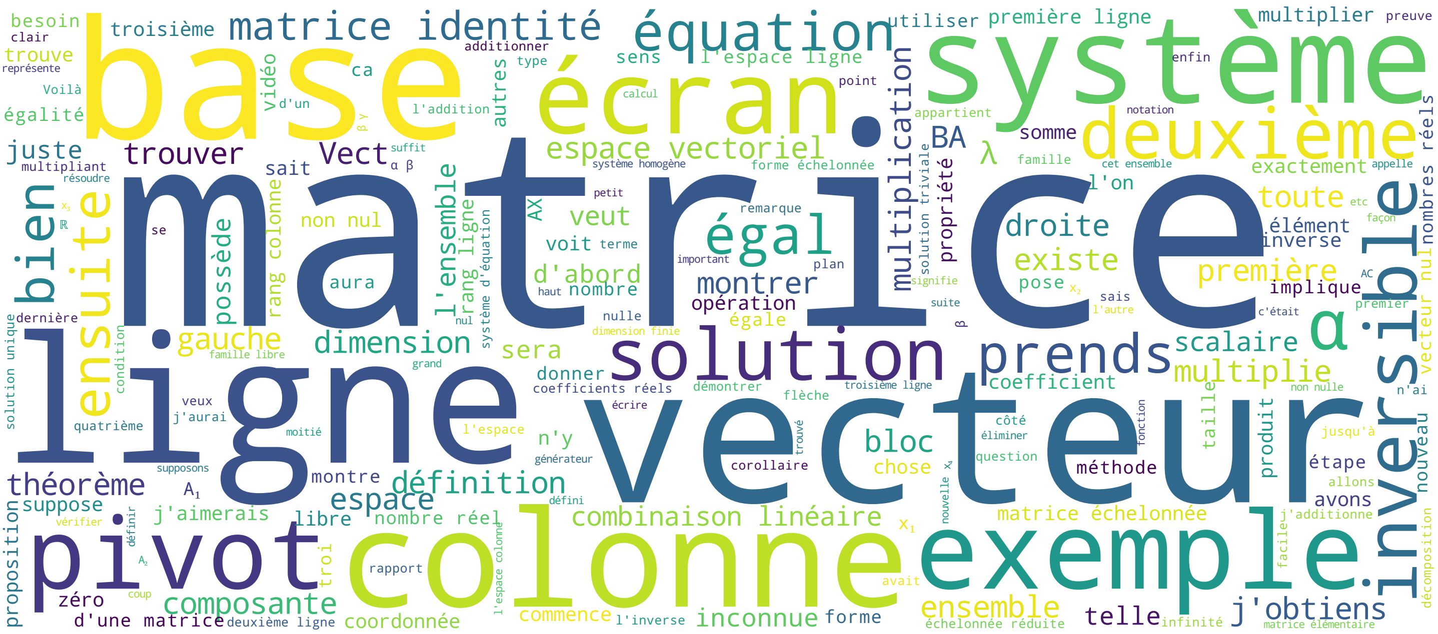
Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.7 D'autres critères d'inversibilité

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

2.7 D'autres critères d'inversibilité

Dans cette vidéo, qui sera une toute petite vidéo, je vais donner un autre critère d'inversibilité d'une matrice. On a vu dans la vidéo précédente qu'une matrice est inversible si et seulement si le système $AX = 0$ ne possède qu'une solution, la solution triviale; et puis dans cette vidéo, on aura un critère qui nous diminue de moitié le travail à faire.

Notes

Summary

0m 04s

Proposition (corollaire du théorème 2.6) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1) A est inversible $\Longleftrightarrow$ il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.

(2) A est inversible $\Longleftrightarrow$ il existe $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.q. $AC = I_n$.

($\Longrightarrow$ vrai d'après la définition d'inversibilité)

Preuve (1)

