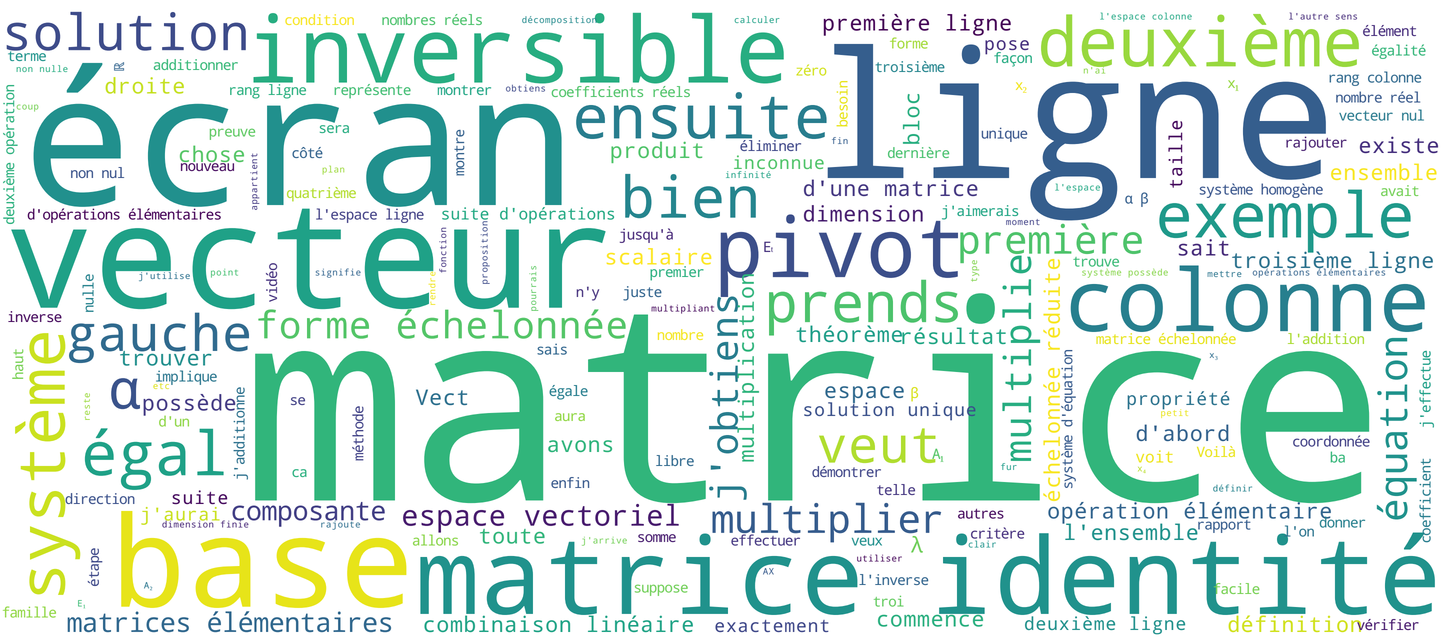
Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.6 Premier critère d'inversibilité et calcul de l'inverse

