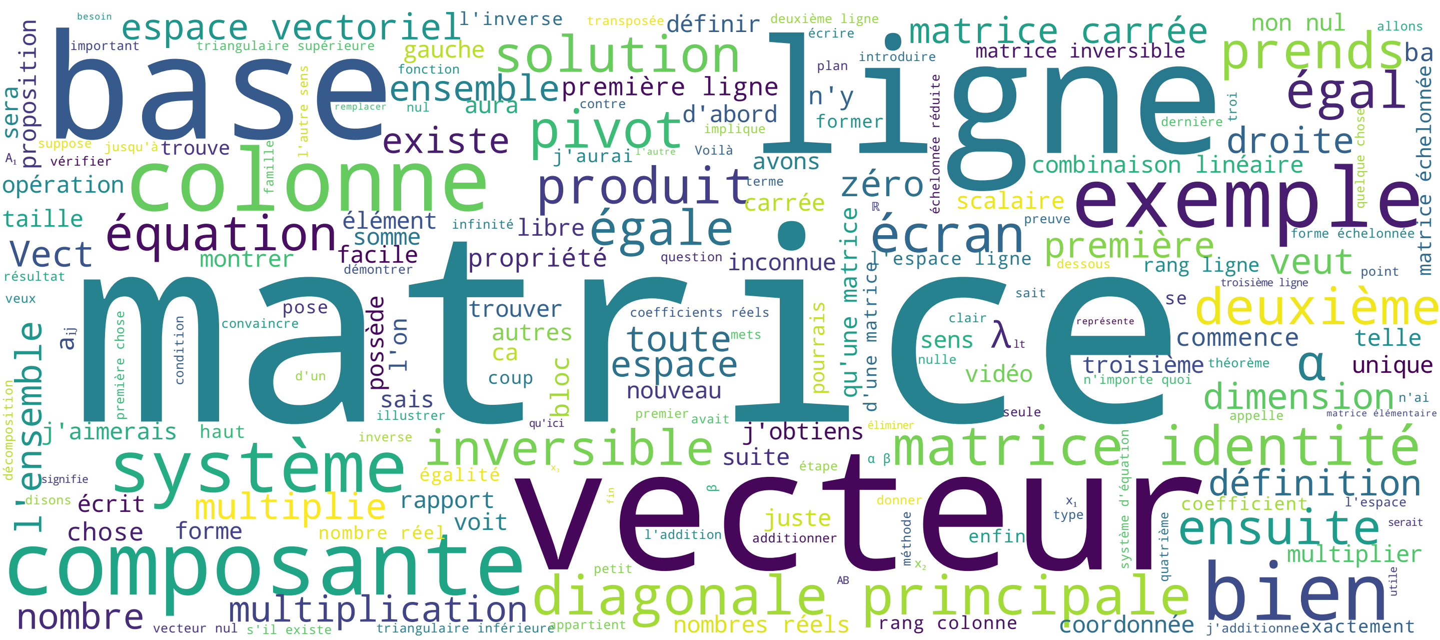
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.3 Matrices carrées, triangulaires, diagonales, inversibles

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

2.3 Matrices carrées, triangulaires, diagonales, inversibles

Dans cette vidéo, je vais introduire les matrices qui ont une forme particulièrement convenable, ce sont des matrices qui seront plus faciles à manipuler, et puis très utiles par la suite.

Notes

Summary

0m 04s

Déf. On dit qu'une matrice A est carrée si A est une matrice $n \times n$.

