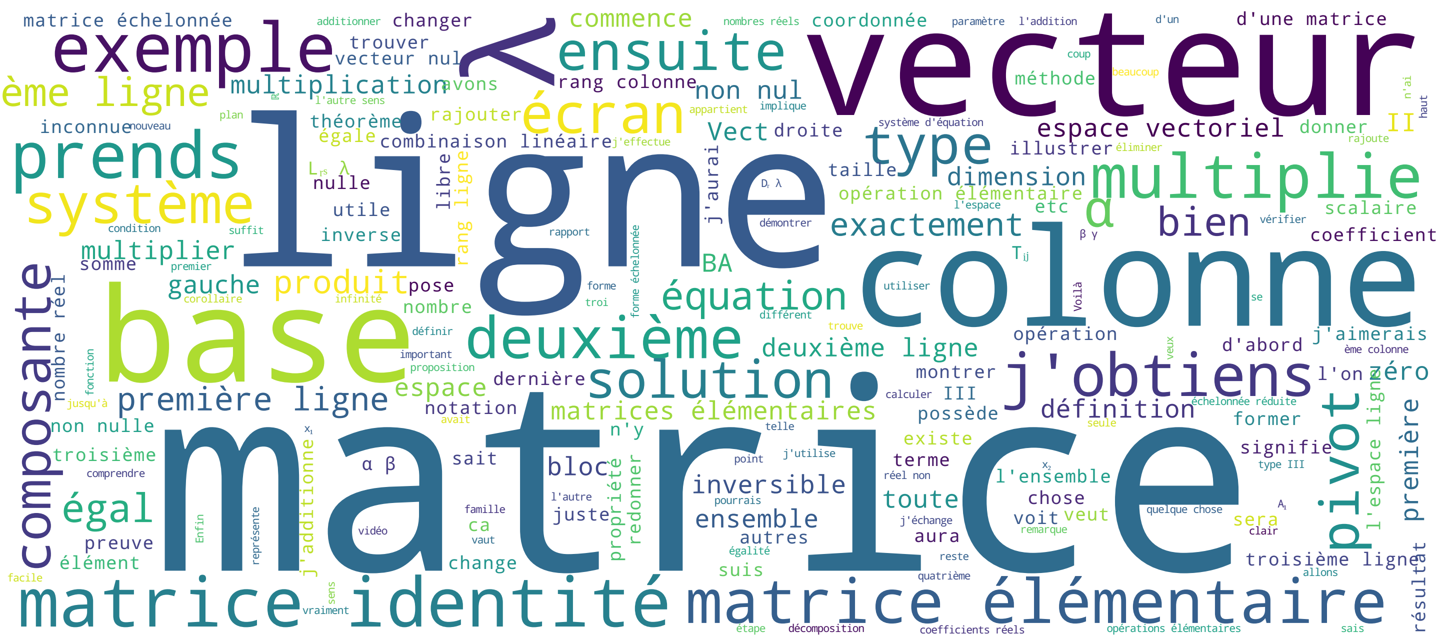
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.5 Matrices élémentaires

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



[Search MOOC](#)

[Video](#)

