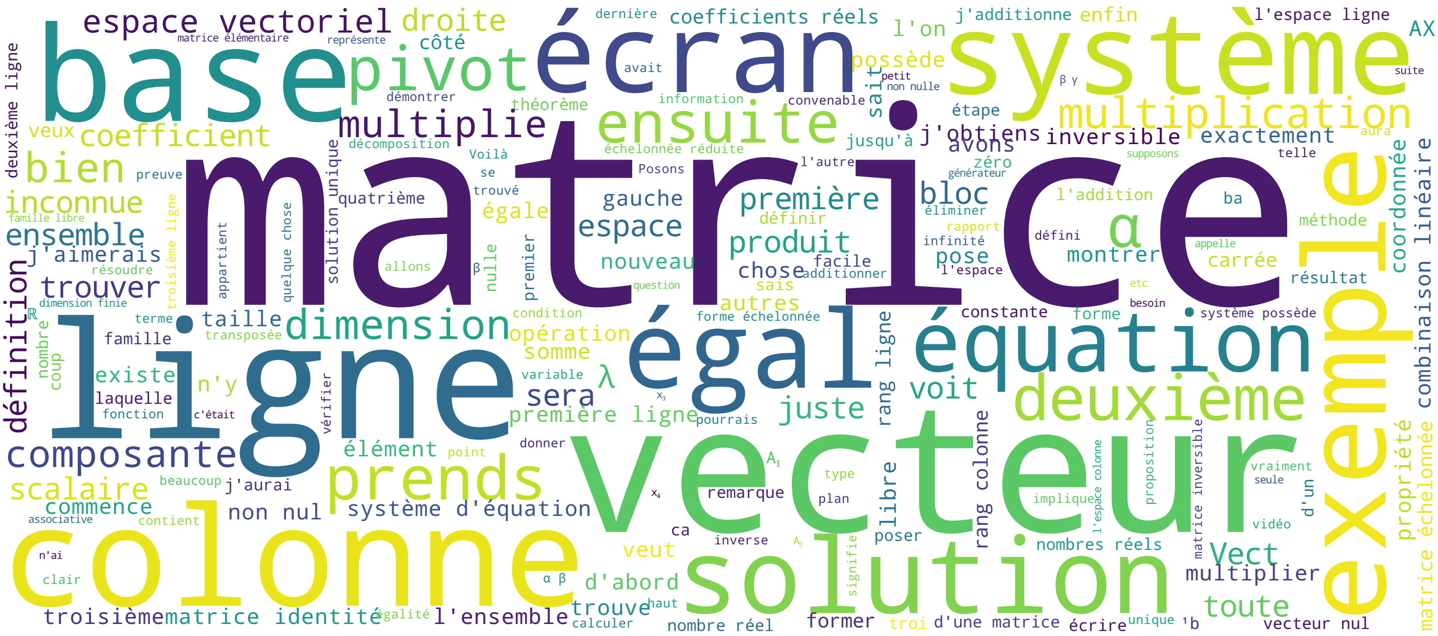
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.4 Systèmes d'équations et matrices

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & + & \cdots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Matrice des coefficients $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Maintenant, nous avons introduit une algèbre matricielle. On sait les additionner, multiplier par les scalaires, faire la transposée, faire la multiplication. Et puis, enfin, on revient à nos systèmes d'équations, et puis je vais vous montrer une première petite raison pour laquelle la multiplication de matrices est définie comme on l'a fait. Après, il y aura d'autres raisons plus convaincantes, mais ici, on voit une première raison pour laquelle c'est convenable de la définir ainsi.

Notes

Summary

0m 04s

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & + & \cdots & +a_{in}x_n & = b_i \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m
\end{cases}
$$

Matrice des coefficients $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Posons $b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{m\times 1}$ et $X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1}$ $AX =$