Algèbre linéaire

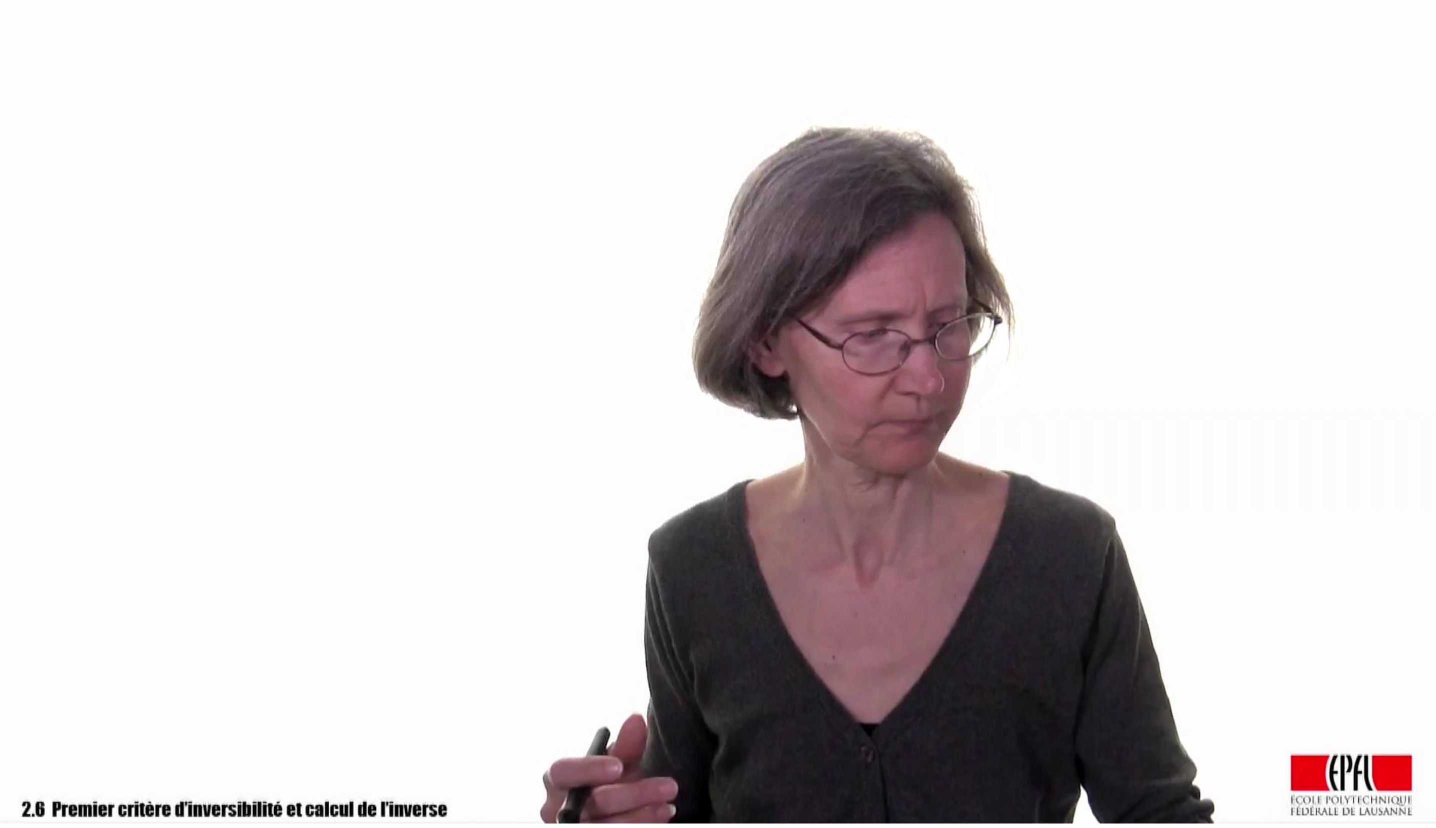
Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