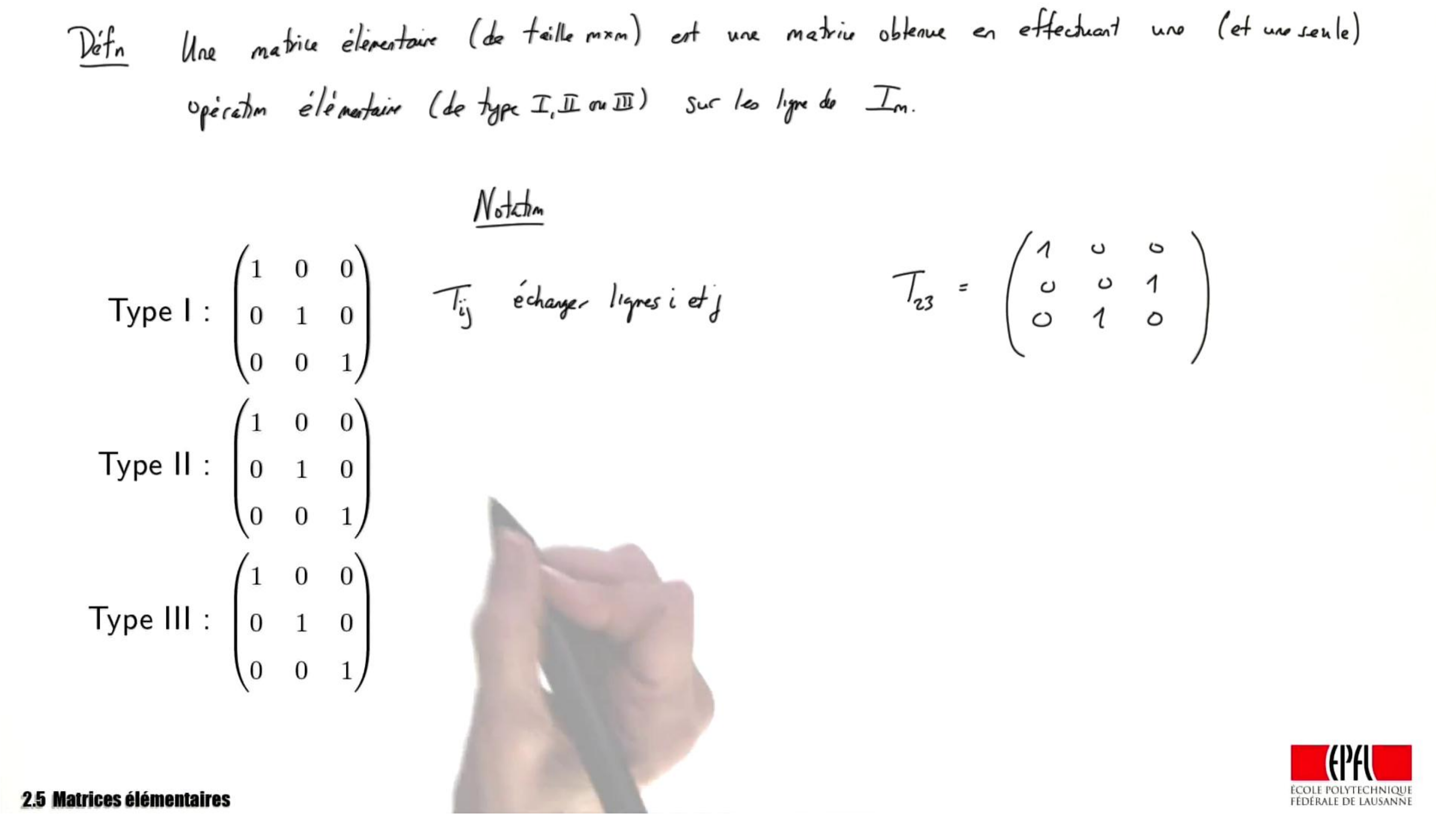
EPFL

Ici, nous allons introduire les matrices élémentaires. Ce sont des matrices très utiles dans toutes les opérations matricielles. Elles ont une propriété assez magnifique et surprenante. Je vais d'abord les définir.

Notes

Summary

0m 04s



Comme nous avons des opérations élémentaires de type I, II et III, nous aurons des matrices élémentaires de type I, II et III. Donc, définition : une matrice élémentaire de taille *m x m* (donc une matrice carrée) est une matrice obtenue en effectuant une et une seule opération élémentaire de type I, II ou III sur les lignes, mais de quelle matrice ? sur les lignes de la matrice identité *I m*. Je commence avec la matrice identité, je vais faire une seule opération élémentaire de type I, II ou III La matrice que j'obtiens est une matrice élémentaire. Je vais illustrer cela ici. Je vais aussi introduire une notation. Pour le type I, je vais noter : T_{ij}, la matrice élémentaire que j'obtiens si j'échange les lignes *i* et *j*. Par exemple, avec cette matrice *3 x 3*, la matrice identité, si je fais $T_{2,3}$, j'échange les lignes *2* et *3*, et j'obtiens la matrice [voir écran] donc ça c'est une matrice élémentaire de type I. Ici, la deuxième opération élémentaire est celle où l'on multiplie une ligne par un nombre réel non-nul, par exemple *λ*, un nombre réel non-nul, il y a aussi un autre paramètre, ça c'est la ligne que je vais multiplier, donc $D_r(\lambda)$, est la matrice que j'obtiens si je multiplie la ligne *r* par *λ*.