2.4 Systèmes d'équations et matrices

Donc je prends un système d'équations, ça, c'est notre système habituel, et puis, la matrice des coefficients. Donc c'est un système de *m* équations à *n* inconnues et la matrice des coefficients, c'est une matrice *m x n*. Maintenant, je vais poser deux matrices de plus. Posons *b* la matrice, qui est longue, fine et qui est juste la colonne des constantes présentes dans les équations. Et, ensuite, formellement, je vais poser *X* la matrice, aussi longue et fine, avec comme composantes, les inconnues suivantes [voir écran]. Donc ce n'est pas vraiment une matrice à coefficients réels mais c'est une matrice formelle avec des variables. Et puis maintenant, ça, c'est une matrice *m x 1*, ça, c'est une matrice *n x 1*, et ça, c'est une matrice *m x n*. Donc il y a un produit que je peux faire ici : on peut former le produit *A·X*, on peut former le produit *A·X*, c'est ce que je vais faire. Pour faciliter la tâche, je vais mettre *X* ici. Maintenant, je fais le produit. La dimension du résultat va être, (comme ces dimensions sont *m x n* et *n x 1)* le résultat va aussi être long, comme ça, ce sera une matrice *m x 1*.

Notes

Summary

0m 32s

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & + & \cdots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Matrice des coefficients $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Posons $b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{m \times 1}$ et $X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1}$

$$AX = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

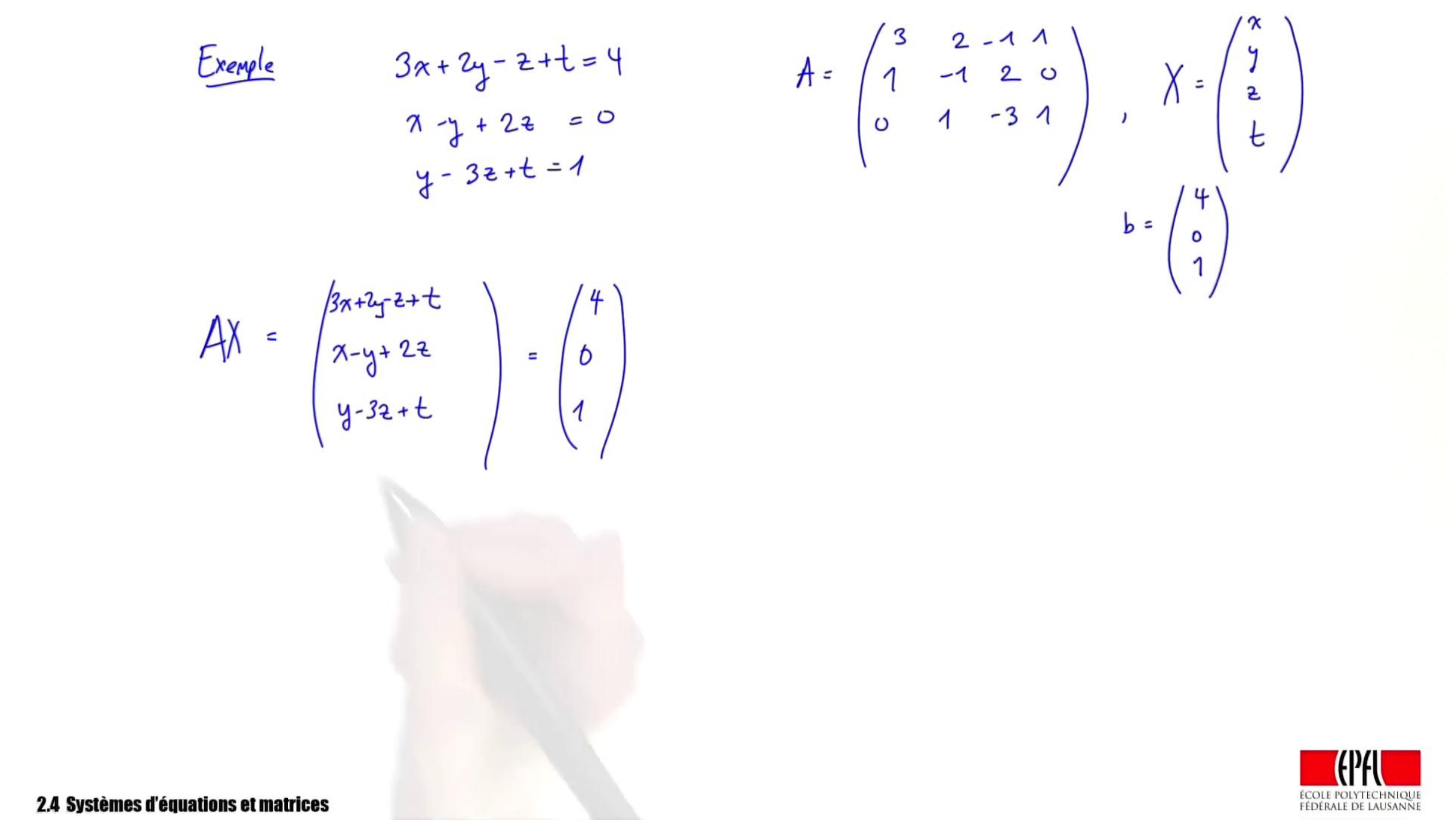
L'équation matricielle $AX = b$ contient la même information que le système d'équation.