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On peut former $A \cdot A$, et $A \cdot A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, aussi $A \cdot (A \cdot A) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

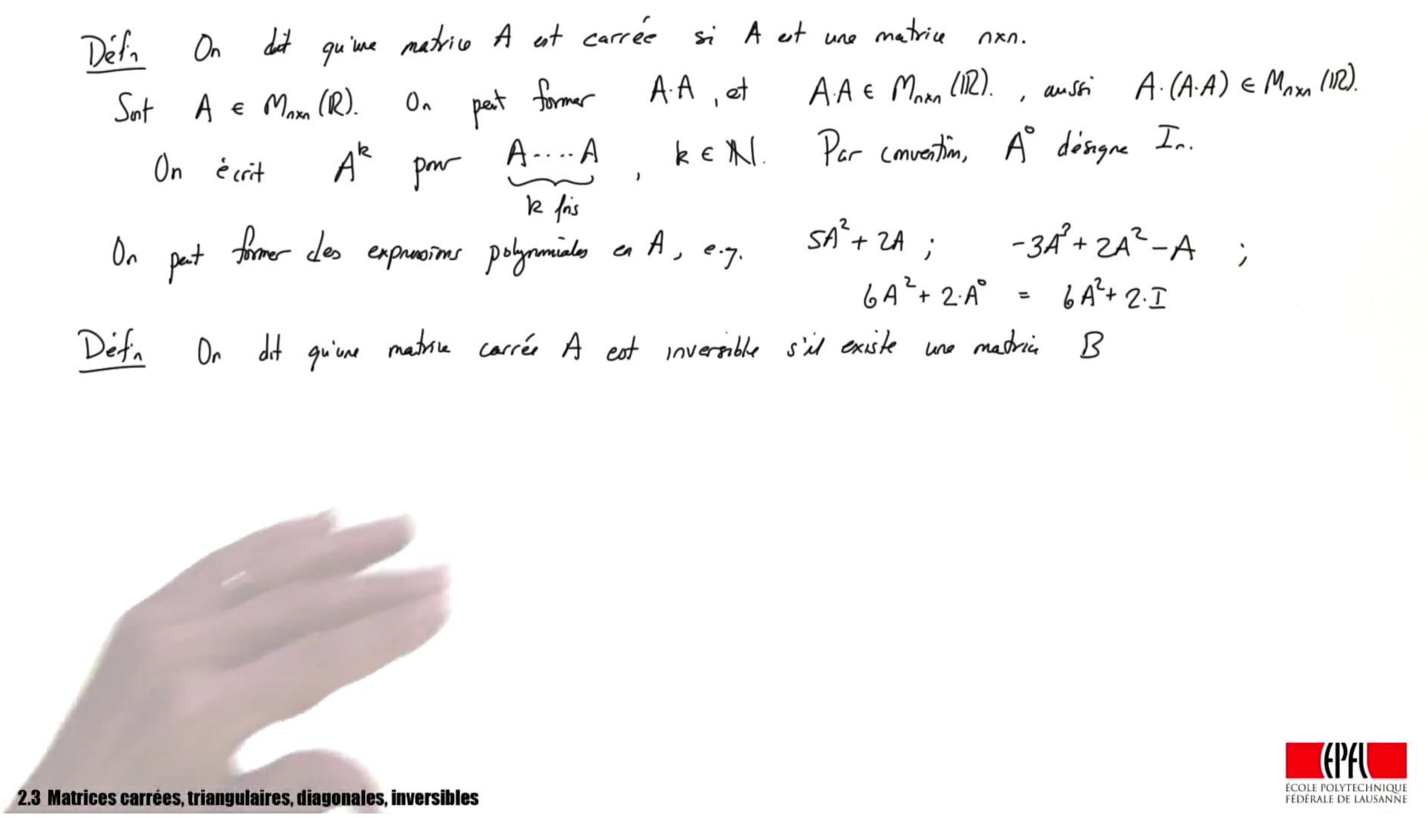
On écrit A^k pour $\underbrace{A \cdots A}_{k \text{ fois}}$, $k \in \mathbb{N}$. Par convention, A^0 désigne I_n.