Notes

Summary

0m 20s

Donc je prends la matrice identité et j'effectue cette opération. Par exemple ici, je pourrais faire $D_3(-1/3)$. Donc je prends la matrice identité et je multiplie la troisième ligne par $-1/3$. Et ça c'est une matrice élémentaire. Pour le type III, l'opération que nous utilisons le plus, là il va y avoir trois paramètres dans la notation, il y aura un λ, un nombre réel, qui pourrait être 0 cette fois, et deux paramètres pour les deux lignes avec lesquelles on va travailler. Donc la notation que je vais utiliser est : $L_{rs}(\lambda)$ et maintenant il faut mémoriser la notation, ici je vais rajouter λ fois la ligne s à la ligne r. La notation n'est pas mal faite, parce qu'ici l'indice ligne de cette matrice élémentaire indique quelle ligne va changer. Les autres lignes vont être comme dans la matrice identité. Par exemple ici, avec 3×3, si je prends la matrice $L_{21}(-5)$, la matrice que j'obtiens... donc quelle ligne va changer ? c'est la deuxième ligne qui va changer. Donc ça signifie que je vais rajouter -5 fois la ligne 1 à la ligne 2. Donc la ligne 1 ne change pas, la ligne 3 ne change pas, et ensuite j'ai $(-5 \ 1 \ 0)$. C'est l'autre matrice élémentaire.

Notes

Summary

2m 18s

Théorème Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Soit $E \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ une matrice élémentaire, de type I, II ou III.

Alors EA est la matrice obtenue en effectuant sur les lignes de A l'opération élémentaire utilisée pour former E.