Donc pour former cette matrice, la première composante c'est que je multiplie la première ligne par la colonne de la deuxième matrice et j'additionne donc j'aurai comme première composante $a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n$. Deuxième composante, ce sera $a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n$. Et puis ensuite, la dernière composante, $a_{m1}\ x_1 + \ldots + a_{mn}\ x_n$. On voit que les composantes dans cette matrice sont exactement les composantes gauches de chacune des équations dans le système. Donc du coup, si je pose cette matrice-là égale à la matrice... Comme ça est égal à b_1, ça est égal à b_2, et ça est égal à b_m. On voit que l'équation matricielle $AX = b$ contient la même information que le système d'équations. Donc ça c'est une des raisons pour laquelle il est convenable de définir la multiplication des matrices comme ça. On multiplie cette matrice par cette colonne et puis ça redonne une colonne, et toute cette information, ça encode l'information qui est dans le système.

Notes

Summary

1m 59s



Maintenant, je vais juste faire un exemple. Donc par exemple, si je prends le système *3x + 2y - z + t = 4 x - y + 2z = 0 y - 3z + t = 1*. Je pose la matrice des coefficients, donc : *3 2 -1 1, 1 -1 2 0, 0 1 -3 1*, la colonne des variables : *x*, *y*, *z*, et *t*, et la colonne *b* des constantes : *4 0 1*. Et j'effectue la multiplication *A·X*, donc là je le vois car elles sont l'une à côté de l'autre, j'ai *3x + 2y - z + t* et puis, deuxième, j'ai *x - y + 2z* et puis, troisième, j'ai *y - 3z + t*. Donc ça, c'est exactement les membres de gauche du sytème d'équations. Et puis on a l'égalité [voir écran] [voir écran] [voir écran] ça contient la même information que le système d'équations.

Notes

Summary

3m 30s

Conséquence: Soit $AX = b$ un système d'équations aux inconnues $x_1, \dots, x_n$.

Supposons que A est inversible. A^{-1} existe.