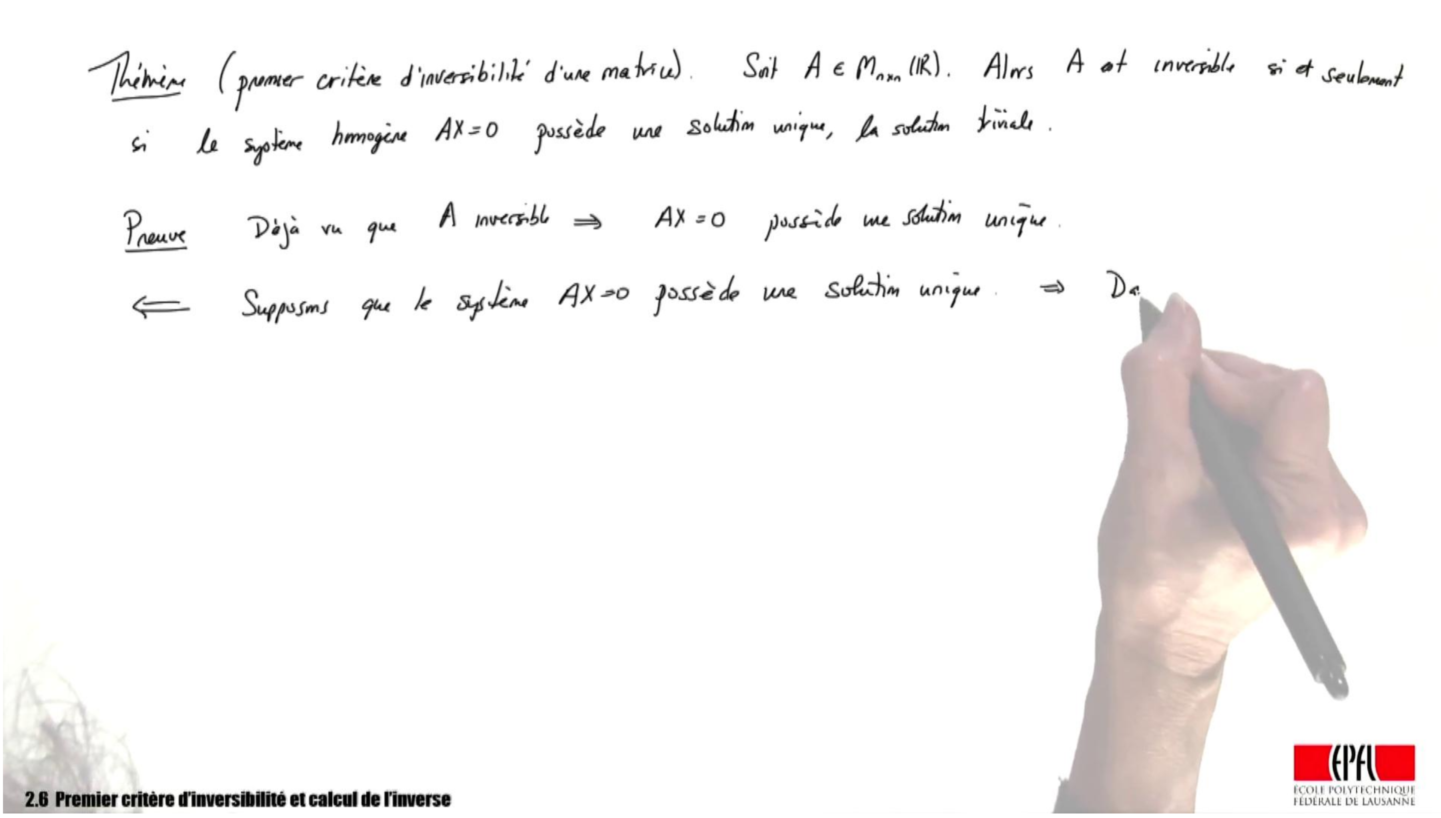


Dans cette vidéo, nous allons voir une très jolie application des matrices élémentaires. Nous avons vu, dans une vidéo précédente, qu'on peut utiliser les matrices élémentaires pour opérer sur les lignes d'une matrice en multipliant à gauche la matrice. On effectue l'opération élémentaire sur les lignes de la matrice, et c'est ça qui va nous donner à la fois, un critère pour l'inversibilité d'une matrice, et aussi, une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice.