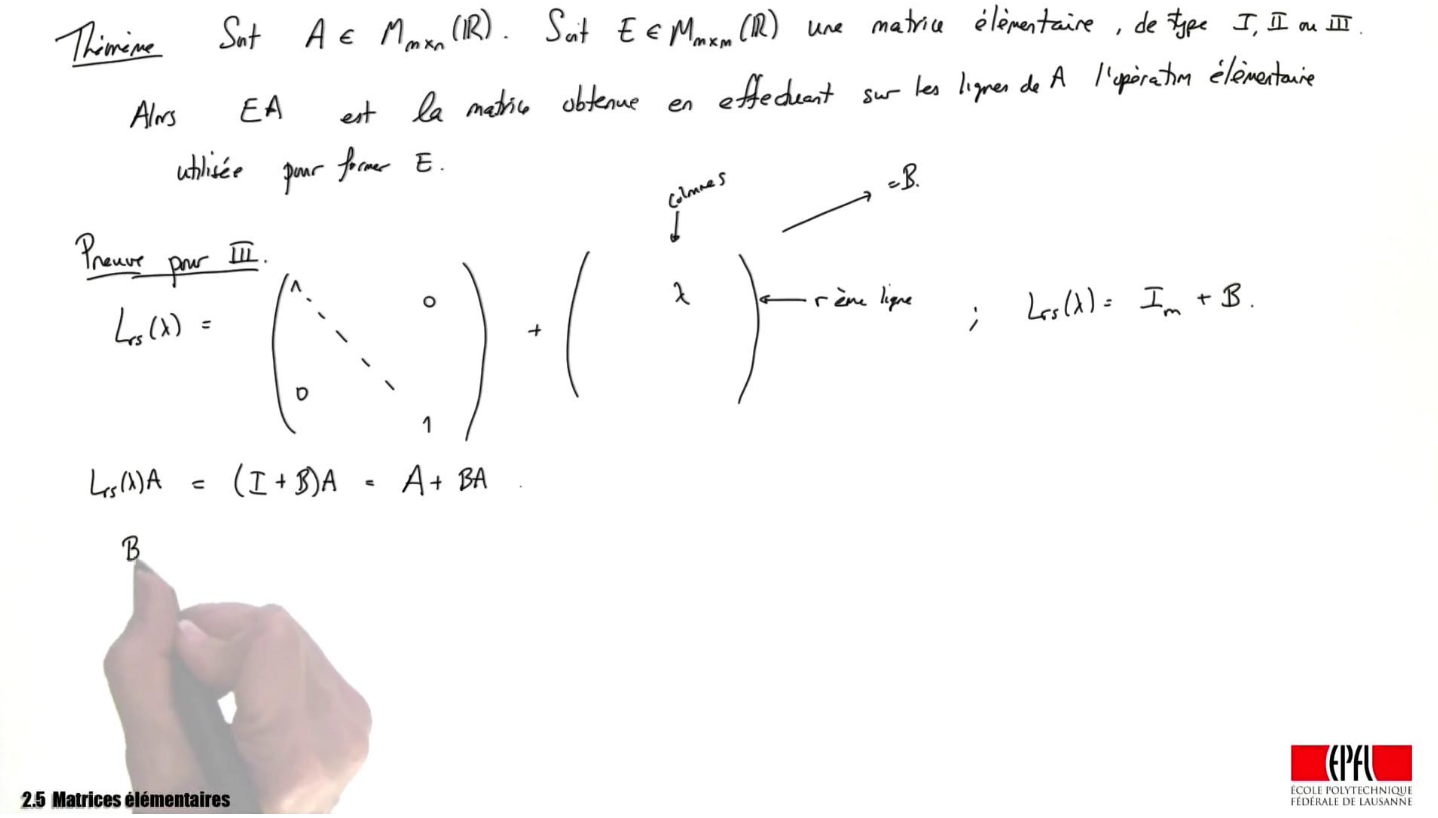
2.5 Matrices élémentaires

Une propriété qui est magnifique avec ces matrices élémentaires est le théorème suivant : je prends une matrice quelconque *m x n* et je prends une matrice élémentaire de taille *m x m*. Cette matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire de type I, II ou III. Maintenant, je peux former un produit de ces deux matrices, mais dans quel sens ? Alors *A* est *m x n*, *E* est *m x m*, on peut mettre *E* à gauche de *A*. Alors ce produit est exactement la matrice que j'obtiens si j'effectue la même opération élémentaire sur les lignes de *A* que celle que j'ai utilisée pour former la matrice *E*. Donc la matrice obtenue quand je multiplie à gauche par la matrice élémentaire *E*, l'effet en est que la matrice que j'obtiens est la matrice *A*, où j'ai opéré sur les lignes de *A* avec la même opération que j'ai utilisée pour former *E*. Le fait qu'on puisse utiliser ces opérations élémentaires en faisant une multiplication a beaucoup de conséquences et d'utilité. Maintenant je vais illustrer une preuve, dans le prochain tableau il y aura des exemples, mais si vous voulez voir la preuve, je vais illustrer ici la preuve pour type III, qui est l'opération que nous utilisons le plus.

