve Par l'hypothèse, il existe $E_1, E_2, \dots, E_t$ des matrices élémentaires $m\times m$ de la forme $D_r(\lambda)$ ou $L_{st}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s>t$ t.q. $E_t \cdots E_1 A$ est une matrice échelonnée. Donc posons $U = \underline{E_t \cdots E_1} A$, une matrice Δ sup. $E_t \cdots E_1$ est inversible, donc

$$A = (E_t \cdots E_1)^{-1} U$$

. Il reste à voir que $L = (E_t \cdots E_1)^{-1}$ est Δ inf.

$= E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$. Rappel $D_r(\lambda)^{-1} = D_r(\frac{1}{\lambda})$

$L_{st}(\alpha)^{-1} = L_{st}(-\alpha)$.

$s>t$ $L_{st}(-\alpha)$ est Δ inf.

Exercice un produit de matrices Δ inf est Δ inf.

$\Rightarrow L$ est Δ inf.

2.8 Décomposition LU (existence)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant j'utilise une propriété des matrices inversibles, pour faire l'inverse d'un produit je fais le produit des inversements dans l'autre sens. Ainsi $E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$ Je sais aussi que l'inverse d'un E_i est aussi un E_i: Pour rappelle l'inverse de $D_r(\lambda)$ c'est $D_r(1/\lambda)$ et que l'inverse de $L_{st}(\alpha)$ c'est $L_{st}(-\alpha)$. Maintenant, chacune de ces matrices est de nouveau une matrice élémentaire, car l'inverse est de nouveau une matrice élémentaire, et de plus $D_r(1/\lambda)$ est diagonale et, comme s est plus grand que t, la matrice $L_{st}(-\alpha)$ est triangulaire inférieure. Maintenant, j'ai un produit de matrices triangulaires inférieures. Je vous laisse ceci comme exercice : démontrer qu'un produit de matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieur. J'ai le L qui est une produit de ces matrices élémentaires, chacune est ou bien diagonale (et donc triangulaire inférieure) ou bien triangulaire inférieure. Donc L est bien triangulaire inférieure. Donc j'ai trouvé une décomposition $A = LU$, avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

Notes

Summary

8m 26s

Proposition Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Supposons qu'on puisse réduire A à une matrice échelonnée en n'utilisant que des opérations de type I et III, $D_r(\lambda)$, $L_{st}(\alpha)$ avec $s>t$. Alors il existe L Δ inf. et U Δ sup. t.q. $A = LU$. (la décomposition LU)

Preuve Par l'hypothèse, il existe $E_1, E_2, \dots, E_t$ des matrices élémentaires $m \times m$ de la forme $D_r(\lambda)$ ou $L_{st}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s>t$ t.q. $E_t \cdots E_1 A$ est une matrice échelonnée. Donc posons $U = \underline{E_t \cdots E_1} A$, une matrice Δ sup. $E_t \cdots E_1$ est inversible, donc

$$A = (E_t \cdots E_1)^{-1} U.$$

Il reste à voir que $L = (E_t \cdots E_1)^{-1}$ est Δ inf.

$= E_1^{-1} \cdots E_t^{-1}$. Rappel $D_r(\lambda)^{-1} = D_r\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

$L_{st}(\alpha)^{-1} = L_{st}(-\alpha)$.

$s>t$ $L_{st}(-\alpha)$ est Δ inf.

Exercice un produit de matrices Δ inf et Δ inf.

$\Rightarrow$ L est Δ inf.

(**Remarque** : $U \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
$L \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$.)

2.8 Décomposition LU (existence)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

J'aimerais seulement ajouter : on sait quelle est la taille de la matrice nous allons obtenir parce que le *U* est une forme échelonnée de la matrice A donc elle ne change pas de taille. La matrice *U* sera donc aussi une matrice *m x n* et *L*, comme c'est un produit de matrices *m x n*, c'est une matrice *m x n*. Je n'ai pas encore utilisé la propriété que j'ai donnée dans l'exemple précédent où il y avait la multiplication à droite par les matrices élémentaires. Cela viendra dans la prochaine vidéo, où je vous donnerai un algorithme pour trouver le *L* et le *U*. On voit bien comment trouver le U mais on ne voit pas exactement comment trouver le *L* car cela dépend de cette preuve-là.

Notes

Summary

10m 11s