Notes

Summary

0m 03s

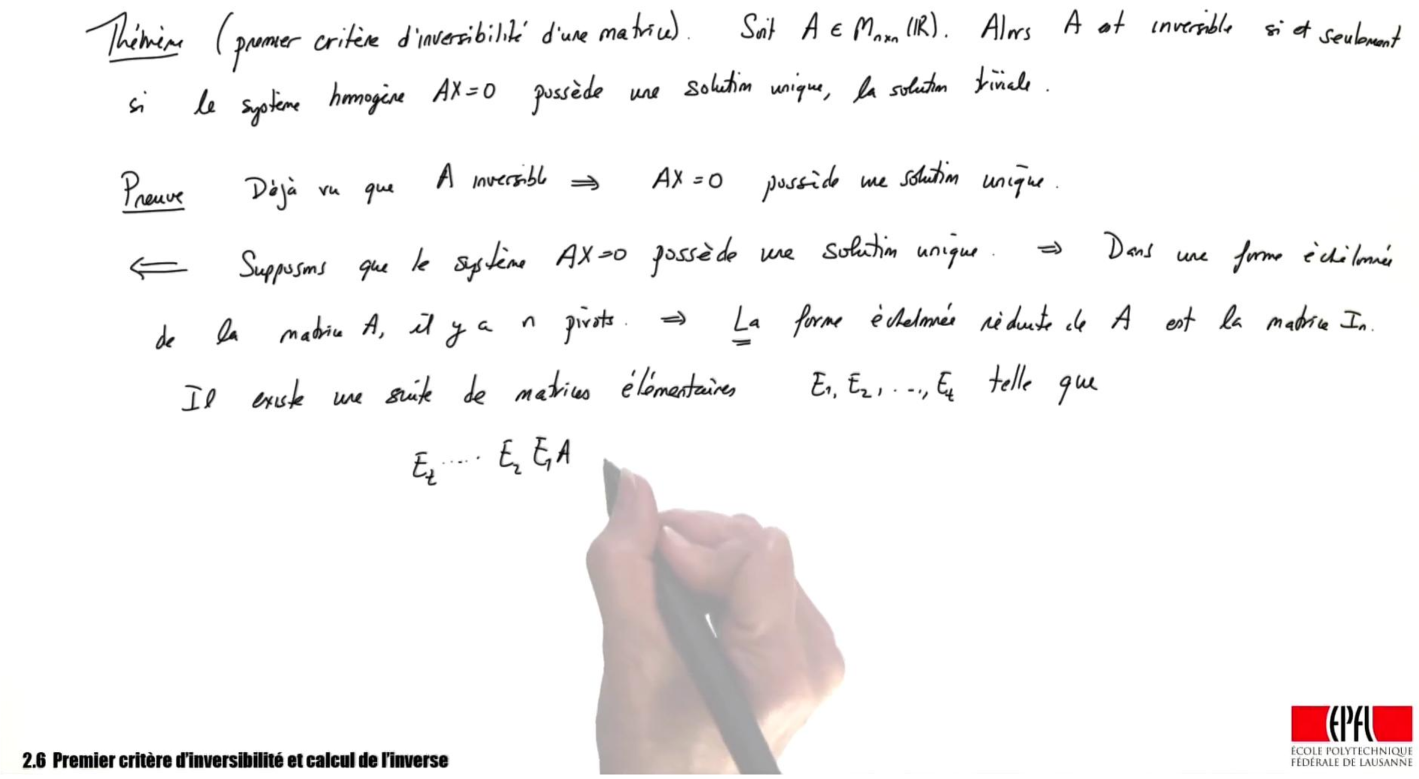


D'abord, je démontre le théorème qui donne le critère. Donc je prends une matrice *m x n*, disons *A* alors *A* est inversible si et seulement si le système homogène *AX = 0* possède une solution unique qui sera forcément la solution triviale. Maintenant, la preuve de ce théorème. On n'a besoin que de faire une direction parce que nous avons déjà vu une des directions; on a déjà vu qu'une matrice qui est inversible a la propriété que le système homogène possède une solution unique; on a déjà vu que *A* inversible implique, en fait : tout système, avec matrice des coefficients *A*, possède une solution unique, mais, en particulier, le système homogène. Donc, ce qu'il faut, c'est montrer l'autre direction. Je suppose que ce système ne possède qu'une seule solution. Alors, ça veut dire que dans la procédure d'échelonnage de cette matrice, qui est une matrice *m x n*, j'échelonne la matrice et, à la fin, dans la forme échelonnée que j'obtiens, je vais avoir *n* pivots. Donc il n'y a pas de variables libres. Il doit donc y avoir un pivot pour chaque variable. Ceci implique que dans une forme échelonnée de la matrice *A* il y a *n* pivots.

Notes

Summary

0m 31s



Maintenant, si je vais jusqu'à une forme échelonnée réduite d'une matrice qui possède n pivots, la forme échelonnée réduite est unique, alors je dois arriver jusqu'à la matrice identité. Donc je peux bien dire LA forme échelonnée réduite, parce qu'il y en a qu'une seule, de la matrice A. Donc ça veut dire que notre matrice A est ligne équivalente à la matrice identité. Donc j'effectue une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A, et j'arrive à la matrice identité. Mais, maintenant, on sait que ces opérations élémentaires, on peut les effectuer en multipliant à gauche par les matrices élémentaires. Donc ça veut dire qu'il existe une suite de matrices élémentaires E_1, E_2,..., E_t. telle que quand je multiplie, au fur et à mesure, à gauche, par ces matrices élémentaires, j'obtiens la matrice identité. Donc, telle que : (je vais les faire dans ce sens là) j'ai E_1 qui multiplie A, ça, c'est la première opération élémentaire, E_2, deuxième opération élémentaire, et puis, enfin, la dernière opération élémentaire (multiplication par E_t). Tout ça pour rendre A sous sa forme échelonnée réduite qui est la matrice identité.