2.7 D'autres critères d'inversibilité

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C'est pas mal. Donc, proposition, en fait, c'est un corollaire du théorème, dans le paragraphe 2.6. Je prends une matrice *n x n*. Je montre d'abord que *A* est inversible, si et seulement si il existe une matrice *B* aussi *n x n*, telle que *BA=I*. Ensuite, je vais montrer que *A* est inversible si et seulement si il existe une matrice *C* aussi *n x n*, telle que *AC=I*. Donc on voit qu'on aura économisé la moitié du travail, parce qu'il suffit de trouver une matrice telle que, d'un côté ou de l'autre, en multipliant, on trouve la matrice identité. On n'a pas besoin de faire les deux multiplications. Maintenant, pour montrer ce théorème, je n'ai besoin que de montrer des flèches dans un sens, je fais juste une remarque ici, que la flèche ici et la flèche ici, on l'a d'après la définition de l'inversibilité, donc ce sens est vrai d'après la définition d'inversibilité. Donc je n'ai pas besoin de montrer ça. Donc je montre les autres directions. Donc d'abord je montre (1). J'ai dit que c'est un corollaire du théorème, donc je veux utiliser le théorème. Donc, je suppose que j'ai *B*, supposons que *BA=I* pour une certaine matrice *B*.

Notes

Summary

0m 27s

Proposition (corollaire du théorème 2.6) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1) A est inversible $\iff$ il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.

(2) A est inversible $\iff$ il existe $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.q. $AC = I_n$.

($\Rightarrow$ / $\Rightarrow$ vrai d'après la définition d'inversibilité)

Preuve (1) Supposons que $BA = I_n$ pour $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Soit b une solution du système $AX = 0$.

càd $A\cdot b = 0$ $\Longrightarrow$ $AX = 0$ possède une solution unique $\overset{\text{théorème}}{\Longrightarrow}$ A est inversible.

$$B(A\cdot b) = B\cdot 0$$
$$(BA)\cdot b = 0$$
$$I_n \cdot b = 0$$
$$b = 0$$

(2) Supposons que $AC = I_n$ pour $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Et je suppose aussi que j'ai une solution *b* du système homogène *AX = 0*. C'est-à-dire que si je fais *A·b*, donc c'est une matrice colonne, alors j'ai zéro. Alors, je vais utiliser le fait que j'ai ce *B*, donc je multiplie à gauche les deux côtés de cette égalité par *B*. Donc j'ai *B(A·b) = B·0* Et si je regroupe autrement, *(BA)·b=0*. Et puis *BA*, c'est la matrice identité, donc je trouve que *b=0*. Donc ça ça veut dire que la seule solution du système *AX = 0* c'est la solution triviale. *AX = 0* possède une solution unique. Et donc, par le théorème, ça implique que *A* est inversible. Maintenant, le (2). Il faut montrer le (2) parce que c'est pas tout à fait le même argument, là, vous voyez que j'ai vraiment utilisé, j'ai multiplié à gauche par une matrice pour modifier cette équation. Donc je fais différemment pour le (2). Donc ici, je suppose que j'ai cette matrice *C* telle que en multipliant à droite la matrice *A*, j'obtiens la matrice identité. Donc ça, ça veut dire que c'est une matrice *n x n*, et j'ai trouvé une matrice telle que en multipliant à gauche, ça donne la matrice identité.

Notes

Summary

2m 05s

Proposition (corollaire du théorème 2.6) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1) A est inversible $\Longleftrightarrow$ il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.

(2) A est inversible $\Longleftrightarrow$ il existe $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.q. $AC = I_n$.

($\Rightarrow$ vrai d'après la définition d'inversibilité)

Preuve (1) Supposons que $BA = I_n$ pour $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Soit b une solution du système $AX = 0$.

càd
$$\begin{aligned} A\cdot b &= 0 \\ B(A\cdot b) &= B\cdot 0 \\ (BA)\cdot b &= 0 \\ I_n \cdot b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$
$\Longrightarrow$ $AX=0$ possède une solution unique $\overset{\text{théorème}}{\Longrightarrow}$ A est inversible.

(2) Supposons que $AC = I_n$ pour $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Par (1) appliqué à la matrice C, on a que C est inversible, avec inverse C^{-1}.
$$\begin{aligned} AC &= I_n \\ AC\cdot C^{-1} &= I_n \cdot C^{-1} \\ A &= C^{-1} \Rightarrow A \text{ est inversible. } \blacksquare \end{aligned}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc par le (1), appliqué à *C*, on sait que la matrice *C* est inversible, disons, avec inverse, C^{-1}. Donc je vais utiliser cette inverse, j'ai $AC=I$, $A\cdot C\cdot C^{-1}=I\cdot C^{-1}$. Ça, c'est la matrice identité, donc j'ai $A=C^{-1}$. *C* est inversible, C^{-1} est inversible, *A* est égal à C^{-1}, donc *A* est inversible. Donc ça montre la proposition.

Notes

Summary

3m 38s