Notes

Summary

4m 01s

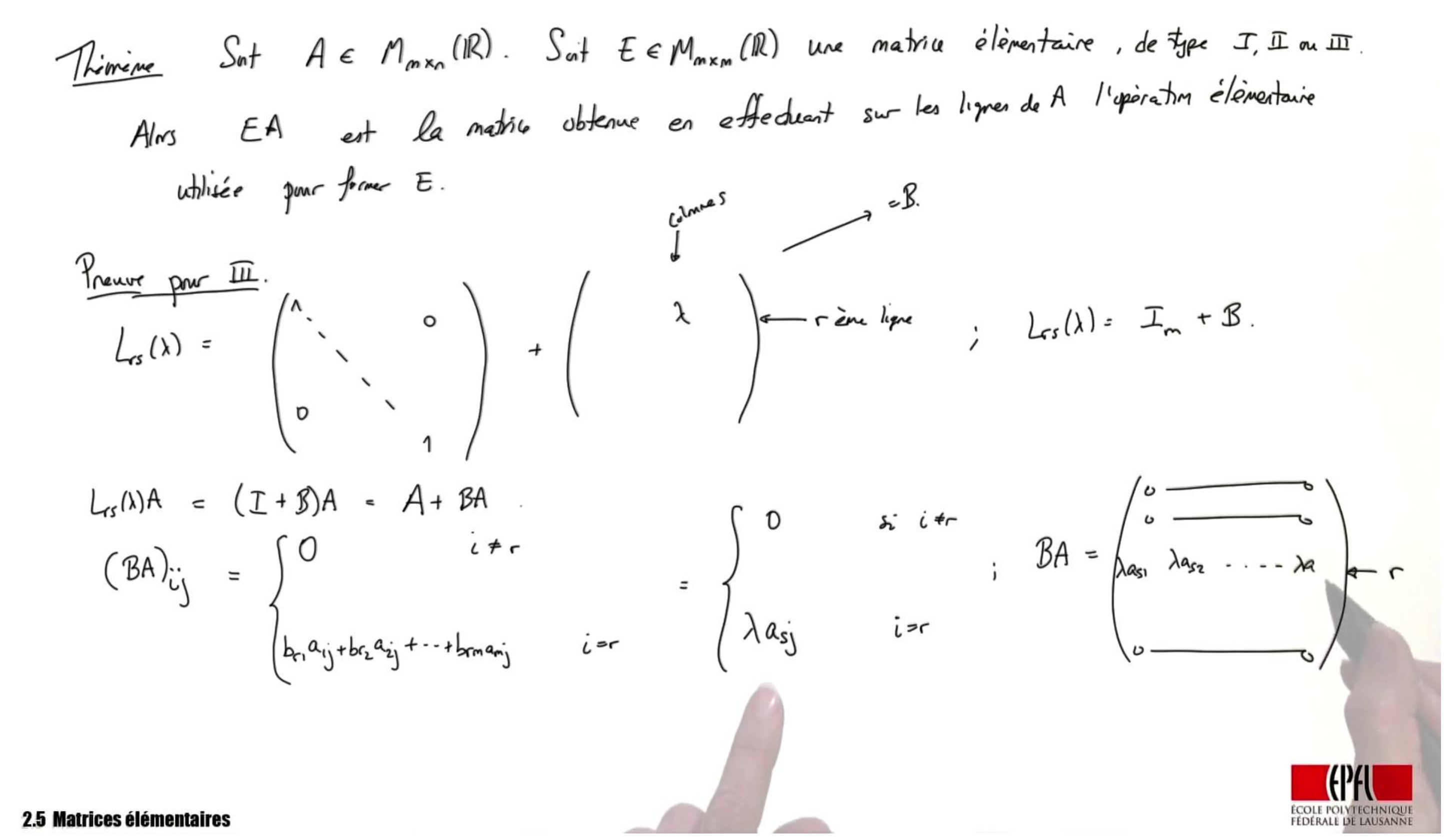


Je prends une matrice élémentaire $L_{rs}(\lambda)$, donc cette matrice est la matrice identité à la base, et pour former cette matrice, ce que j'ai fait c'est que, la seule ligne qui change, c'est la ligne *r* à laquelle je vais rajouter quelque chose. Donc dans la ligne *r*, il y aura une composante non-nulle mais seulement une parce que je vais multiplier la ligne *s* de cette matrice par λ et je vais l'additionner à la ligne *r*. Donc ça c'est dans la colonne *s*. Ailleurs il y a des zéros. Donc c'est une matrice avec une seule composante non-nulle, cette composante elle est dans la *r*-ème ligne de la *s*-ème colonne. Je vais appeler cette matrice *B*. $L_{rs}(\lambda)=I+B$ où *I* est la matrice identité $m \times m$. Maintenant je viens multiplier ce $L_{rs}(\lambda)$ par la matrice *A*, donc ça c'est la matrice $I+B$, fois la matrice *A*. Et ça c'est la matrice $A + BA$ (ça distribue). Pour comprendre ce qui se passe ici, je dois comprendre la matrice *BA*. Pour comprendre une matrice, on va toujours regarder sa composante *i,j*.