Notes

Summary

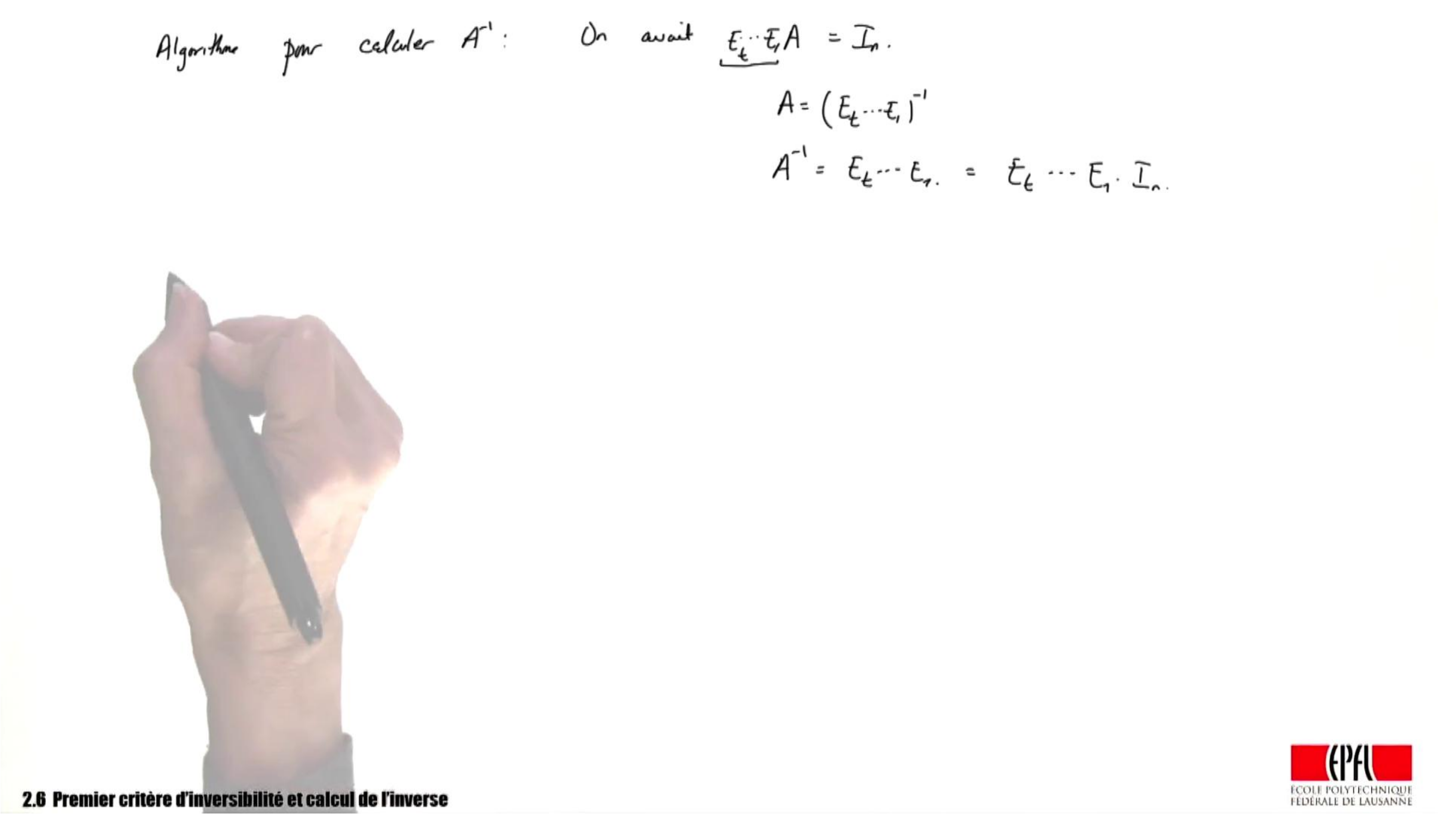
2m 25s

Maintenant, on se rappelle que chacune de ces matrices élémentaires est une matrice inversible, donc E_i est inversible pour tout i. Donc, d'abord je vais multiplier à gauche par l'inverse de E_t, donc ça veut dire que j'aurai $E_{t-1} \dots E_2\, E_1\, A$ est égal à E_t^{-1}. Ensuite, je vais multiplier à gauche par l'inverse de E_{t-1} j'aurai $E_{t-2} \dots E_1\, A$ égal à $E_{t-1}^{-1}\, E_t^{-1}$. Et puis, enfin, j'arrive à $A = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_t^{-1}$. Donc maintenant, A est un produit de matrices inversibles, et donc, est inversible. C'est exactement ce qu'on souhaitait obtenir, c'était que si le système possède une solution unique, i.e. on peut, au fur et mesure, échelonner la matrice jusqu'à la matrice identité. Ça veut dire qu'on peut multiplier par une suite de matrices élémentaires à gauche, afin de rendre A de la même forme que la matrice identité, et on passe à droite toutes ces matrices élémentaires, car elles sont inversibles, et puis ça montre que A est un produit de matrices inversibles et donc, elle est inversible.

Notes

Summary

3m 43s



Maintenant, en plus de démontrer le théorème, la démonstration nous donne un algorithme pour trouver A^{-1}. Donc, ici, je vais vous montrer ça. On avait que A fois cette suite est égal à l'identité. Maintenant, $E_t \cdots E_2 E_1$ est une matrice inversible. Donc, en fait, on a que A est égal à l'inverse de cette matrice. Donc ça, ça veut dire que A^{-1} c'est simplement cette matrice. Donc en fait, j'aimerais avoir un algorithme pour trouver cette matrice-là, mais cette matrice, c'est la même chose que si je rajoute une matrice identité là, donc cette matrice-là, comment est-ce que je pourrais la trouver ? Bon, cette matrice, représente une opération élémentaire, donc je fais une opération élémentaire sur les lignes de la matrice identité, ensuite, je fais une deuxième opération élémentaire sur les lignes de cette matrice, [voir écran] Donc on voit qu'on est en train de faire exactement la même suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité que nous avons fait sur les lignes de A pour l'échelonner. On effectue la suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité.