Donc je commence par définir ce que c'est qu'une matrice carrée. On dit qu'une matrice A est carrée si A est une matrice n x n. C'est-à-dire qu'elle a le même nombre de lignes que de colonnes. Maintenant, si on a une matrice carrée, on peut faire des opérations qu'on ne peut pas faire en général. Donc, soit A une matrice carrée n x n, alors on peut former le produit $A \cdot A$. Et puis, ce produit va aussi être une matrice n x n. Donc du coup, on peut reformer le produit, aussi $A \cdot (A \cdot A)$ sera de nouveau une matrice n x n. Et puis, il est convenable d'écrire A^k pour le produit de la matrice A, k fois. Maintenant, si on a écrit A^0, zéro est aussi un nombre naturel, et A^0 désigne par convention la matrice identité n x n. C'est comme avec les nombres: si on écrit 2^0, ça veut dire le nombre 1.

Notes

Summary

0m 15s



Et puis, maintenant qu'on peut faire tout plein de produits et de puissances de la matrice *A*, si elle est carrée, on peut même former des expressions polynomiales en *A*, par exemple, je pourrais faire $5A^2 + 2A$, ça a un sens; ou bien, je pourrais faire $-3A^3 + 2A^2 - A$, ça a aussi un sens; ou bien, je pourrais faire $6A^2 + 2A^0$, mais ici, on va écrire $6A^2 + 2I$, où *I* est la matrice identité, et des fois même, par abus, on écrit simplement $6A^2 + 2$, ce qui n'a pas tellement de sens parce que *2* est un nombre, donc on devrait laisser le *I*, mais des fois, par paresse, on ne l'écrit pas. Bon, je l'efface, parce que ce n'est pas très bien de l'écrire ainsi. Maintenant, je vais définir quelque chose qui marche pour certaines matrices; vous pouvez vous demander, ici, on a mis des puissances positives, mais cela a-t-il un sens d'avoir une puissance négative, comme pour les nombres réels, si on a 2^{-1}, ça veut dire *1/2* ? Parfois ça a un sens et parfois non. On dit qu'une matrice carrée *A* est inversible s'il existe une autre matrice *B*... Ici, je devrais dire cette matrice carrée, elle est de taille *n x n*.

Notes

Summary

1m 21s

Défn On dit qu'une matrice A est carrée si A est une matrice $n \times n$.

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. On peut former $A \cdot A$, et $A\cdot A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, aussi $A\cdot(A\cdot A) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

On écrit A^k pour $\underbrace{A \cdots A}_{k \text{ fois}}$, $k \in \mathbb{N}$. Par convention, A^0 désigne I_n.

On peut former des expressions polynomiales en A, e.g. $5A^2 + 2A$; $-3A^3 + 2A^2 - A$;
$6A^2 + 2\cdot A^0 = 6A^2 + 2\cdot I$

Défn On dit qu'une matrice carrée $A^{n\times n}$ est inversible s'il existe une matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n = BA$.

Proposition Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe une et une seule matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.q. $AB = I = BA$.

Preuve Soit $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.q. $AB = I = BA$ et $AC = I = CA$.

2.3 Matrices carrées, triangulaires, diagonales, inversibles

S'il existe une autre matrice *B*, aussi une matrice *n x n*, telle que *A·B* = *I* la matrice identité *n x n*, et également dans l'autre sens: *B·A* = *I*. Donc une matrice est inversible, c'est l'inversibilité par rapport à la multiplication, s'il existe une matrice *B* telle qu'en multipliant à gauche ou bien à droite, on trouve la matrice identité. Et la première chose, c'est que j'aimerais vous convaincre que si on a une matrice qui est inversible, son inverse est unique. Donc soit *A* une matrice carrée inversible, alors il existe une et une seule matrice *B*, aussi *n x n*, telle que *AB* = *I* = *BA*. Donc, comme *A* est inversible, je sais qu'il existe au moins une matrice *B* qui a cette propriété, donc je suppose que j'en ai une autre, donc soit *B* et *C* des matrices *n x n* telles que *AB* = *I* = *BA* et aussi *AC* = *I* = *CA*. Alors, je vais jouer avec ces deux égalités. Donc, je commence avec *B*: j'ai *B* = *B·I*, ça, c'est une propriété que j'ai énoncée mais que je n'ai pas démontrée, vous devrez aller faire des petites multiplications pour me convaincre.