Notes

Summary

5m 44s



Ce n'est pas très compliqué de calculer la composante i,j de cette matrice parce que si vous vous rappelez que pour former la composante i,j je vais utiliser la i-ème ligne de B, mais la plupart des lignes de B sont nulles, donc la plupart du temps j'aurai 0 ici, sauf si je suis dans la r-ème ligne. Donc si i est différent de r, de toute façon j'ai 0. Maintenant si $i=r$, je vais aller chercher la r-ème ligne de B, donc j'aurai $b_{r1}a_{1j}$... (après je dirai ce que c'est), parce que j'utilise la j-ème colonne de A… $+b_{r2}a_{2j}$, etc. Ici, il y a un seul terme qui est non-nul et c'est le terme où je suis à la s-ème place, donc ici j'ai 0, si le i est différent de r, et à cette place-là, donc je serai à λa_{sj} et ça c'est dans la ligne $i=r$. Donc j'en déduis que la matrice BA est comme ceci, donc j'ai une ligne de zéros, encore une ligne de zéros, en bas une ligne de zéros, et ici au milieu, quand je suis à la r-ème ligne, ce que j'ai c'est λa_{s1}, λa_{s2},... λa_{sn} .

Notes

Summary

7m 13s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}, T_{13}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$D_2(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$L_{31}(-5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

On constate que quand je fais la somme $A+BA$, j'obtiens la matrice A et ce qui a changé c'est que je vais rajouter à la r-ème ligne λ fois la s-ème ligne. Donc c'est exactement ce qu'on a dit ici. Le résultat, $L_{rs}(\lambda)A$ est égale à la matrice où on rajoute λ fois la s-ème ligne de A à la r-ème ligne de A. Donc voici la preuve du type III.

Notes

Summary

8m 59s

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta\\ 5&6&7&8\\ x&y&z&t\end{pmatrix},\ T_{13}A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta\\ 5&6&7&8\\ x&y&z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&7&8\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta\\ 1&2&3&4\\ x&y&z&t\end{pmatrix}$$

$$D_2(\lambda)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta\\ 5&6&7&8\\ x&y&z&t\end{pmatrix}$$

$$L_{31}(-5)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ -5&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta\\ 5&6&7&8\\ x&y&z&t\end{pmatrix}$$

2.5 Matrices élémentaires

Pour terminer, nous allons voir des exemples concrets. Ici, je prends une matrice *4 x 4* et à chaque fois, j'ai donné une matrice élémentaire de type I, II ou III. Je vais effectuer la multiplication lentement et vous allez voir que le résultat que j'ai ici est exactement la matrice *A* avec une opération élémentaire effectuée sur les lignes. Il suffit de le faire une fois en détails et ensuite on aura compris. Ici je multiplie donc je fais la première ligne fois la première colonne et je vois que cela me donne *(5 6 7 8)*. Maintenant avec la deuxième ligne, vous avez compris que quand je fais le produit ici, ça va chercher la deuxième composante de chaque colonne. Là j'ai *(α β γ δ)*. Ici quand je fais le produit de la troisième ligne par chaque colonne ça ne va me donner que la première composante de la colonne parce que les autres sont nulles. Enfin, la dernière fois chaque colonne cela donne la dernière composante de chaque colonne. Effectivement, si je compare cette matrice-là et celle-là, la différence c'est que, pour passer de là à là, j'ai échangé les lignes *1* et *3* et c'est exactement ce qu'est cette matrice élémentaire.