Notes

Summary

5m 14s

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On ne veut pas faire ça en deux fois, donc la façon de faire, c'est qu'on pose une matrice où ici, à gauche, on va mettre *A*, à côté, on va mettre la matrice identité, donc ça va nous faire une matrice qui est de taille *n x 2n*, il y aura deux fois plus de colonnes. On va effectuer la suite d'opérations élémentaires E_1 jusqu'à E_t sur les lignes de cette matrice entière, et puis, quand j'arrive ici, à gauche, à la matrice identité, ce que j'aurai ici, à droite, sera l'inverse de *A*. Et puis en plus, ça nous montre si *A* est inversible parce que si, ici, à un moment donné, on ne trouve pas *n* pivots, alors, on ne peut jamais arriver à la matrice identité, on sait que la matrice n'est pas inversible et on s'arrête. Donc à la fois, on détermine si *A* est inversible, et puis, on trouve l'inverse. Maintenant, je fais un exemple.

Notes

Summary

6m 45s

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_{31}(2)]{L_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Je commence avec cette matrice-là, j'aimerais déterminer si elle est inversible, et, en plus, calculer son inverse. Comme j'ai dit, je pose la matrice identité de même taille à côté et je vais effectuer une suite d'opérations élémentaires pour voir quelle est la forme échelonnée réduite de cette matrice. Je commence. Donc la première chose que je dois faire c'est d'éliminer ces deux termes. La première opération, c'est de rajouter la première ligne à la deuxième, ça c'est cette opération élémentaire là, puis, la deuxième chose, c'est de rajouter deux fois la première ligne à la deuxième, ça, c'est la deuxième opération élémentaire. Et j'obtiens, Et j'obtiens, *1 + -1*, c'est *0*, *-2 + 1 = -1*, *-2 + 1 = -1*, *-3 + 1 = -2*, *-3 + 1 = -2*, et ensuite, *1*, *1*, *0*. [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] Maintenant, la prochaine chose que je dois faire, c'est d'éliminer ce *-4* Pour éliminer ce *-4* j'utilise la deuxième ligne, que je vais multiplier par *-4*, et additionner à la troisième ligne.