Notes

Summary

2m 55s

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici, je vais remplacer ce I qui est là par $A \cdot C$. La multiplication de matrices étant associative, je peux replacer les parenthèses. Maintenant, la matrice $B \cdot A$, c'est aussi la matrice identité, qui multiplie C, et comme la matrice identité fois C est égale à C, à la fin, j'ai l'égalité suivante: la matrice B est égale à la matrice C. Donc ça démontre ma proposition. Ce qui est bien avec cette proposition, c'est que maintenant, il n'y a pas de confusion, si A est une matrice inversible, donc soit A une matrice inversible, on écrit A^{-1} pour l'unique matrice telle que $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$. On l'appelle la matrice inverse, l'inverse de A, ou la matrice inverse de A. Alors, la première chose à voir... Ça c'est déjà très joli, donc si on a une matrice inversible, il y a une unique matrice qui sert comme inverse. Mais il faut voir que malheureusement, toutes les matrices ne sont pas inversibles.

Notes

Summary

4m 38s

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \text{ non inversible.}$$

Je vais vous illustrer ça avec deux exemples. Ici j'ai deux matrices *2 x 2*, donc des matrices carrées, et puis ici, je vais illustrer, enfin, je vais vous donner l'inverse de cette matrice, donc je fais la multiplication ici. Je savais à l'avance, *1·1+2·0 = 1 -2 + 2 = 0, 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1*. Et puis dans l'autre sens, *1, -2, 0, 1* qui multiplie *1, 2, 0, 1. 1 + 0 2 + (-2) 0 + 0 0 + 1*. Donc, du coup, cette matrice-là est inversible, et son inverse est égale à l'autre matrice que j'ai donné, comme je sais que l'inverse est unique. Par contre celle-là n'a aucune chance d'être inversible, parce que si je mets n'importe quelle matrice *(a, b, c, d)*, ici, j'effectue la multiplication, comme on utilise la première ligne de cette matrice à gauche pour former la première ligne du produit, tous les produits sont nuls, donc j'ai *0 + 0, 0 + 0*, il n'y a aucune chance que le résultat soit égal à la matrice identité. Donc celle-là est non inversible. Un peu plus tard, on aura des critères pour déterminer quand une matrice est inversible, et c'est bien, parce que quand on a une matrice inversible, on peut faire des choses qu'on ne peut pas faire avec n'importe quelle matrice.

Notes

Summary

5m 56s

D'autres matrices particulières:

La diagonale principale de A est l'ensemble/la suite de composantes $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Déf.: On dit $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.

Maintenant, avant de terminer cette vidéo, je vais aussi introduire d'autres matrices particulières, et pour introduire ces matrices, je dois parler de ce qui s'appelle la diagonale principale d'une matrice. Donc je prends une matrice A comme ça, et je dis que la diagonale principale de A est la suite, ou l'ensemble de composantes a_{11}, a_{22}, jusqu'à $a\ nn$, donc c'est, je vais le dessiner ici, c'est cette ligne de composantes. Vraiment dans l'ordre, le long de ce qu'on appelle la diagonale principale. Donc ça, c'est la diagonale principale. Et c'est par rapport à cette diagonale principale que je vais définir les autres matrices. Il faut voir qu'on peut définir la diagonale principale pour des matrices carrées, non carrées, c'est toujours la suite des a_{ii}. Maintenant, la suite de la définition, on dit qu'une matrice A, qui est une matrice $m\ x\ n$, est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. Maintenant, si on regarde cette matrice qu'on a là, les a_{ij} où $i > j$ sont exactement toutes les composantes qui sont ici, en dessous de la diagonale principale.