Notes

Summary

9m 31s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}, \underline{T_{13}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\underline{D_2}(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma & \lambda\delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$L_{31}(-5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

2.5 Matrices élémentaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant, lorsque j'effectue cette multiplication des matrices, la première ligne va donner la première composante de chaque colonne. Je multiplie par la deuxième ligne j'ai λ fois la deuxième ligne. Pour le reste c'est la même chose, cela va redonner la troisième composante, puis la quatrième composante de chaque colonne. Maintenant, la différence entre cette matrice et la matrice A, c'est qu'on a multiplié la deuxième ligne par λ et c'est exactement la définition de cette matrice élémentaire. Enfin, l'opération la plus utile, ici. Je multiplie la première ligne par chacune des colonnes et cela va redonner la première ligne, comme là-haut, la deuxième ligne sera comme la deuxième, et maintenant on arrive à la partie intéressante, je fais le produit de cette ligne par chaque colonne $-5+0+5+0$, etc. La dernière ligne va redonner la dernière composante de chaque colonne. La différence entre cette matrice et celle-ci, c'est que, si je fais -5 fois la première ligne de A que j'additionne à la troisième ligne, c'est exactement ce que j'ai obtenu ici. De nouveau j'insiste sur le fait que dans la notation, l'indice ligne nous dit quelle ligne va changer.

Notes

Summary

10m 59s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}, \underline{T_{13}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\underline{D_2}(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma & \lambda\delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$L_{31}(-5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

<u>Corollaire du théorème</u> Les matrices élémentaires sont inversibles. $T_{ij} T_{ij} = I$; $D_r(\frac{1}{\lambda}) \cdot D_r(\lambda) = I$

2.5 Matrices élémentaires

Donc ça c'est assez super : on a un corollaire du théorème qui est aussi utile, c'est que les matrices élémentaires sont inversibles. C'est vraiment un corollaire du théorème et je vous explique pourquoi. Je commence avec la matrice de type T_{ij}, donc ça c'est la matrice que j'obtiens si j'échange les lignes i et j de la matrice identité. Maintenant par le théorème, si je multiplie à gauche par la matrice T_{ij}, ça échange les lignes i et j de cette matrice-là. Donc cela signifie que je retourne sur la matrice identité. Donc la matrice T_{ij} est inversible et son inverse est la matrice T_{ij}. Maintenant, le deuxième type. Si je fais $D_r(1/\lambda)$, que je multiplie par $D_r(\lambda)$, cette matrice-là est la matrice identité sauf que la r-ème ligne a été multipliée par λ. Maintenant quand je viens multiplier à gauche par cette matrice-là, ça va multiplier cette ligne par $1/\lambda$. Donc du coup je reviens à la matrice identité. Normalement, il faut vérifier dans l'autre sens, mais cela fonctionne dans l'autre sens aussi. Une remarque : ici il est important que lambda soit non-nul, comme cela je peux former $1/\lambda$.

Notes

Summary

13m 03s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}, T_{13}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$D_2(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma & \lambda\delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$L_{31}(-5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

Corollaire du théorème Les matrices élémentaires sont inversibles. $T_{ij}T_{ij} = I$; $D_r(\frac{1}{\lambda}) \cdot D_r(\lambda) = I$

$\rightarrow L_{rs}(-\lambda) \cdot L_{rs}(\lambda) = I$

2.5 Matrices élémentaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Enfin, si je fais $L_{rs}(-\lambda)$, que multiplie par $L_{rs}(\lambda)$, cette matrice-là est la matrice identité où j'ai rajouté λ fois la ligne s à la ligne r. Cette opération va venir rajouter $-\lambda$ fois la ligne s à la ligne r. Donc ça va me redonner la matrice identité. Ça vaut la peine d'aller faire des exercices. Donc, les matrices élémentaires sont inversibles, les inverses des matrices élémentaires sont aussi des matrices élémentaires et tout cela va jouer un rôle dans notre algorithme pour calculer l'inverse d'une matrice. Nous verrons cela prochainement.

Notes

Summary

14m 27s