Notes

Summary

7m 41s

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_{31}(2)]{L_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_{32}(-4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_{23}(2)]{L_{13}(3)} \left(\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

2.6 Premier critère d'inversibilité et calcul de l'inverse

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc j'ai $0 + 0 = 0$, $4 + (-4) = 0$, $8 + (-7) = 1$, $-4 + 2 = -2$, [voir écran] [voir écran] Premièrement, on sait que la matrice est inversible, car j'ai trois pivots pour la matrice A, et qu'il s'agit d'une matrice 3×3, donc ça, ça implique que A est inversible. Vous voyez, ce qui peut arriver, c'est que vous faites la procédure d'échelonnage, et, à un moment, vous avez une ligne de 0, vous n'allez jamais avoir n pivots, donc là, vous arrêtez, vous savez que A n'est pas inversible. Dans notre cas, on sait que A est inversible. Et puis, je continue, j'aimerais trouver l'inverse. Donc ici, c'est la matrice que j'avais. Je dois maintenant éliminer le haut de la troisième colonne, c'est-à-dire ce -3 et ce -2 donc je vais multiplier la troisième ligne par 2, que l'additionner à la deuxième, et ensuite, je vais multiplier la troisième ligne par 3, que l'additionner à la première. Ce qui donne comme résultat [voir écran] Ce qui donne comme résultat [voir écran] Ce qui donne comme résultat [voir écran] [voir écran] [voir écran] Maintenant, je rajoute trois fois la troisième ligne à la première.

Notes

Summary

9m 01s

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_{31}(2)]{L_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_{23}(2)]{L_{13}(3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 & -12 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{-2 \quad -4 \quad 1}_{A^{-1}} \end{pmatrix}$$

2.6 Premier critère d'inversibilité et calcul de l'inverse

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ce qui donne comme résultat [voir écran] Ce qui donne comme résultat [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] Maintenant, il me reste à faire deux choses. Il faut que j'élimine le *-2* et, aussi, que le deuxième pivot devienne *1* parce qu'il faut la forme échelonnée réduite qui sera la matrice identité. Maintenant, je dois additionner *-2* fois la deuxième ligne à la première. Donc les deuxième et troisième lignes ne changent pas. On obtiens donc [voir écran] On obtiens donc [voir écran] [voir écran] *14 + (-12)*, [voir écran] Et puis enfin, il faut corriger le *-1*, donc je multiplie la deuxième ligne, par *-1*. [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] Donc maintenant, on est arrivé, ici, à la matrice identité et ce qui se trouve, ici, à droite, c'est A^{-1}. Ce qui est bien, c'est qu'on peut vérifier. Éventuellement, on a fait des erreurs, mais on va vérifier. Donc je vais remmetre cette matrice-là à coté de A, ici, et je vais faire le produit, et je devrais trouver la matrice identité.

Notes

Summary

10m 25s

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_{31}(2)]{\mathrm{L}_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_{32}(-4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{L}_{23}(2)]{\mathrm{L}_{13}(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -5 & -12 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_{12}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{D}_{2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{-2 \quad -4 \quad 1}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Donc j'ai *1 - 6 + 6 = 1, 2 - 14 + 12 = 0, -1 + 4 - 3 = 0, -1 + 3 - 2 = 0, -2 + 7 - 4 = 1, 1 - 2 + 1 = 0, -2 + 0 + 2 = 0, -4 + 0 + 4 = 0, 2 + 0 - 1 = 1*. Je vous laisse vérifier la suite et également que ça marche aussi dans l'autre sens, parce qu'on doit vérifier que si j'effectue le produit de la matrice que j'ai obtenue fois la matrice *A* dans l'autre sens, j'obtiens aussi la matrice identité.

Notes

Summary