Notes

Summary

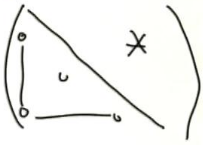
7m 38s

D'autres matrices particulières:

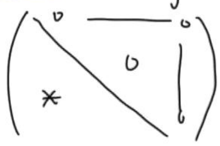
La diagonale principale de A est l'ensemble/la suite de composantes $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Déf.ⁿ On dit $A=(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij}=0$ pour tout $i>j$.



triangulaire inférieure si $a_{ij}=0$ pour tout $i<j$.



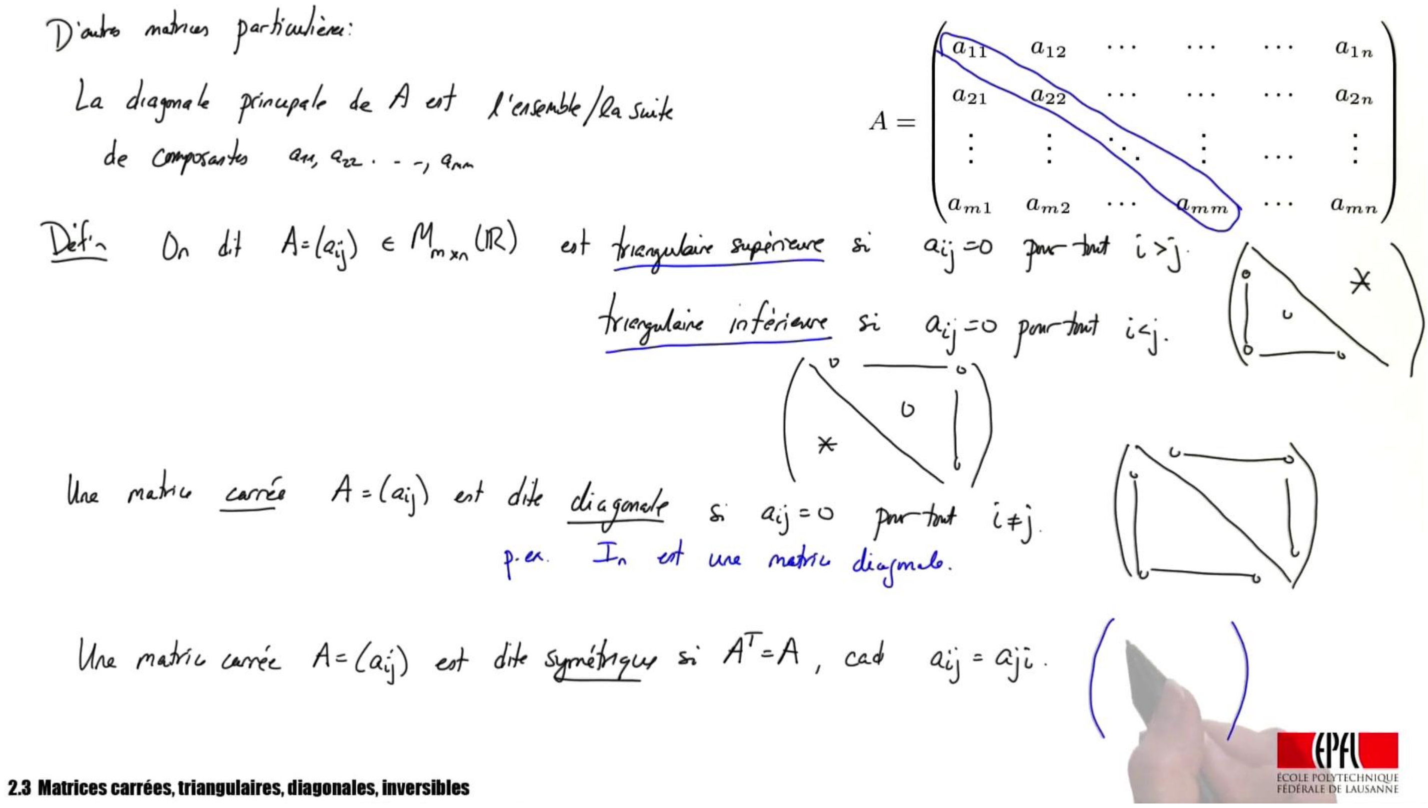
Une matrice carrée $A=(a_{ij})$ est dite diagonale si $a_{ij}=0$ pour tout $i\neq j$.