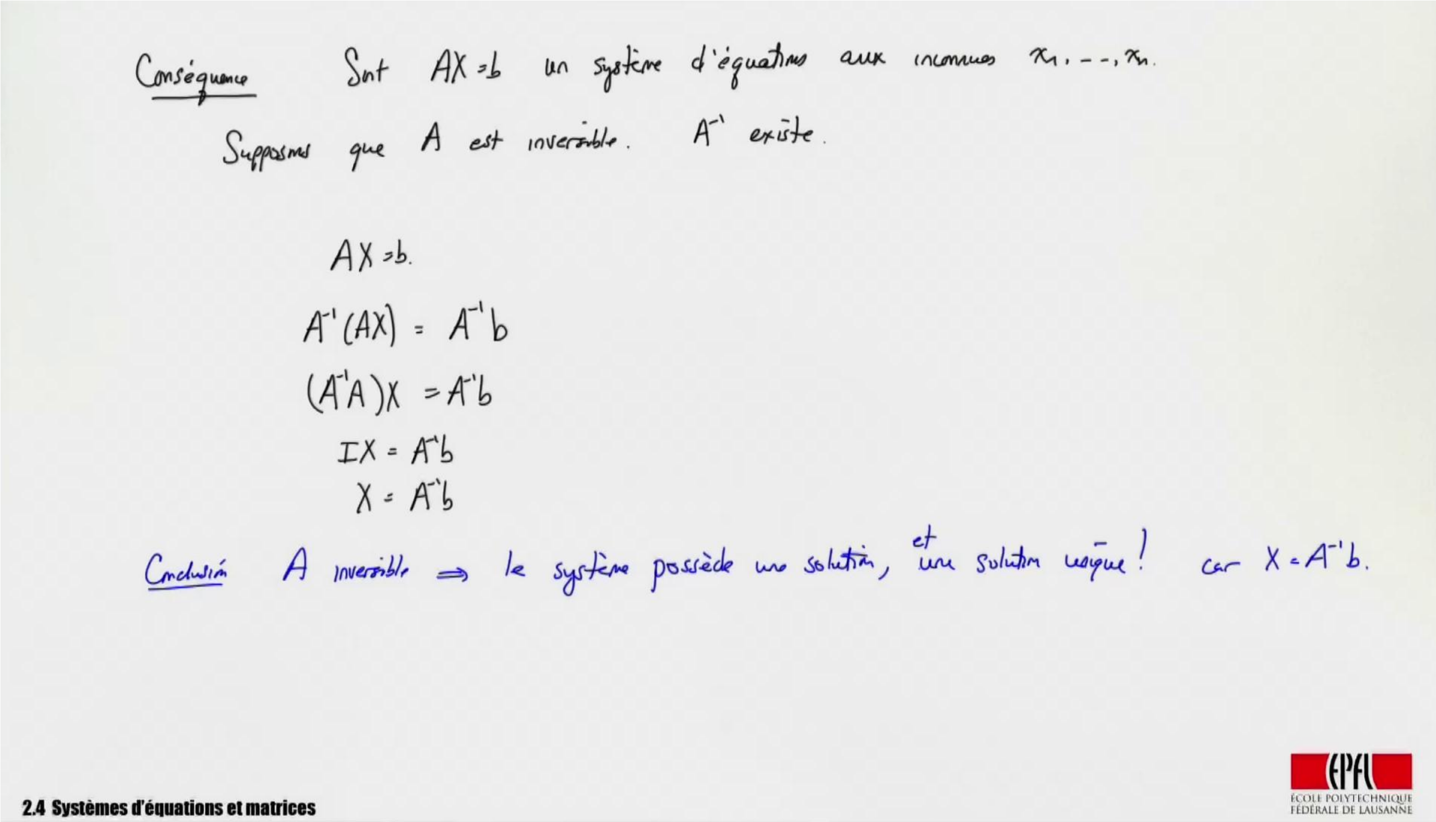
$$AX = b.$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}b$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}b$$
$$IX = A^{-1}b$$
$$X = A^{-1}b$$

Maintenant, une conséquence intéressante de ça, c'est un cas particulier, supposons que j'ai un système dont la matrice des coefficients est carrée, soit $AX = b$, bon c'est déjà beaucoup plus facile à écrire, un système d'équations aux inconnues x_1 jusqu'à x_n, et supposons que A est une matrice inversible, donc en particulier, A est carrée, donc il y a m inconnues et n équations. J'ai l'équation $AX = b$, A est une matrice inversible, donc c'est à dire, A inverse existe, donc je vais l'utiliser. Donc je multiplie les deux côtés ici par la matrice A^{-1}, et puis, comme la multiplication n'est pas associative, je dois multiplier les deux fois du même côté, d'ailleurs, b fois A^{-1} ne sera pas défini parce que les tailles ne jouent pas. Après, je réarrange ici, j'ai $(A^{-1}A)X = A^{-1}b$, $A^{-1} \cdot A$, c'est l'identité, et donc, $X = A^{-1}b$. Donc on a appris quelque chose qu'on ne savait pas avant. Déjà, si A est inversible, c'est sûr qu'on trouve une solution, donc, conclusion, A inversible implique que le système possède une solution, et en plus, cette solution elle est unique parce qu'on a trouvé une seule valeur pour X ici, X est égal à $A^{-1}b$, il n'y a pas d'autre choix, donc le sytème possède une solution et une solution unique.

Notes

Summary

5m 05s



et une solution unique. car X doit être égal à $A^{-1}b$. Et puis l'autre chose qu'on remarque, bon, là, je ne vais pas écrire mais je vais juste dire, c'est qu'on remarque que si on avait d'autres systèmes, comme par exemple $AX = c$, une autre colonne de constantes, je pourrais de nouveau faire la même manipulation et je trouve que X est égal à $A^{-1}c$. Donc si on arrive à trouver la matrice A^{-1}, on pourrait l'utiliser pour résoudre tout plein de systèmes avec la même matrice des coefficients et la colonne des constantes qui varie. Donc maintenant, on va vers ça, c'est que je veux voir comment trouver l'inverse d'une matrice, déjà, déterminer si elle est inversible, et comment calculer cette inverse.

Notes

Summary

6m 55s