Donc, ça veut dire que la matrice triangulaire supérieure, elle aura une forme comme ça, donc ça c'est la diagonale principale, ici j'aurais je ne sais pas quoi, là haut, n'importe quoi, mais ce qui est sûr, c'est qu'ici en bas, on a que des zéros, des zéros partout. Maintenant, on dit qu'une matrice est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$. Maintenant, dans cette matrice, les a_{ij} où $i < j$, ça veut dire qu'on a les indices lignes qui sont plus petits que l'indice colonne, c'est tout ce qui est là-haut. Donc ici, triangulaire inférieure, ça serait comme ça, là la diagonale principale, et puis ici en haut, on aura plein de zéros partout. Et ici, en bas, on peut avoir n'importe quoi. Donc ce sont deux définitions : triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. On a déjà vu des matrices un peu pareilles, quand on échelonnait des matrices, et ça va revenir après. Une matrice carrée A qui est de la forme a_{ij} est dite diagonale si $a_{ij} = 0$ à chaque fois que $i \neq j$. Donc c'est important, elle est déjà une matrice carrée, et puis on dit qu'elle est diagonale si en dehors de la diagonale principale, on a des zéros.

Notes

Summary

9m 11s



Il se peut qu'on ait des zéros le long de la diagonale principale aussi, mais l'important c'est qu'on peut avoir n'importe quoi sur la diagonale principale, et en dehors de ça, on a des zéros. Par exemple, la matrice identité est une matrice diagonale. Et puis enfin, une dernière définition : une matrice carrée *A* est dite symétrique si elle est égale à sa transposée. Maintenant cette fois, c'est aussi facile de voir ça en terme des composantes, donc c'est-à-dire la composante *i*,*j* de la matrice c'est la même chose que la composante *j*,*i*. Alors on va voir qu'est-ce que ça veut dire dans un exemple, comme ça je peux l'illustrer. Donc, si j'ai une matrice, elle doit être carrée, donc disons une matrice *3 x 3*, il n'y a pas de condition sur les composantes a_{ii}, parce que de toute façon $a_{ii} = a_{ii}$. Ici, j'ai, disons *a*, *b*, *c*, mais maintenant ici, si je mets un *x* là, la composante *1*,*2* de la matrice doit être égale à la composante *2*,*1*, donc je dois aussi avoir un *x* là, la composante *1*,*3* doit être égale à la composante *3*,*1*, la composante *2*,*3* égale à la composante *3*,*2*.

Notes

Summary

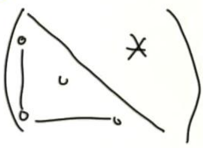
10m 39s

D'autres matrices particulières :

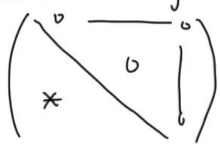
La diagonale principale de A est l'ensemble/la suite de composantes $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Défin On dit $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.

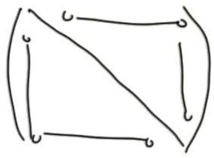


triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.



Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

p.ex. I_n est une matrice diagonale.



Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite symétrique si $A^T = A$, cad $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

Donc on voit que c'est une simple symétrie, c'est pour ça qu'on dit symétrique, par rapport à la diagonale principale. On aura l'occasion de travailler avec toutes ces matrices de formes différentes, maintenant, vous aurez un quizz où on vous demande de décider de quel type sont les matrices.

Notes

Summary

12m 07s